

II-24

非構造格子を用いた有限体積法による 河床変動計算法の研究

北海道大学 工学部 貢 連躍
北海道大学 工学部 正 員 森 明巨
北海道大学 工学部 正 員 板倉 忠興

1. はじめに

河床変動に伴って河道の通水能や、航路のためのみお筋が変化する。また、取水施設の機能低下をもたらしたりする。このため河床変動の予測法の開発は河川工学における重要な課題である。この様な河床変動を予測する最も実際的な方法は数値計算である。

一般に河道の平面形状は複雑である。この様な場合の一つの計算法は平面形状に合った座標系の採用であるが、汎用性に欠ける。河道の平面形状があまり複雑になると、座標系の取り方に大いに工夫を要する。このような問題に対しては非構造格子を用いる計算法が有力になる。非構造格子を用いると座標系によらずに計算点を任意に配列することができる。このため計算の途中で計算点を任意に加えたり取り除いたりして、計算精度の向上をはかることが簡単にできる。これは非構造格子を用いる計算法の大きな利点である。

非構造格子を用いた計算法の代表的なものは有限要素法(FEM)であるが、筆者ら¹⁾は有限体積法(FVM)を用いて良好な結果を得た。この時の要素分割はThiessen分割である。本研究ではこの計算法に河床変動計算を加えたもので、特に砂州の再現性に着目している。

直線水路の砂州を再現する計算スキームとして主流方向に風上差分、これに直交する方向に中央差分をとるものが提案されている²⁾。しかし、河道形状が複雑で、必ずしも主流方向が明確でない場合にはこの方法は使えない。例えば、水制がある場合には水制付近における主流方向は明確でない。この様な場合には方向によらず同じスキームを取る必要がある。本研究では一定巾直線水路について中央差分及び風上差分(1次精度TVD)を適用して、砂州の再現性を見たものである。

本報告で使われる主な記号

H : 水位, h : 水深, Z : 河床高, g : 重力の加速度, d : 河床材料の粒径, W_s : 砂粒の沈降速度, u, v : x, y 方向の垂線平均流速, n : マンニング粗度係数, u_* : 摩擦速度, S_a : 砂の水中比重, q_{br} : 平面上の単位幅流砂量, q_b : 斜面上の単位幅流砂量ベクトル, ν_t : 渦動粘性係数, U : 河床付近の流速ベクトル $U = u' i + v' j$, ν : 動粘性係数, λ : 空隙率 (≈ 0.4), ϕ : 流速係数 ($= \bar{U} / u_*$), τ_* : 無次元の河床せん断力

2. 基礎方程式

流砂の連続式、流れの連続式及び流れの運動方程式を(1)式与える。

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \nabla M = B + \nabla \Gamma \quad (1)$$

ここに、

$$\psi = \begin{bmatrix} (1-\lambda)Z \\ h \\ E \\ G \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} q_b \\ \mathbf{v} h \\ \mathbf{v} E + g h^2 \cdot \mathbf{i} / 2 \\ \mathbf{v} G - g h^2 \cdot \mathbf{j} / 2 \end{bmatrix}, \Gamma = \nabla \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \nu_t E \\ \nu_t G \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -gh \partial Z / \partial x - f E \\ -gh \partial Z / \partial y - f G \end{bmatrix}$$

$$E=uh, G=vh, f=gn^2\sqrt{u^2+v^2}/h^{4/3}, \mathbf{V}=u\mathbf{i}+v\mathbf{j}, \mathbf{q}_b=q_x\mathbf{i}+q_y\mathbf{j}$$

(1)式を面積分して、ガウスの定理を用いると(2)式が得られる。

$$\int_A \frac{\partial \psi}{\partial t} dA + \oint_l (M-\Gamma) \mathbf{n} dl = \int_A B dA \quad (2)$$

ここに、 $\mathbf{n}$ はAの外縁に外向きに直交する単位ベクトル。

斜面上の流砂量は(3)式で計算する。

$$\frac{\mathbf{q}_b}{q_{bf}} = \frac{1}{q} \left\{ \left[u' |\nabla F| - W_s \frac{Z_x}{|\nabla F|} \right] \mathbf{i} + \left[v' |\nabla F| - W_s \frac{Z_y}{|\nabla F|} \right] \mathbf{j} \right\} \quad (3)$$

ここに、 $|\nabla F| = [1+Z_x^2+Z_y^2]^{1/2}$

$$\Phi = \frac{q_{bf}}{\sqrt{s_d g d^3}} = 0.048 (\tau_* - \tau_{*c})^2 \phi^2 \frac{\sqrt{s_d g d}}{W_s} \quad (\text{岸、黒木の式}^{3)})$$

$$q = \alpha u_* , \alpha \approx 10.0 , u' = \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}} q , v' = \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}$$

$$\tau_* = n^2 (u^2 + v^2) / (s_d d h^{7/3})$$

$$W_s = \sqrt{s_d g d} \left(\sqrt{\frac{2}{3} + \frac{36\nu^2}{s_d g d^3}} - \frac{6\nu}{\sqrt{s_d g d^3}} \right)$$

3. 基礎方程式の離散化

計算領域をThiessen分割する。Thiessen分割は空間を(4)式に従って分割したもので、得られる図形をVoronoi図という。

$$V_n(P_i) = \bigcap_{i \neq j}^n [P \mid d(P_i, P) \leq d(P_j, P)] \quad (4)$$

ここに、 $d(P_i, P)$: P_i, P 間の距離

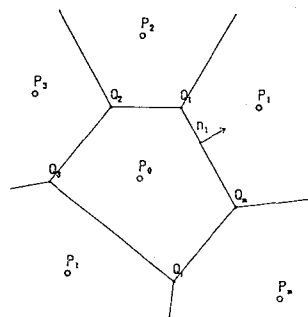


図-1

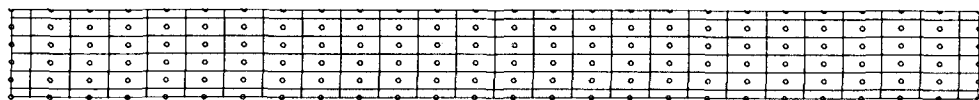


図-2(a)

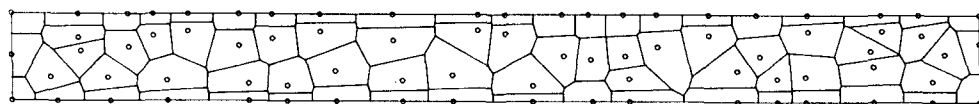


図-2(b)

(2)式を以下のように離散化する

左辺第2項のflux項はVoronoi辺上で評価する。各Voronoi辺上でflux一定として、(5)式で与える。

$$(M-\Gamma) \mathbf{n} d l = (M-\Gamma)_x d \tilde{y} - (M-\Gamma)_y d \tilde{x} \quad (5)$$

ここに、図-1の記号を用いると

$$\overrightarrow{Q_i Q_{i+1}} = \Delta \tilde{x} \mathbf{i} + \Delta \tilde{y} \mathbf{j}, \quad \Delta l_i = |\overrightarrow{Q_i Q_{i+1}}|$$

$$\overrightarrow{P_i P_j} = \Delta x \mathbf{i} + \Delta y \mathbf{j}$$

ϕ 及び B は要素内で一定とする。 Z_x, Z_y は周辺の Z を用いて最小二乗法で与える。以上をまとめると(2)式の離散化式は(6)式になる。

$$\frac{\psi_0^{n+1} - \psi_1^n}{\Delta t} A_0 + \sum_{i=1}^m \{ \delta_i M_0^n + (1 - \delta_i) M_1^n \} \mathbf{n}_i \Delta l_i + \sum_{i=1}^m \Gamma (\Delta \tilde{y} - \Delta \tilde{x}) = B A_0 \quad (6)$$

ここで、 $\delta_i = 0.5$ とおくと中央差分に相当する。また、

$$\delta_i = \begin{cases} 1 & (V_c \geq 0) \\ 0 & (V_c < 0) \end{cases}, \quad V_c = \frac{(M_i - M_0) \mathbf{n}}{\psi_i - \psi_0} \quad \text{とおくと、1次精度TVD差分で風上差分である。}$$

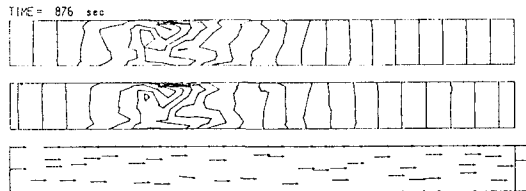
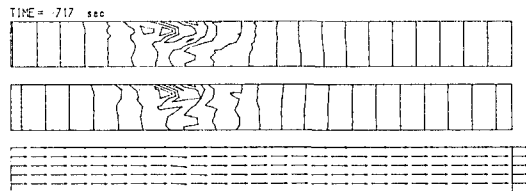
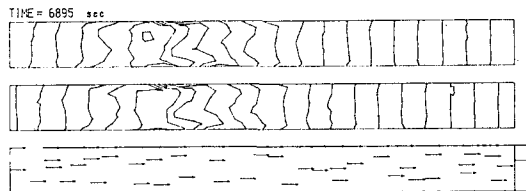
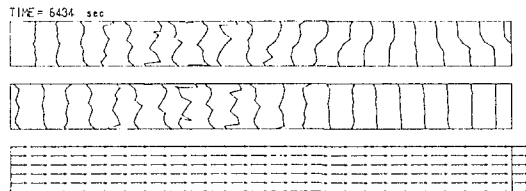
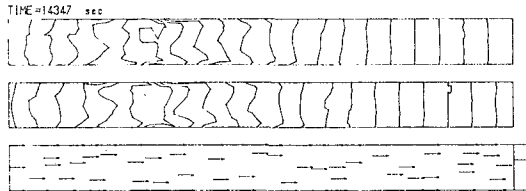
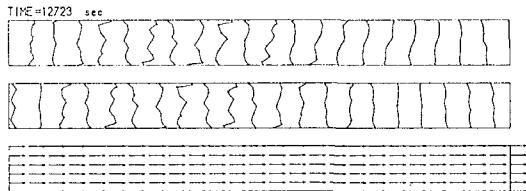


図-3

図-4

流れの計算には風上差分法を用いる。流砂の連続式には中央差分、風上差分の両者を用いて計算結果を比較する。時間の刻み Δt はCFL条件から(7)で与える。

$$\Delta t = \alpha_i \min \left[\frac{|\vec{P}_0 \cdot \vec{P}_i|}{(|\vec{V}| + \sqrt{gh})} \right], \quad \alpha_i = 0.5 \quad (7)$$

4. 河床変動の計算

計算に用いた流れは幅 0.9 m, 長さ 10 m, 矩形断面の直線流路で、勾配 0.0042, 水深 3.07 cm, 砂径 0.58 mm である。この条件では砂州の発生が確かめられている⁴⁾。通水初期に上流から3.4m、左岸から27cm地点に高さ1.4cmのマウンドをおいた。計算点の配列は図-2に示したa, bの2通りである。配列bは一様乱数を発生させて作った。図中の実線はThiessen分割である。

以下に計算結果をしめす。流れのベクトル図、水位等高線、河床等高線が一組になっており各図とも下からこの順になっている。左上の数値は通水開始からの経過時間である。

1) 中央差分

図-3はa配列における河床の変形過程である。左右岸が交互に高まりを持つ砂州的な河床形が見られるが、小規模的な攪乱が卓越している。b配列では図-4に示す様に砂州的な河床変化は不明で、小規模的な攪乱が卓越する。

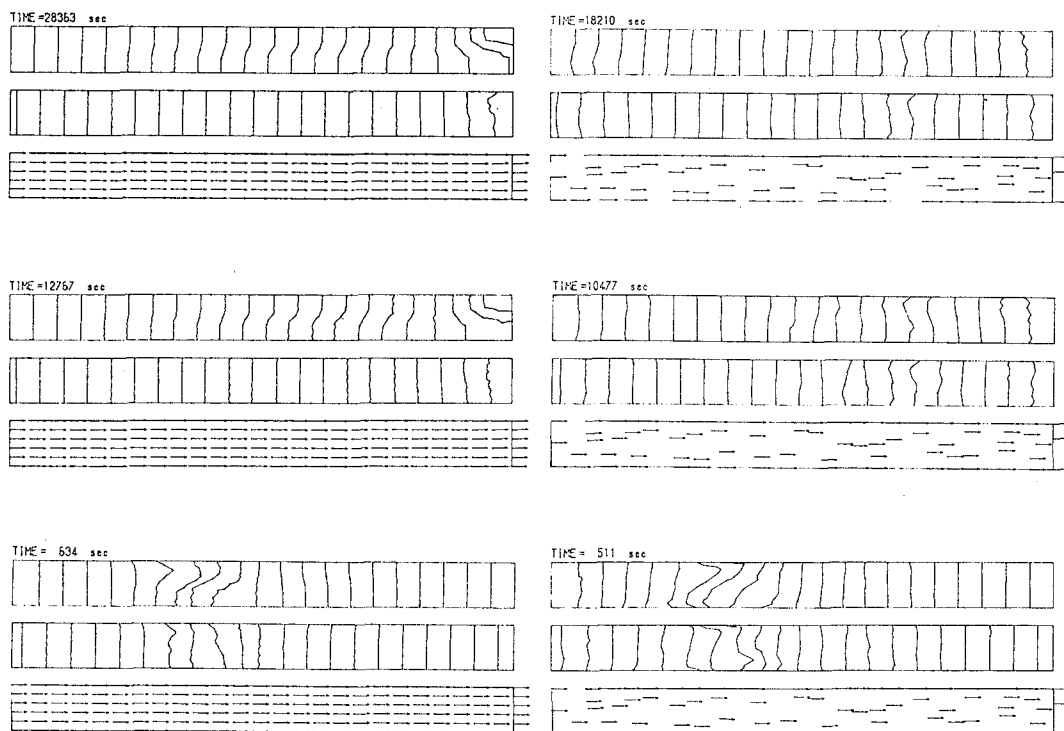
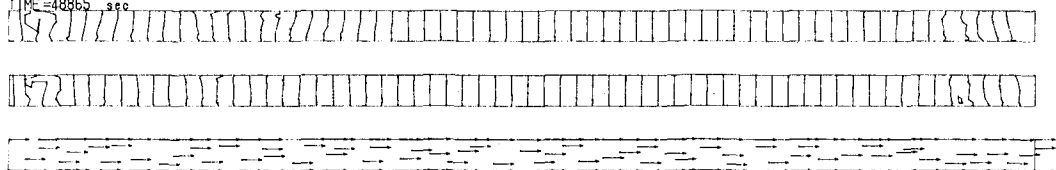


図-5

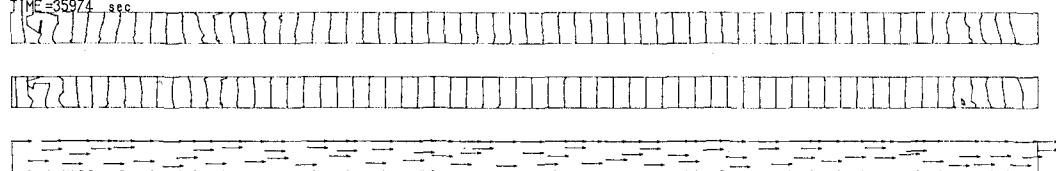
図-6



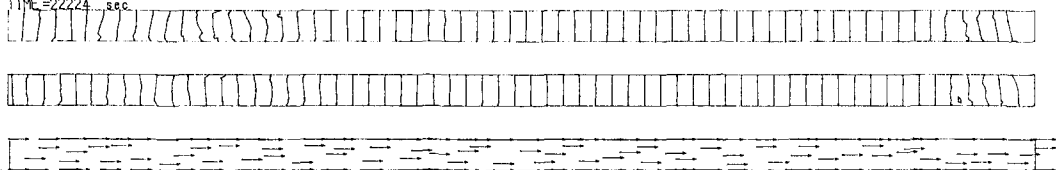
TIME=48865 .sec



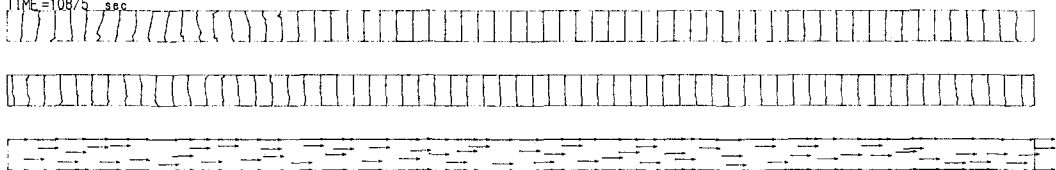
TIME=35974 .sec



TIME=22224 .sec



TIME=10875 .sec



TIME= 608 .sec

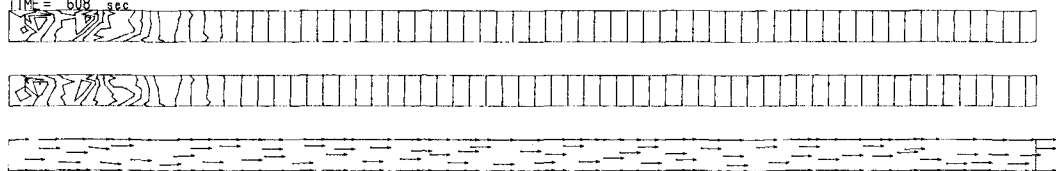


图-7

2) 風上差分

a配列では図-5に示す様に砂州状の河床変化が見られ、小規模の河床変化は発達しない。しかし、b配列では図-6に示す様にわずかに砂州的な河床変化が見られるが、はっきりしない。

上述の実験で用いられた実際の水路長は30mである。図-7はこれと同じ水路で乱数配列で計算したものである。砂州状の河床変化が認められる。

5. 結論

以上の計算結果によれば、中央差分は砂州を再現できる可能性はあるが、小規模河床波動的な攪乱が卓越するため採用できない。一方、風上差分では流路に沿った矩形格子配列のときは砂州的な河床変化が明瞭であるが、ランダム配列ではその特徴が弱まる。実際の計算においては両者の中間的な配列を取ることになるから、砂州的な河床変化の再現が可能であろう。更に、2次精度以上の風上差分を取れば砂州の再現性が高まるであろう。

参考文献

- 1) 森明巨、板倉忠興：非構造格子数値解析における風上差分，土木学会 第46回年次学術講演会講演概要集 第2部 P464-P465，1991年
- 2) 森明巨：弯曲流・蛇行流の三次元数値解法と河床変動の数値解法の研究，1990年
- 3) 岸力、黒木幹男：掃流砂量の研究，土木学会北海道支部 論文報告集 昭和49年度 P137-P142，1974年
- 4) 黒木幹男、岸力、板倉忠興：交互砂州の水理特性，文部省科学研究費 総合研究(A) 昭和48-49年度，積地河川における河床形態と流体抵抗の研究 P80-P88，1974年