

II-29

混合粒径から成る粘着性河岸の侵食

北海道大学工学部 学生員 安藤 浩二

北海道大学工学部 正 員 黒木 幹男

北海道大学工学部 正 員 板倉 忠興

1. はじめに

河岸侵食の問題は、まず非粘着性の粒子（砂、礫）を対象にして理論的な検討が始まり、ついで粘土・シルトを含む粘着性を有する場への拡張が図られてきた。しかし、この場合でもいわゆる「1 粒径モデル」がほとんどであり、混合粒径の砂礫を対象にした理論的検討はほとんど行われていない。

本研究では、砂礫の周りにある粘土の粘着性を考慮した江頭らの理論解析を参考に、記述の誤りを訂正し多粒径の場に理論を拡張することを試みた。

2. 河床において粘着力を受ける砂粒子の移動限界

1) 力の釣合式と無次元限界掃流力

縦断方向にだけ傾きを有する河床におかれた砂粒子に働く力の釣合式は次式で与えられる。

$$F_D + F_W \sin \theta_x = (F_W \cos \theta_x - F_L) \mu_s + F_c \quad (1)$$

ここに、 $F_W = \pi d^3 (\rho_s - \rho) g / 6$: 砂粒子の水中重量、 $F_D = 1/2 \cdot \rho C_D \varepsilon \cdot \pi d^2 / 4 \cdot \phi^2 u_*^2$: 抗力、 $F_L = 1/2 \cdot \rho C_L \varepsilon \cdot \pi d^2 / 4 \cdot \phi^2 u_*^2$: 揚力、 F_c : 粘着力、 θ_x : 平均河床勾配、 d : 砂粒子径、 ρ_s , ρ : 砂粒子および水の密度、 μ_s : 静摩擦係数である。

ところで、単位面積当たりの粘土の粘着抵抗力を f_c 、粘着抵抗に寄与する粘着面積を $k_1' d^2$ とすると、粒子 1 個あたりの粘着力 F_c は次式のように表せる。

$$F_c = k_1' d^2 f_c \quad (2)$$

式(1)(2)より、粘着力を受ける河床砂粒子の移動限界は、次式のように表せる。

$$\tau_{*c} = \left(\cos \theta_x - \frac{\sin \theta_x}{\mu_s} \right) \tau_{*c,H} + \frac{k_1' d^2 f_c}{(\rho_s - \rho) g k_3 d^3} \frac{\tau_{*c,H}}{\mu_s} \quad (3)$$

ここに、 $\tau_* = u_*^2 / s g d$: 無次元掃流力、 $s = (\rho_s - \rho) / \rho$: 砂粒子の水中比重、 k_3 : 砂粒子の形状係数で球形の場合には $\pi / 6$ 、 $\tau_{*c,H} = 4/3 \cdot \mu_s / \varepsilon \phi^2 C_D (1 + \mu_s \cdot C_L / C_D)$: 無次元限界掃流力であり、添字の“H”は水平床を意味する。式(3)の右辺第 2 項が限界掃流力の粘着力による増加分 $\Delta \tau_{*c}$ である。

2) 粘着力の評価

$\Delta \tau_{*c}$ を見積もるためには、 $k_1' d^2$ および f_c の評価が必要であり、ここでは前者について解析を進める。 $k_1' d^2$ を次式のように2つの部分に分けて表す。

$$k_1' d^2 = A_s \cdot n \quad (4)$$

ここに、 A_s : 粘土の付着した砂粒子の粘着抵抗面積、 n : 1つの砂粒子の接点数。

砂粒子表面に粘土が付着した状態のみかけの粒径を d' とし、図-1のような接触状態を考えると、接触面積 A_s は次式で与えられる。

$$A_s = \frac{\pi d^2}{4} \left\{ \left(\frac{d'}{d} \right)^2 - 1 \right\} \quad (5)$$

砂粒子の実質部分以外を全て空隙とみなしたときの空隙率を λ 、水だけの部分を空隙とみなした場合の空隙率を λ' とすると、次式を得る。(図-2 参照)

$$\left(\frac{d'}{d} \right)^3 = \frac{1-\lambda'}{1-\lambda} = 1 + \frac{\lambda-\lambda'}{1-\lambda} \quad (6)$$

したがって問題は d' または λ' をマクロな測定可能量で表すことに帰結する。粘土の含有率 p_f は、次のように定義される。

$$p_f = \frac{W_c}{W_s + W_c} = \frac{(\lambda - \lambda') \rho_c g}{\lambda \rho_s g + (\lambda - \lambda') \rho_c g} \quad (7)$$

ここに、 W_s : 単位体積中の砂粒子の重量、 W_c : 単位体積中の粘土の湿潤重量 (含水比 ω)、 ρ_c : 湿潤状態の粘土の見かけの密度である。

粘土の含水比の定義式(8)と W_c の定義式(9)から、粘土の見かけの密度は式(10)で与えられる。

$$\omega = \frac{W_w}{W_c} = \frac{\rho_w g V_w}{\rho_s g V_c} \quad (8)$$

$$W_c = (v_c + v_w) \rho_c g = (v_c \rho_s + v_w \rho) g \quad (9)$$

$$\frac{\rho_c}{\rho_s} = \frac{1 + \omega}{1 + \sigma \omega} \quad (10)$$

ここに、 v_w 、 W_w : 単位体積の粘土中の水分 (含水比 ω) の体積と重量、 v_c 、 W_c : 単位体積の粘土の乾燥状態での体積と重量、 $\sigma = \rho_s / \rho$ 。

式(7)(10)より λ' は次式のように表せる。

$$\frac{\lambda - \lambda'}{1 - \lambda} = \frac{1 + \sigma \omega}{1 + \omega} \frac{p_f}{1 - p_f} \quad (11)$$

したがって、 d' はマクロな測定可能量 (p_f , ω) で表現できて、 $\Delta \tau_{*c}$ は次式の

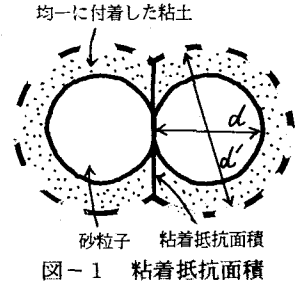


図-1 粘着抵抗面積

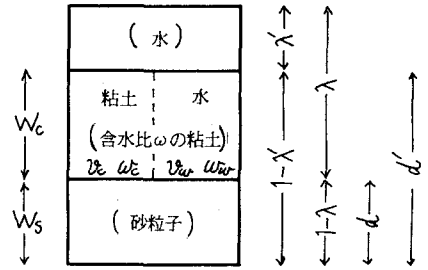


図-2 砂粒子のモデルと記号

ように表せる。

$$\Delta \tau_{*c} = \frac{3}{2} n \frac{f_c}{(\rho_s - \rho) g d} \left[\left\{ 1 + \frac{1 + \sigma \omega}{1 + \omega} \frac{p_f}{1 - p_f} \right\}^{2/3} - 1 \right] \frac{\tau_{*c, H}}{\mu_s} \quad (12)$$

$\Delta \tau_{*c}$ と p_f , ω の関係は、図-3 のように表せる。

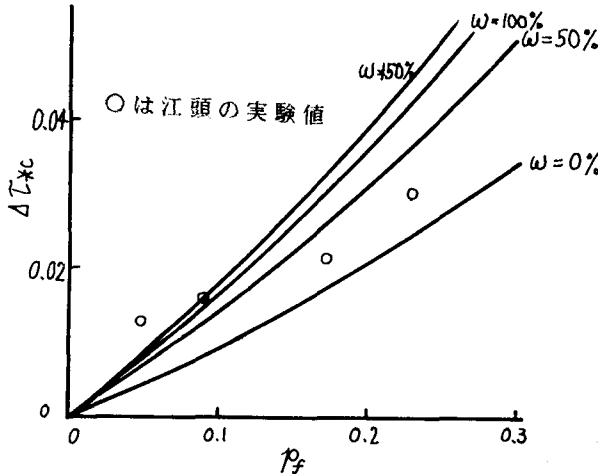


図-3 $\Delta \tau_{*c}$ と p_f

$$\frac{n f_c}{\mu_s} = 0.8$$

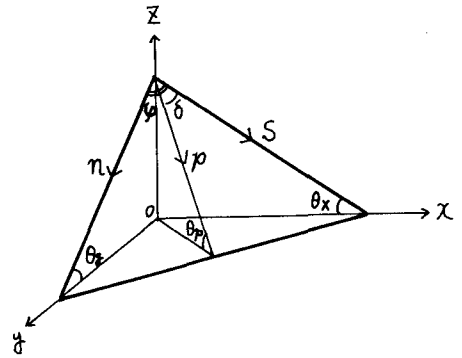


図-4 側岸斜面の模式図と座標形

3. 側岸において粘着力を受ける砂粒子の移動限界

次にこれを側岸に拡張してみる。図-4 のように x , y 方向に傾いた斜面上の砂粒子に働く力の釣合式は、次の2式で与えられる。

$$F_D + F_w \sin \theta_p \cos \delta = (\mu_s F_w \cos \theta_p + F_c) \cos \alpha \quad (13)$$

$$F_w \sin \theta_p \sin \delta = (\mu_s F_w \cos \theta_p + F_c) \sin \alpha \quad (14)$$

ここに、 θ_p : 最急勾配、 δ : s 軸と落下方向のなす角度、 α : F_D と $F_w \sin \theta_p$ の合力と s 軸のなす角度。

式(13)(14)から α を消去すると、次式を得る。

$$F_D = \mu_s F_w \left(\cos \theta_p + \frac{F_c}{\mu_s F_w} \right) \sqrt{1 - \frac{1}{\mu_s^2} \left(\frac{\sin \theta_p \sin \delta}{\cos \theta_p + \frac{F_c}{\mu_s F_w}} \right)^2} - F_w \sin \theta_p \cos \delta \quad (15)$$

ところで、最急勾配の定義より若干の演算の後、 $\sin \theta_p = \sqrt{\sin^2 \theta_x + \sin^2 \theta_y + 2 \sin^2 \theta_x \sin^2 \theta_y}$ を得る。ただし、 θ_y : 横断方向の河床勾配。水平床の場合と同様にして整理すると、次式を得る。

$$\tau_{*ccs} = \tau_{*c, H} (\cos \theta_x \cos \theta_y + \Omega) \sqrt{1 - \frac{1}{\mu_s^2} \left(\frac{\tan \theta_y}{1 + \Omega / \cos \theta_x \cos \theta_y} \right)^2} - \frac{\tau_{*c, H}}{\mu_s} \sin \theta_x \sqrt{1 + \sin^2 \theta_y} \quad (16)$$

ここに、 $\Omega = \Delta \tau_{*c} / \tau_{*c, H}$ 、 τ_{*ccs} の添字は、後側から側岸(slope)の粘着力を受ける(cohesive)限界掃流力(critical)を意味する。式(16)は $\cos \theta_x = 1$ 、 $\sin \theta_x = 0$ と近似して用いても実用上はほとんど差が無い。以下ではこの近似式によるものとする。また、式(16)で $\theta_y = 0$ とすると式(3)と一致する。

$\tau_{*ccs} / \tau_{*c, H}$ と θ_y の関係は図-5 のようになる。

4. 河岸侵食のモデル

現実の河岸は図-6 に示すような形状を保ったまま後退するように見える場合が少なくない。そこで、そのような仮定が成立する場合について、側岸の侵食(後退)速度について考察する。縦断方向には一様とすると、流砂の連続式は次式で与えられる。

$$\frac{\partial z}{\partial t} - \frac{1}{1-\lambda} \frac{\partial q_p}{\partial y} = 0 \quad (17)$$

ここに、 z : 局所河床高、 q_p : 横断方向流砂量であり、水路中央へ向かうものを正と定義した。図-6 の形状を保って後退すると $-dz = dy \tan \theta_1$ であり、横断方向の微分項を差分表現に書き直すと、式(17)は次式のようにになる。

$$\frac{dy}{dt} = - \frac{1}{1-\lambda} \frac{q_2 - q_1}{L \tan \theta_1} \quad (18)$$

ここに、 q_1 : 側岸脚部の横断方向流砂量、 $q_2 = (1-\lambda) \cdot D (dy/dt)$: 水面上方からの崩落量。

従って、河岸の侵食(後退)速度は式(19)のように与えられ、側岸脚部の横断方向流砂量が与えられればよいことになる。

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{1-\lambda} \frac{q_1}{(h+D)} \quad (19)$$

q_1 を与える式は多数あるが、ここではマイヤーピーターミラーの式を変形した次式を用いる。

$$q_p^* = \frac{q_p}{\sqrt{s g d^3}} = \frac{q_B}{\sqrt{s g d^3}} \cdot \tan \gamma$$

$$= 8 (\tau_* - \tau_{*ccs})^{1.5} \sqrt{\frac{1}{\mu_k \mu_s} \frac{\tau_{*ccs}}{\tau_*}} \tan \theta_1 \quad (20)$$

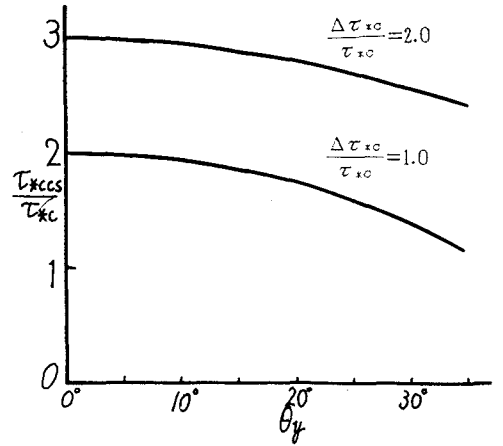


図-5 $\tau_{*ccs} / \tau_{*c, H}$ と θ_y

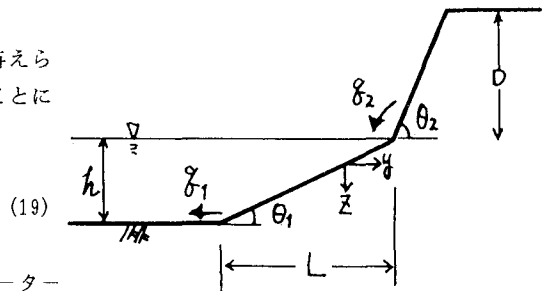


図-6 流路横断形と記号

ここに、 μ_s :動摩擦係数、 γ :砂粒子の運動と主流のベクトルの偏角。

図-7は、式(20)から求めた q_p^* と τ_* の関係を示す。また、図-8は横断方向流砂量式として式(20)を用いて求めた無次元侵食速度 $V_p^* = \frac{d(y/h)}{d(t \cdot (u_* / h))}$ の例である。

5. 混合粒径からなる側岸の侵食モデル

前節までの議論はいわゆる「1粒径モデル」であるが、次に混合砂を対象にした「多粒径モデル」への拡張を試みる。

この際の問題は、粒径別の限界掃流力をどのように表現するかにある。

まず、最も単純な $\theta_y = 0$ のケースを考えると、粒径別の限界掃流力 τ_{*cci} は次式のように表せる。

$$\tau_{*cci} = \left\{ \cos \theta_x - \frac{1}{\mu_s} \sin \theta_x + \Omega_m \frac{d_m}{d_i} \right\} \times \tau_{*ci} \quad (21)$$

ここに、 Ω_m :平均粒径 d_m に対する $\Delta \tau_{*c} / \tau_{*c}$ の値、 τ_{*ci} :粒径 d_i に対する無次元限界掃流力であり、Egiazaroffほかの評価式がある。図-9に τ_{*cci} と τ_{*ci} の関係を示す。

さらに、横断方向に傾きを有する場合は、次式のように書ける。

$$\tau_{*ccsi} = \tau_{*ci} (\cos \theta_y + \Omega_i) \times \sqrt{1 - \frac{1}{\mu_s^2} \left(\frac{\tan \theta_y}{1 + \Omega_i / \cos \theta_y} \right)^2} \quad (22)$$

ここに、 $\Omega_i = \Omega_m \cdot (d_m / d_i)$

したがって、横断方向の粒径別流砂量式は、次式のように書ける。

$$q_{pi}^* = 8p_i (\tau_{*i} - \tau_{*ccsi})^{1.5} \cdot \tan \gamma_i \quad (23)$$

ここに、 $\tan \gamma_i = \sqrt{\frac{1}{\mu_k \mu_s} \frac{\tau_{*ccsi}}{\tau_{*i}}} \tan \theta_y$ 、 p_i :河床表層に粒径 d_i の粒子が占める割合。図-10に q_{pi}^* と τ_{*i} の関係を示す。

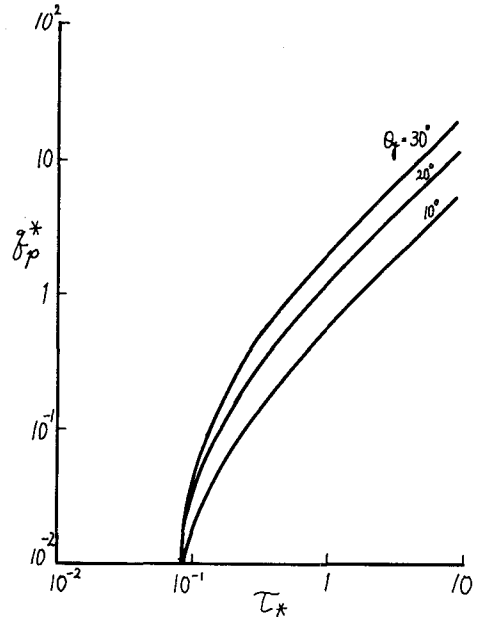


図-7 q_p^* と τ_*

$$\frac{\Delta \tau_{*c}}{\tau_{*c}} = 1.0$$

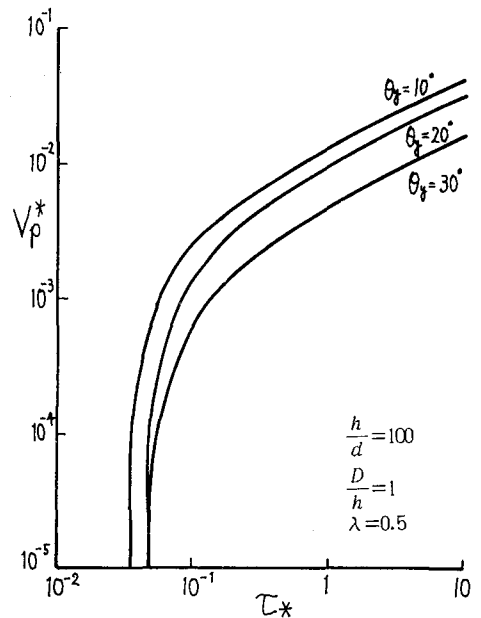


図-8 侵食速度

ところで、本モデルでは河岸表面の粒度組成は変化しない。従って、河岸の侵食速度は「1 粒径モデル」の場合と同様に全流砂の連続式を用いて評価することができる。

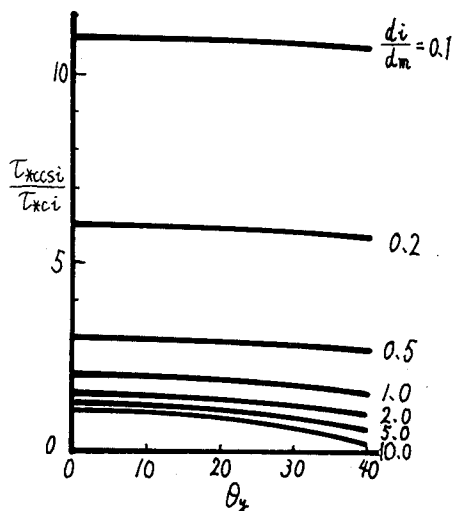


図-9 $\tau_{xcsi}^*/\tau_{csi}^*$ と θ_y

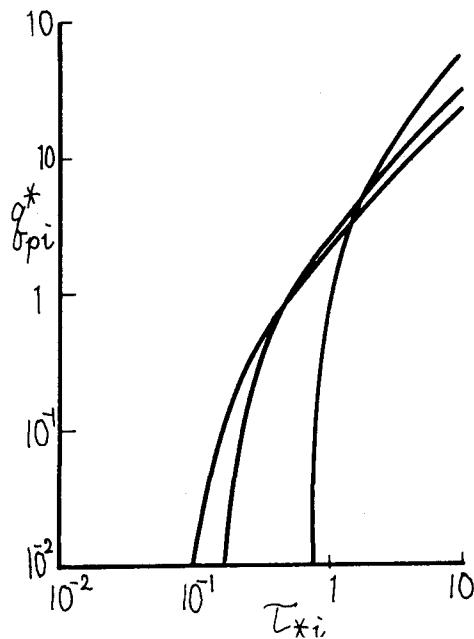


図-10 q_{pi}^* と τ_{xi}^*

6. 結論

本研究で得られた主要な結果を列挙すると次のとおりである。

- 1) 江頭らの「1 粒径モデル」による粘着力の評価に修正を加え、新たな評価式を提案した。
- 2) 粘着性を考慮した「1 粒径モデル」による河岸の侵食モデルと、侵食速度の評価式を提案した。
- 3) 2) のモデルを混合粒径場に拡張し、粘着性を考慮した「多粒径モデル」による河岸の侵食モデルと、侵食速度の評価式を提案した。

参考文献

- 1) 江頭進治、芦田和男、加本実：山地河道の侵食機構に関する研究、第27回水講演文集、1983
- 2) 長谷川和義：沖積蛇行の平面および河床形状と流れに関する水理学的研究、北大学位論文、1984