

II-10

横拡散効果を考慮した水制の流れ場における後流モデル

北海道大学 正員 長谷川和義
北海道大学大学院 学生員 柿崎恒美
北海道開発局 正員 吉田義一

1. はじめに

水制を配置した流れ場を流下方向と水深方向に着目してみた場合、構造物背後の流れの性質がWake流の性質を呈していることは古くから知られている。つまり、Wake流の理論式¹⁾に水制ブロックの持つ C_D 値を与えれば流況がある程度把握できる。しかしながら、従来の研究ではWake流の性質を積極的に応用したものが少ない。また、横断方向の流れ場に注目すると、水制が水路幅の一部分に配置されているので、流速は横断方向に分布形を持つ。これは、水制が配置されている側(水制域)と、配置されていない側(主流域)の速度差により両者の境界面で、横断方向運動量輸送が起り、横拡散が発生するためである。

水制を配置した流れ場は明かに3次元的であり、したがって、解析的にその解を求めることは不可能に思われる。しかしながら、流れ場を鉛直方向と水平方向に区分して考え、鉛直方向に関しては抵抗係数 C_D 値を、水平方向に関しては横拡散係数 ϵ_y を用いれば解析的な取扱いが考えられる。ここでは、実験により ϵ_y の性質を考察し、さらに上述のような考えに立ち3次元的に配置された構造物周り流れ場の定式化を試みてみた。

2. 模型組ブロックによる実験

幅 $B=40$ (cm)、長さ $L=4.7$ (m)の水路を用い、水路床には塩化ビニール板を隙間なく敷き詰め、その上に直径4mm程度の砕砂を粗度として張り付け固定床実験をおこなった。水路の上流端から下流端まで全長に渡って高さ2.5(cm)、幅5(cm)の透過水制の1/50のブロック模型を組み合わせ、水路の左岸側壁に沿って図-1に示すように16基の連続水制モデルとして設置し、左岸側壁から突き出した水制の先端までの区間を水制域とした。流れが平衡に達していると思われる上流側から10基目と11基目のブロックの間について流下方向の流速を測定した。測定は数断面についておこない1基の水制が流れに及ぼす影響を詳細に測定した。各実験の実験条件は表-1に示されている通りである。測定にはパソコン制御自動トラバース付きレーザー・ドップラー流速計を用いた。

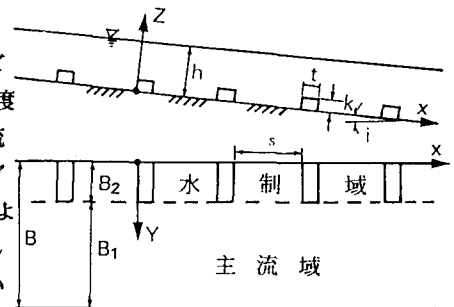


図-1 水制を配置した河道の概略
と座標軸の定義図

表-1 実験の主要水理量

実験 No.	Q (l/s)	h (cm)	I	u_m (cm/s)	u_x (cm/s)	Fr	$Re^{(1)}$	$Re^{(2)}$
Run (1)	11.67	7.00	1/333	41.67	4.54	0.50	29169	37503
Run (2)	5.63	4.52	1/247	31.14	4.23	0.47	7785	34254
Run (3)	3.07	5.06	1/790	15.17	2.50	0.22	3793	16687
Run (4)	8.19	4.70	1/153	43.56	5.49	0.64	10890	47916
Run (5)	8.19	4.54	1/153	45.10	5.39	0.68	11275	49610
Run (6)	2.40	4.56	1/1035	13.16	2.08	0.20	3290	14476

※ Q =平均流量、 h =平均水深、 u_m =平均流速、 Fr =フルード数、また、 $Re^{(1)}$ 、 $Re^{(2)}$ はレイノルズ数でそれぞれ次のように定義する。

Study on the velocity field around groins considering the effect of lateral momentum diffusion.
By Kazuyoshi HASEGAWA, Tsunemi KAKIZAKI, and Giichi YOSHIDA

$$Re^{(1)} = \frac{u_m h}{\nu} \quad Re^{(2)} = \frac{u_m B_2}{\nu} \quad \text{ここで、} B_2 = \text{水制長、} \nu = \text{粘性係数}$$

3. 実験結果

(1) セン断力分布の特徴

水制の流れ場に作用している河床せん断力と横断方向の運動量輸送による横せん断力を、流速の実測値から算定してみた²⁾。河床せん断力の算定には、粗面に関する対数則を仮定し、摩擦速度 (u_*) と粗度 (k_s) を未知数として最小2乗法により u_* を求めた。この方法は流速分布が対数則に従わない水制域には適応できないが、水制域も同様の計算をした (ただし、誤差の大きい点は除いた)。また、横せん断力の算定には等流速線図を描き、面積法^{3) 4)} を用いることにした。面積法は、2次流の無視できることが前提条件である。本実験の場合、厳密には水深の横断方向の変化 $dh/dy=0$ とは言い難く、したがって2次流の存在が否定できないが、近似的な値は得られると思われる。図-2, 3は上述の方法に従って求めた τ_o (u_*) と τ_y (水深方向に平均している。) の横断方向の分布である。河床せん断力は水制域と主流域の境界付近で極小となり、横せん断力はこの領域で極大になっている。このことは、この境界付近の流体に働く重力の斜面方向成分の大部分が、運動量の横断拡散による横せん断力とバランスしており、河床せん断力の受け持ち分が減少していることを意味している。

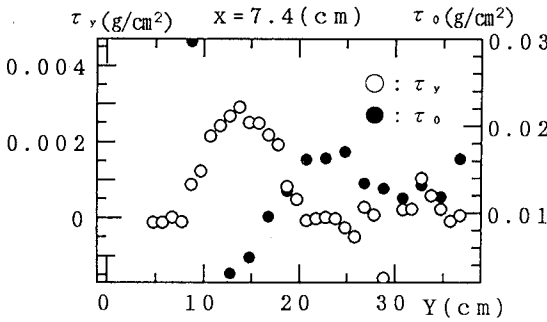


図-2 河床せん断力と横せん断力の横断分布(Run1)

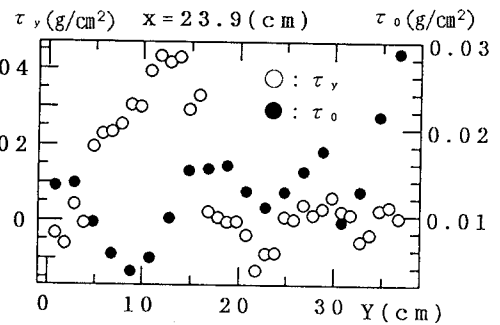


図-3 河床せん断力と横せん断力の横断分布(Run1)

(2) 横断方向拡散係数 (ϵ_y) の評価

次に、実測の u_m (水深平均流速) と面積法により求められた τ_y を (cm^2/sec) $\tau_y = \epsilon_y du_m/dy$ に代入し差分により ϵ_y を求めてみた。図-4は ϵ_y の横断方向の変化を見たものである。これらの値は粗面の横拡散係数として知られる $\epsilon = \alpha h u_*$ ($\alpha=0.13$)⁵⁾ よりも小さな値であり、対数則からの縦拡散 $\epsilon = (1/6) \kappa h u_*$ に近い値となった。

4. Wake流を使った流れのモデル化

水制場の流れは本来3次元的なものであるが、ここでは流れを解析的に扱いやすくする目的で、2次元浅水方程式をもとにして解析的に解くことにする。座標軸を図1のように選べば基礎式は以下のようになる。

$$u_m \frac{\partial u_m}{\partial x} + v_m \frac{\partial u_m}{\partial y} = g \left(i - \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\epsilon_y \frac{\partial u_m}{\partial y} \right) - \frac{\tau_x}{\rho h} \quad (1)$$

$$0 = \frac{\partial h}{\partial y} \quad (2)$$

$$\frac{\partial u_m}{\partial x} + \frac{\partial v_m}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

(添え字 m は水深平均された量を示す。)

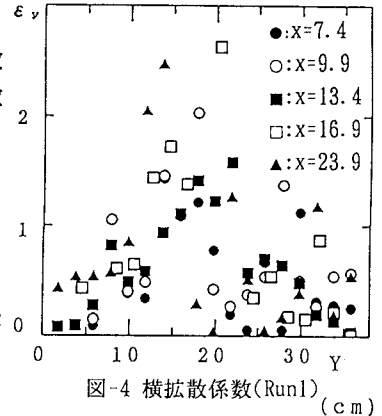


図-4 横拡散係数(Run1)

池田・泉⁵⁾は側岸部に植生を有する河川の安定横断面形状の摂動解を得ている。水制場の流れも側岸部に抵抗を有する流れであるが、植生のように抵抗が一樣ではなく局所的であり、問題はより一層に複雑である。この問題を解決するために、Wake流（水制域）と対数則（主流域）を水深方向の流速分布の0次近似解として与え、水制ブロックによる横拡散効果を積極的に考慮することにする。

(1) 主流域の解

主流域の水深方向の速度分布の0次近似解として対数則を与える。

$$u_m = \varphi u_{x1} f(\eta_1) \quad (4) \quad v_m = 0 \quad (5) \quad \text{ただし、} \eta_1 = (y - B_2)/B_1$$

f は横断方向の速度分布を示しており、 φ は $f=1$ （水制のない状態）における流速係数である。対数則を仮定していることから河床せん断力は $\tau = \rho u_{x1}^2 f(\eta_1)^2$ で与えられ、また拡散係数は $\varepsilon_y = \alpha h u_{x1}$ と仮定する。水深に関する微分量を無視して浅水方程式に (4) 式・(5) 式を代入すれば次式が得られる。

$$1 + \mu f'' - f^2 = 0 \quad (6) \quad \text{ただし、} \mu = \varphi \alpha (h/B_1)^2$$

式 (6) は f に関する常微分方程式であるが、非線形項を含んでいるために、このままでは解析的な取扱は不可能である。ところで、式 (6) の第1項と第3項はそれぞれ重力による外力成分と河床せん断力を示しており、水制による効果は第2項の拡散項によって示されている。そこで、水制が存在しない場合 ($f=1$) の解を0次近似解として与え、摂動法により水制による拡散効果を徐々に解に取り込むこととする。いま、 $(h/B_1)^2$ が微小であれば μ は微量量となり得るので、 μ を摂動パラメーターとし、(6) 式の f を漸近展開すれば、

$$f = f_0 + \mu f_1 + \mu^2 f_2 + \dots \quad (7)$$

と表されることが期待される。式 (7) を式 (6) に代入し μ^0 、 μ^1 のオーダーに対して次式が得られる。

$$\mu^0 \text{次オーダー: } 1 - f_0^2 = 0 \quad (8) \quad \mu^1 \text{次オーダー: } f_0'' - 2f_0 f_1 = 0 \quad (9)$$

式 (8)、(9) の解として $f=1$ が得られる。この解は式 (6) の1つの厳密解となっているが、式 (6) の μ の1次以上のオーダーの項、つまり横拡散項を無視したことに対応している。式 (6) の第2項が他の項と同じオーダーになるように特異摂動法^{5) 6)}に従い、内部変数 $p_1 = \eta_1 / \mu^{1/2}$ を導入する。この時、式 (6) は式 (10) となる。

$$1 + f'' - f^2 = 0 \quad (10) \quad f = \tilde{f}_0 + \mu \tilde{f}_1 + \mu^2 \tilde{f}_2 + \dots \quad (11)$$

式 (10) に f の内部漸近展開 (式 (11)) を代入すると μ^0 、 μ^1 のオーダーに対して次の方程式が得られる。

$$\mu^0 \text{次オーダー: } 1 + \tilde{f}_0'' - \tilde{f}_0^2 = 0 \quad (12) \quad \mu^1 \text{次オーダー: } \tilde{f}_1'' - 2\tilde{f}_0 \tilde{f}_1 = 0 \quad (13)$$

式 (12) の1つの厳密解は $\tilde{f}_0 = 1$ であるので、これを用いて式 (13) を解くと一般解は次の様になる。

$$f_1 = c_1 \exp(-\sqrt{2} p_1) + c_2 \exp(\sqrt{2} p_1) \quad (14)$$

内部解は $p_1 \rightarrow \infty$ では外部解に接続されるので $c_2 = 0$ となり、主流域の浅水流は結局次のようになる。

$$u_{m10g} = u_{x1} [1 + \mu c_1 \exp(-\sqrt{2} p)] \quad (15)$$

(2) 水制域の解

この領域にはWake流を0次近似解として仮定する。ただし、H. SchlichtingによるWake流の解析解 (式 (16)) は無限境界での解であり、したがって開水路流れに適応する場合には重力と自由水面の効果を考慮しなければならない。また、式 (16) は連続式としてWake流の欠損速度の項を無視しており、有限境界の場合この点を補正する必要がある。

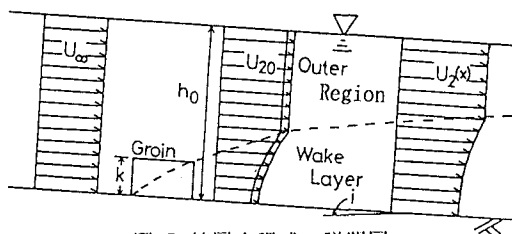


図-5 外層方程式の説明図

$$\frac{u}{u_z} = 1 - \frac{\sqrt{10}}{18\beta} \left(\frac{x}{C_D d} \right)^{-\frac{1}{2}} \left\{ 1 - \left(\frac{z}{b} \right)^{\frac{3}{2}} \right\}^2 \quad (16) \quad \text{ここで、} b(x) = \sqrt{10} \beta (x C_D d)^{\frac{1}{2}}$$

連続性の解決法として最も単純な方法は、接近流速とWake流の水深平均流速の差をWake流にすり付けることである。また重力効果はWake流の外層に働くことと仮定することにした。Wake流の外層の流速を $u_2 = u_2(x)$ とし、(x-z)系の運動方程式 (17) 式) に (16) 式を代入し水深で積分すると (18) 式の微分方程式が得られる。

$$\int_0^h \frac{\partial u^2}{\partial x} dz + \int_0^h \frac{\partial(uW)}{\partial z} dz = \int_0^h g \left(i - \frac{\partial h}{\partial x} \right) dz + \frac{1}{\rho} \int_0^h \frac{\partial \tau}{\partial z} dz \quad (17)$$

$$2A \text{Fr}^2 \lambda C_D \zeta^{\frac{3}{2}} \zeta^{\frac{5}{2}} u^5 + 2 \text{Fr}^2 \lambda C_D \left(1 - B C_D^{-\frac{1}{2}} \zeta^{\frac{1}{2}} \right) u^4 u' - \text{Fr}^2 u^3 u' - u' + 2 i u^2 = 0 \quad (18)$$

$$A = \frac{3\sqrt{10}}{616\beta}, \quad B = \frac{3}{154\beta}, \quad \zeta = \frac{x}{d}, \quad \lambda = \frac{k}{h_0}, \quad \text{Fr}^2 = \frac{u_{20}}{gh_0}, \quad u = \frac{u_2(x)}{u_{20}}$$

ここで、 h_0 、 u_{20} は $\zeta=0$ における水深と外層の流速 (図-5参照)。越流型水制の場合 $k < h$ なので $\lambda < 1$ となる。したがって、 λ を摂動パラメータに選び u を式 (19) のように漸近展開し、式 (18) に代入すれば、 λ の 0 次オーダー、1 次オーダーに関してそれぞれ式 (20)、式 (21) が求められる。

$$u = u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 \dots \quad (19) \quad -\text{Fr}^2 u_0^3 u_0' - u_0' = 0 \quad (20)$$

$$2A \text{Fr}^2 \lambda C_D \zeta^{\frac{3}{2}} \zeta^{\frac{5}{2}} u_0^5 + 2 \text{Fr}^2 \lambda C_D \left(1 - B C_D^{-\frac{1}{2}} \zeta^{\frac{1}{2}} \right) u_0^4 u_0' - \text{Fr}^2 (u_0 u_1' + 3 u_0 u_0' u_1) - u_1' + 2 i u_0^2 = 0 \quad (21)$$

(20) 式の厳密解として $u_0 = 1$ を選ぶと、(21) 式から $u_2(x)$ の解は次の形で与えられる。(ここで、境界条件として $u(0) = 1$ を与えた。)

$$\frac{u_2(x)}{u_{20}} = 1 + \lambda \left\{ \left(\frac{4A \text{Fr}^2}{5(\text{Fr}^2 + 1)} \right) C^{-\frac{3}{2}} \zeta^{\frac{5}{2}} + \left(\frac{2i}{\text{Fr}^2 + 1} \right) \zeta \right\} \quad (22)$$

以上の結果より u_m の 0 次解を与え、 u_m の横断方向変化を $g(\eta_2)$ で表現し、さらに連続式を考慮して、水制域における浅水流を以下のように与える。(u_∞ はWakeの接近流速)

$$u_m = u_\infty \left\{ 1 + \lambda \left(s \zeta^{\frac{5}{2}} + t \zeta \right) \right\} g'(\eta_2) \quad (23) \quad v_m = -u_\infty \frac{B_2}{d} \lambda \left(\frac{5}{2} s \zeta^{\frac{3}{2}} + t \right) g(\eta_2) \quad (24)$$

$$\left(\frac{1}{2} C_D k \rho u_\infty^2 \right) B_2 = u_{x2}^2 B_2 \ell \rho \quad (25)$$

$$\eta_2 = \frac{y}{B_2} \quad s = \frac{4A \text{Fr}^2}{5(\text{Fr}^2 + 1)} C_D^{-\frac{3}{2}} \quad t = \frac{2i}{\text{Fr}^2 + 1}$$

Wake流を仮定しているので河床せん断力は近似的に無視することにする。横拡散係数 ϵ_y は主流域と同様に水深と摩擦速度の積で与え、 $\epsilon_y = \gamma h u_{x2}$ とする。ここで、 u_{x2} は水制の形状抵抗による損失を 1 水制区間で平均したものとし、式 (25) のように定義する。

式 (23)～式 (25) までを式 (1) に代入し λ の 1 次オーダーまでについて整理すると

$$\lambda \phi(g' g' - g g') = \lambda \nu g'', \quad \phi = \frac{5}{2} s \zeta^{\frac{3}{2}} + t \quad (26) \quad \text{ただし、} \nu = \gamma \left(\frac{h}{B_2} \right)^2 \sqrt{2 C_D \left(\frac{k}{\ell} \right)}$$

と変形される。この方程式は λ の 1 次オーダーに関しての運動方程式であり、したがって λ の 0 次オーダーの項での流速の横断方向分布は $g = 0$ となる。ここで、一般には $\nu < 1$ と考えられるので、 ν をパラメータに選び、主流域と同様に摂動法を用いて解法する。 g の漸近展開

$$g = g_0 + \nu g_1 + \nu^2 g_2 \dots \quad (27)$$

と与え、(26) 式に代入すると、 ν^0 、 ν^1 のオーダーに対する方程式は次のようになる。

$$\nu^0 \text{次オーダー: } \phi(g_0' g_0' - g_0 g_0'') = 0 \quad (28)$$

$$\nu^1 \text{次オーダー: } \phi(g_0' g_1' - g_0 g_1'' - g_0'' g_1) = g_0'' \quad (29)$$

(28) 式の解としては $g_0 = -1$ を与える。これは水制による拡散効果が及ばない $\eta_2 \rightarrow -\infty$ の境界を考えた場

合、 v_m は正の量となるためである。これを、式(29)に代入すると g_1 は1次関数の形になるが、 $\eta_2 \rightarrow -\infty$ での収束性を考えれば定数と考えられる。したがって、 $g = -1$ が解となり、これは(26)式の外部解（実際、(26)式の厳密解の1つとなっている。）であり、主流域と同様な理由により拡散効果は解に反映されていない。そこで、(26)式の拡散項が ν について移流項と同オーダーになるように内部変数 $p_2 = \eta_2 / \nu$ を定義する。(26)式を内部変数により変換し、 g の内部漸近展開（(30)式）を代入すると(31)式、(32)式が得られる。

$$g = \widetilde{g}_0 + \nu \widetilde{g}_1 + \nu^2 \widetilde{g}_2^2 \cdots \tag{30}$$

$$\nu^0 \text{次オーダー} : \phi(\widetilde{g}_0',^2 - \widetilde{g}_0 \widetilde{g}_0'') = \widetilde{g}_0''', \tag{31}$$

$$\nu^1 \text{次オーダー} : \phi(\widetilde{g}_0' \widetilde{g}_1' - \widetilde{g}_0 \widetilde{g}_1'' - \widetilde{g}_0'' \widetilde{g}_1) = \widetilde{g}_1''', \tag{32}$$

(31)式より、 v_m の物理性を考慮して $g_0 = -1$ を選ぶと(32)式は解析的に解くことが可能であり、水制域の浅水流は次式のようにになる。

$$u_m = u_\infty \left\{ 1 + \lambda \left(s \zeta^{\frac{5}{2}} + t \zeta \right) \right\} u \frac{D_1}{\phi} \exp(\phi p_2) \tag{33}$$

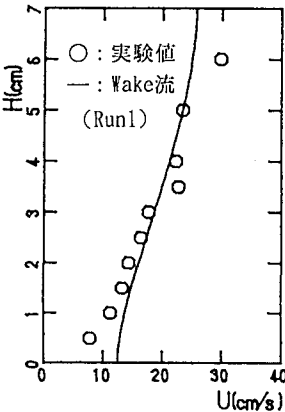
$$v_m = -u_\infty \frac{B_2}{d} \lambda \phi \left\{ -1 + \nu \left(\frac{D_1}{\phi^2} \exp(\phi p_2) + D_2 \right) \right\} \tag{34}$$

境界条件として、接合点($p_1 = 0, p_2 = 1/\nu$)での流速とせん断力の連続性を与える。また、流量の連続性を保証するために水制域で調節することとする。また、断面平均流速 u_m と定義すれば、流量の連続条件

$$B u_m = B_1 u_1 + B_2 u_\infty \tag{35}$$

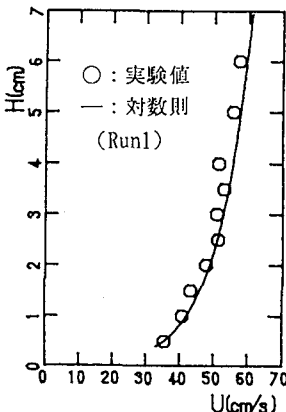
$$u_1 = \varphi u_{x1} \tag{36}$$

が成立する。そこで u_∞ を与えれば、主流域に対数則を、水制域には(25)式を仮定しているので、その他の未知量は決定することができる。図-6～図-11は、それぞれ u_∞ として断面平均流速の1/3を与えたときのモデル式と実験値の水深方向分布と横断方向分布を比較したものである。なお、横拡散係数は対数則からの縦拡散係数程度の値を与えた。図のようにモデル式は実験値を満足する。



$$\alpha, \gamma = (23.9, 4.8)$$

図-6 水制域のWake流分布



$$\alpha, \gamma = (23.9, 22.8)$$

図-7 主流域のlog分布

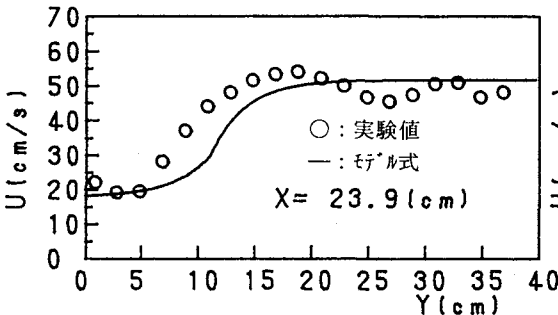


図-8 浅水流の横断変化(Run1)

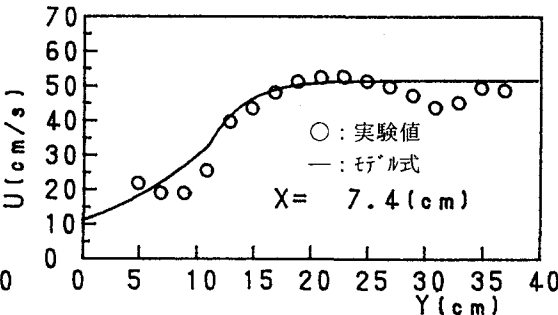


図-9 浅水流の横断変化(Run1)

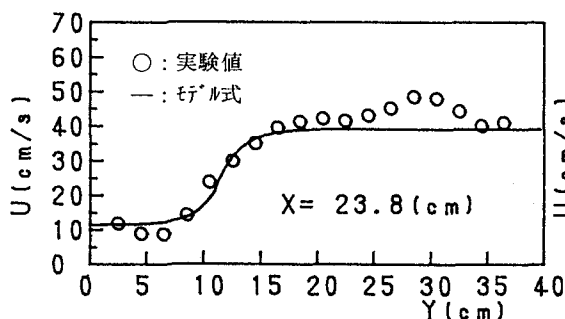


図-10 浅水流の横断変化(Run2)

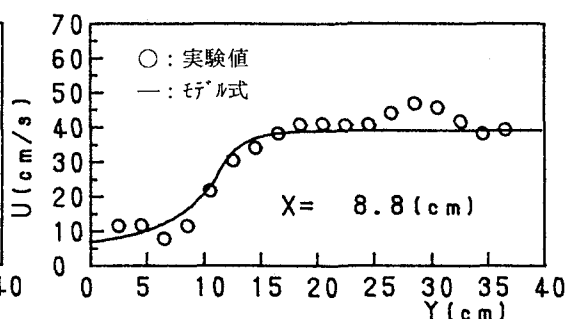


図-11 浅水流の横断変化(Run2)

6. まとめ

- (1) 河床せん断力は水制域と主流域の境界付近で最小値となり、横せん断力はその領域で最大値となる。つまり、流下重力成分は河床せん断力と横せん断力の両者によってバランスされている。
- (2) 実測により求められた横断方向の運動量拡散係数 ε_y はこれまでに粗面開水路で計測された値よりは小さくなった。また、本論文のモデル式においても ε_y は小さめの値を用いた時の方が実験値を満足した。今回行った実験ではレイノルズ数にして 10^5 のオーダーであり実河川においてもある程度満足されると思われる。
- (3) 本来、3次元性の流れと思われる水制を配置した速度場に、2次元のWake流を0次近似解として与えたモデル式においても、主流との横断方向の運動量輸送を考慮することによって、ある程度主流の変化は再現できる。したがって、水制域と主流域の境界では拡散効果が卓越した内部境界層が発達していると思われる。

【謝辞】本研究をすすめるにあたり、北海道開発局開発土木研究所におけるレーザー流速計装置を全面的に使用させて頂いた。また、本研究の1部は、鹿島財団研究助成「治水安全度向上及び水辺環境改善工法としての水制の機能に関する研究」による援助を受けている。記して関係機関・関係者の方々に感謝の意を表す次第である。

【参考文献】

- (1) Schlichting, H.: Boundary-Layer Theory (Sixth Ed.) Chapt. xxiv
- (2) 柿崎恒美・長谷川和義 (1992.): 水制のある開水路中の横断運動量拡散係数の測定、第36回水工学論文集、(出版中)
- (3) 江頭進治・黒木幹男・澤井健二・山坂昌成 (1988.): 開水路における河床せん断力の推定法、第32回水理講演会論文集
- (4) 北条紘次・清水康之・板倉忠興 (1990.): 開水路における河床、河岸のせん断力の推定法、第34回水工学論文集
- (5) 泉典洋・池田俊介: 側岸に樹木を有する直線礫床河川の安定横断河床形状 (1989.), 土木学会論文報告集、第411号、pp. 151~160.
- (6) Nayfeh, A.H.: Perturbation Methods, John Wiley & Sons, Inc., 1973
- (7) 柿崎恒美 (1991.): Characteristics of velocity fields of flows over and around permeable groins, xxiv IAHR CONGRESS STUDENT PAPER COMPETITION (S-41-S-48)
- (8) 秋草勲・吉川秀夫ら (1960.): 水制に関する研究、土木研究所報告107号の6