

II-23

Duneの波高に関する理論的研究

北海道大学大学院 学生員 外山 雅昭
北海道大学工学部 正 員 黒木 幹男
北海道大学工学部 正 員 板倉 忠興

1. はじめに

移動床においてDuneが発生すると、粗度要素として流れの抵抗に大きく関係すると共に、河床の近くの流れを変えることにより流砂量にも影響を与える。したがってDuneの挙動、特にその波高を求めることは河川工学上の重要な課題の一つである。

これまでの研究では、線形理論を用いて解析が行われている。しかしながらこの理論では不安定領域におけるDuneの波高は時間と共に増大し、安定波高を理論的に求めることができない。

本研究は、この波高を理論的に決定することを目的とする。解析は流れ及び流砂の非線形性を考慮した非線形理論を用いて行った。

2. 流れの基礎式

2-1 基礎方程式

砂堆上の流れを、Fig. - 1のような座標系のもと、鉛直2次元せん断流(2D-V)モデルで表す。

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0 \quad (2.1)$$

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = gI - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \varepsilon \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right) \quad (2.2)$$

$$u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \varepsilon \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \right) \quad (2.3)$$

ここに、 u^*, v^* : x^*, y^* 方向の流速成分、 p^* : 圧力、 ρ : 流体の密度、 g : 重力加速度、 I : 平均河床勾配、 ε : 渦動粘性係数、 ξ : 水面波の波高、 η : 河床波の波高。

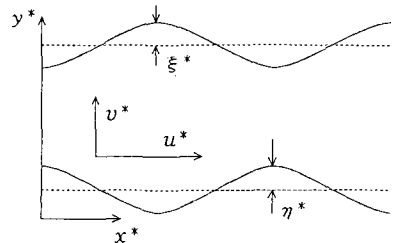


Fig - 1 座 標 系

2-2 境界条件式

x 軸に対する傾斜角 θ を持つ面における垂直応力 σ^* は、力のつりあいから次のように表される。

$$\sigma^* = \frac{1}{1 + \tan^2 \theta} (2\tau_{xy}^* \tan \theta + \sigma_x^* \tan \theta + \sigma_y^*) \quad (2.4)$$

せん断力 τ^* についても同様に、

$$\tau^* = \frac{1}{1 + \tan^2 \theta} \{ (\sigma_x - \sigma_y) \tan \theta + \tau_{xy} (1 - \tan^2 \theta) \} \quad (2.5)$$

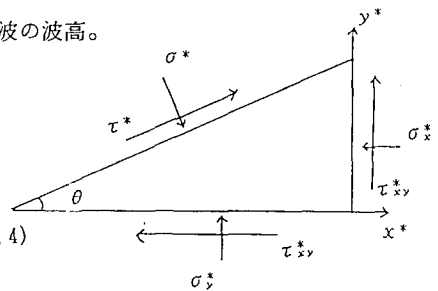


Fig - 2 力 の 釣 合 要 素

これに運動学的条件を加えることによって境界条件とする。

Theoretical study on wave height of dune

by Masaaki TOYAMA, Mikio KUROKI and Tadaaki ITAKURA

2-3 無次元化

平均水深 D_0 、平均摩擦速度 U_* を用いて全ての変量を次のように無次元化する。

$$x = x^*/D_0, \quad y = y^*/D_0, \quad \xi = \xi^*/D_0, \quad \eta = \eta^*/D_0, \quad u = u^*/U_*, \quad v = v^*/U_0$$

$$p = p^*/(\rho U_*^2), \quad \sigma = \sigma^*/(\rho U_*^2), \quad \tau = \tau^*/(\rho U_*^2), \quad Re = \frac{U_* D_0}{\varepsilon}$$

2-4 砂堆形状と変動量の形

実際の砂堆の形状は多くの周期の合成波として表されるが、本研究では次式のように第2高調波までの2成分モデル、さらに2成分とも同じオーダーとして解析を試みる。

$$\eta = a_1 \eta_1 = a_1 (\eta_{11} + \eta_{12}) = a_1 (\hat{\eta}_{11} e^{ik(x-ct)} + \hat{\eta}_{12} e^{2ik(x-ct)} + c.c.) \quad (2,6)$$

ここに、 a_1 ：河床波の無次元振幅、 $\hat{\eta}_{11}, \hat{\eta}_{12}$ ：河床波の形状を与える無次元定数、 k ：無次元波数

c ：河床波の無次元移動速度、 t ：無次元時間

これに対応させて各変量の平均量及び変動量を表すと

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ p \\ \xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0 \\ 0 \\ p_0 \\ 0 \end{bmatrix} + a_1 \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ p_1 \\ \xi_1 \end{bmatrix} + a_1^2 \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ p_2 \\ \xi_2 \end{bmatrix} \quad (2,7)$$

a_1 のオーダーの変量は、次に例示するように表される。

$$a_1 u_1 = a_1 (u_{11} + u_{12}) = a_1 (\hat{u}_{11}^*(y) \hat{\eta}_{11} e^{ik(x-ct)} + \hat{u}_{12}(y) \hat{\eta}_{12} e^{2ik(x-ct)} + c.c.) \quad (2,8)$$

a_1^2 のオーダーの変量は、 a_1 のオーダーと同形のもの他に、定数項、 $e^{3ik(x-ct)}$ 及び $e^{4ik(x-ct)}$ を含む項が現れるが、これらのモードは減衰するはずでありここでは考えない。従って、 a_1^2 のオーダーは次に例示するように表される。

$$a_1^2 u_2 = a_1^2 (u_{21} + u_{22}) = a_1^2 \left[\hat{u}_{21}(y) \hat{\eta}_{11}^* \hat{\eta}_{12} e^{ik(x-ct)} + \hat{u}_{22}(y) \hat{\eta}_{12}^2 e^{2ik(x-ct)} + c.c. \right] \quad (2,9)$$

2-5 基礎方程式及び境界条件式（無次元）

基礎方程式及び境界条件式を、無次元化の後 a_1 のオーダー毎に整理する。ここでは、 a_1^2 のオーダーについてのみ示すと次のようになる。

基礎方程式

$$u_0 \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{du_0}{dy} v_2 + \frac{\partial p_2}{\partial x} - \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} \right) = -u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} - v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} \quad (2,10)$$

$$u_0 \frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{\partial p_2}{\partial y} - \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} \right) = -u_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} - v_1 \frac{\partial v_1}{\partial y} \quad (2,11)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = 0 \quad (2,12)$$

境界条件式

$$p_2 + \frac{d p_0}{d y} \xi_2 - \frac{2}{Re} \left(\frac{\partial v_2}{\partial y} - \frac{d u_0}{d y} \frac{\partial \xi_2}{\partial x} \right) \quad (2,13)$$

$$= -\frac{2}{Re} \left\{ \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} \xi_1 - \frac{d^2 u_0}{d y^2} \frac{\partial \xi_1}{\partial x} \xi_1 - \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) \frac{\partial \xi_1}{\partial x} \right\} \\ + \frac{1}{2} \frac{d^2 p_0}{d y^2} \xi_1^2 - \frac{\partial p_1}{\partial y} \xi_1 \quad ; y=1$$

$$v_2 - u_0 \frac{\partial \xi_2}{\partial x} = u_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial y} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \xi_1 + \frac{d u_0}{d y} \xi_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial x} \quad ; y=1 \quad (2,14)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{d^2 u_0}{d y^2} \xi_2 = - \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial y} \right) \xi_1 + 2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) \frac{\partial \xi_1}{\partial x} \quad (2,15) \\ - \frac{1}{2} \frac{d^3 u_0}{d y^3} \xi_1^2 + 2 \frac{d u_0}{d y} \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x} \right)^2 \quad ; y=1$$

$$v_2 = u_1 \frac{\partial \eta_1}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \eta_1 + \frac{d u_0}{d y} \frac{\partial \eta_1}{\partial x} \eta_1 \quad ; y=0 \quad (2,16)$$

$$f u_0 u_2 - \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) \\ = -\frac{f}{2} \left[u_1^2 + v_1^2 + 2 \left(u_0 \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{d u_0}{d y} u_1 \right) u_1 - \left\{ \left(\frac{d u_0}{d y} \right)^2 + u_0 \frac{d^2 u_0}{d y^2} \right\} \eta_1^2 \right] \\ + \frac{1}{R} \left\{ \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial y} \right) \eta_1 + \frac{1}{2} \frac{d^3 u_0}{d y^3} \eta_{12} - 2 \left(\frac{u_0}{d y} \frac{\partial \eta_1}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) \frac{\partial \eta_1}{\partial x} \right\} \\ ; y=0 \quad (2,17)$$

3. 流れの解析

基礎方程式及び境界条件式を各モード毎に整理し、各変量を求める。

3-1 平均流の解析

平均流の解は容易に求められる。結果だけを示すと次のようになる。

$$u_0 = U_s - \frac{Re}{2} (1-y)^2 \quad (3,1)$$

$$p_0 = (1-y) / I \quad (3,2)$$

ここに、 U_s ： 無次元平均水面流速

3-2 11モード、12モードの変動量の解析

11モードの基礎方程式から、 $\hat{u}_{11}$ 、 $\hat{p}_{11}$ を消去すると

$$\frac{d^4 \hat{v}_{11}}{d y^4} + A_1 \frac{d^2 \hat{v}_{11}}{d y^2} + A_2 \hat{v} = 0 \quad (3,3)$$

$$\text{ここに、} A_1 = -k (i Re u_0 + 2k) \text{、} A_2 = k \left(i Re \frac{d^2 u_0}{d y^2} + i k^2 Re u_0 + k^3 \right)$$

この式の係数 A_1 、 A_2 には、 $u_0(y)$ を含むので厳密解を得ることは困難である。よって、ここでは $u_0(y)$ を定数として扱うことによって近似解を求めると

$$\hat{v}_{11} = C_1 e^{\lambda_{11} y} + C_2 e^{\lambda_{12} y} + C_3 e^{\lambda_{13} y} + C_4 e^{\lambda_{14} y} \quad (3,4)$$

$$\text{ここに、}\lambda_{11}=\left[\frac{1}{2}\{A_1+(A_1^2-4A_2)^{\frac{1}{2}}\}\right]^{\frac{1}{2}}, \quad \lambda_{13}=\left[\frac{1}{2}\{A_1-(A_1^2-4A_2)^{\frac{1}{2}}\}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$\lambda_{12}=-\lambda_{11}$, $\lambda_{14}=-\lambda_{13}$, $C_1\sim C_4$: 積分定数。

定数 $C_1\sim C_4$ は 1 1 モードの境界条件より求められる。

1 2 モードにおいても同様にして解が求められる。

3-3 2 1 モード、2 2 モードの変動量の解析

1 1 モードと同様にして近似解を求めると、次式を得る。

$$\hat{v}_{21}=E_1 e^{\lambda_{11}y}+E_2 e^{\lambda_{12}y}+E_3 e^{\lambda_{13}y}+E_4 e^{\lambda_{14}y} \quad (3, 5)$$

$$+\frac{Re}{2}\sum_{i=1}^4\left[\sum_{j=1}^4\frac{D_i C_j^* Q_{ij} e^{q_{ij}y}}{(q_{ij}^2-\lambda_{11}^2)(q_{ij}^2-\lambda_{13}^2)}\right]$$

ここに、 $q_{ij}=\lambda_{2i}+\lambda_{1j}^*$, $Q_{ij}=\{(\lambda_{2i}+\lambda_{1j}^*)(\lambda_{2i}-\lambda_{1j}^*)-3k^2\}(\lambda_{2i}+2\lambda_{1j}^*)$ 、

$E_1\sim E_4$: 積分定数、 D_i : 1 2 モードにおける積分常数、 λ_{1j}^* : λ_{1j} の共役複素数、

C_j^* : C_j の共役複素数。

2 2 モードについても同様である。

4. Duneの解析

4-1 流砂の連続式

流砂の連続式に 3 章の結果を代入することにより、Duneの波高の決定方程式を得る。

無次元化した流砂の連続式は次のように表される。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0 \quad (4, 1)$$

ここに、 Φ は無次元流砂量で、マイヤーピーター・ミュラーの式を用いる。ただし、流砂量とせん断力の間には無次元遅れ距離 δ を考える。

これにより、各モードにおける流砂についての変動量は、次のように表される。

$$\hat{\tau}_{11}=f u_0\left(\frac{d u_0}{d y}+\hat{u}_{11}\right) \quad (4, 2)$$

$$\hat{\tau}_{12}=f u_0\left(\frac{d u_0}{d y}+\hat{u}_{12}\right) \quad (4, 3)$$

$$\begin{aligned} \hat{\tau}_{21}=2 f\left[\left(\hat{u}_{11}^*+\hat{u}_{12}\right) \frac{d u_0}{d y}+\frac{d \hat{u}_{12}}{d y} u_0+\frac{d \hat{u}_{11}^*}{d y} u_0+\frac{d^2 u_0}{d y^2} u_0\right. \\ \left.+\left(\frac{d u_0}{d y}\right)^2+\hat{u}_{21} u_0+\hat{u}_{11}^* u_0+\hat{u}_{11}^* \hat{u}_{12}+\hat{v}_{11}^* \hat{v}_{12}\right] \end{aligned} \quad (4, 4)$$

$$\hat{\tau}_{22}=f\left[2 \frac{d \hat{u}_{11}}{d y} u_0+\frac{d^2 u_0}{d y^2} u_0+\left(\frac{d u_0}{d y}\right)^2+2 \frac{d u_0}{d y} \hat{u}_{11}+2 u_0 \hat{u}_{22}+\hat{u}_{11}^2+\hat{v}_{11}^2\right] \quad (4, 5)$$

$$\hat{\Phi}_{11}=\frac{3}{2} B T \hat{\tau}_{11} \quad (4, 6)$$

$$\hat{\Phi}_{12}=\frac{3}{2} B T \hat{\tau}_{12} \quad (4, 7)$$

$$\hat{\Phi}_{21}=\frac{3}{2} B T \hat{\tau}_{21}+\frac{3}{4} \frac{B}{T} \hat{\tau}_{11}^* \hat{\tau}_{12} \quad (4, 8)$$

$$\hat{\Phi}_{22} = \frac{3}{2} B T \hat{\tau}_{22} + \frac{3}{8} \frac{B}{T} \hat{\tau}_{11}^2 \quad (4, 9)$$

ここで、 $T = \tau_{b0} - A$ 、 τ_{b0} ：河床における無次元平均せん断力、 A ：無次元定数。

4-2 Duneの波高の決定方程式

式(4,1)に各変量を代入し各モード毎に整理することにより、次式を得る。

$$\frac{\partial a_1}{\partial t} - i k c a_1 + i k (\hat{\Phi}_{11} + \hat{\Phi}_{21} \hat{\eta}_{12} a_1) a_1 \Delta = 0 \quad (4, 10)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\hat{\eta}_{12} a_1) - 2 i k c \hat{\eta}_{12} a_1 + \frac{1}{2} i k (4 \hat{\Phi}_{12} \hat{\eta}_{12} + \hat{\Phi}_{22} a_1) a_1 \Delta^2 = 0 \quad (4, 11)$$

ここに、 $\Delta = e^{-ik\delta}$ 。

これらの式を実部と虚部に分けて得られる4本の方程式により、河床波の第1モードの振幅 a_1 、第2モードの振幅 a_2 、それらの位相差 ϕ 、移動速度 c を求めることができる。この時、 a_2 、 ϕ は次のように表される。

$$a_2 = 2 a_1 |\hat{\eta}_{12}| \quad (4, 12)$$

$$\phi = -\arg(\hat{\eta}_{12}) \quad (4, 13)$$

4-3 解析結果の検討

前節の方程式系(4,10-11)を解けば、原理的には c 、 a_1 、 a_2 、 ϕ の時間変化を求めることができるが、構造が複雑で簡単には解が求められそうにない。

ここでは解の性質を明らかにするために、定常状態についての解析を行うものとする。

非線形解析による定常解については、式(4,10-11)において時間微分の項を落とし整理することによって c についての2次方程式を得ることができる。したがって、与えられた水量量に対して2価となることが有り得ることとなる。

Fig-3-6 は計算結果の一例であり、 $I = 1/1000$ 、 $Fr = 0.38$ 、($D_0/d = 1000$) の場合を示す。 $k = 0.1 \sim 0.4$ 付近において、 c 、 ϕ 共に値が安定しており、また a_1 、 a_2 についてもそれぞれ 0.05、0.03 程度といった安定した値が得られ、実際の事象とも合致するものと思われる。

しかしながら値が発散する点、あるいは値が求められない点等も見受けられる。 今後は、これらの結果が実際の事象とどのように結び付けられるのかといったようなことを、実験値との比較を行いながら検討していくことが必要である。

参考文献

- 1) 林泰造・大西光陽：河床安定理論の立場からみた小規模河床波の発生について
第23回水理講演会論文集、1977
- 2) 砂州の発達過程に関する基礎的研究、北大委託研究報告、昭和62年
- 3) 砂州の形状特性と流れに関する研究、北大委託研究報告、平成元年
- 4) 砂堆(Dune)の波高に関する基礎的研究、北大委託研究報告、北海道開発局、平成元年

