

任意支持された矩形 Mindlin 板の一振動解析

北海道大学 工学部 正 員 三上 隆

北海道大学 工学部 学生員 朴 勝振

北海道大学 工学部 学生員 水津 周

北海道大学 工学部 正 員 芳村 仁

1. はじめに

任意支持された Mindlin 板の解析には、数多くの解法が報告されている。例えば、Rayleigh-Ritz 法¹⁾、有限帯板法²⁾、有限要素法³⁾、および Gorman⁴⁾ の重ね合わせ法の拡張⁵⁾などが挙げられる。本報告は、相対する2辺が単純支持された Mindlin 板の離散化に用いた選点法⁶⁾を、2方向に展開し解析する方法を述べたものである。

2. 基礎方程式

厚さ h が一様な等方性矩形板 ($a \times b$) を考える。板厚方向の変位を $w(=hW)$ 、 x 軸および y 軸方向の曲げのみによる回転角をそれぞれ X および Y で表す。無次元化座標 $\xi = x/a$ 、 $\eta = y/b$ を用いれば、固有振動数 ω の調和振動をする Mindlin 板の運動方程式は以下のようになる⁷⁾。

$$6k\nu_1 H^2 \{W'' + A^2 \ddot{W} - HX' - HAY'\} + \Omega^2 W = 0 \quad (1.a)$$

$$X'' + 6k\nu_1 HW' + (\nu_1 A^2/2)\ddot{X} - 6k\nu_1 H^2 X + (\nu_2 A/2)\dot{Y}' + \varepsilon \Omega^2 Y = 0 \quad (1.b)$$

$$(\nu_2 A/2)\dot{X}' + 6k\nu_1 AH\dot{W} + (\nu_1/2)Y'' + A^2 \ddot{Y} - 6k\nu_1 H^2 Y + \varepsilon \Omega^2 Y = 0 \quad (1.c)$$

ここで $(\cdot)' = \partial(\cdot)/\partial\xi$ 、 $(\cdot)\dot{=} \partial(\cdot)/\partial\eta$ 、 $\nu_1 = 1 - \nu$ 、 $\nu_2 = 1 + \nu$ 、 $A = a/b$ 、 $H = a/h$ 、 $\varepsilon = 1/(12H^2)$ 、 ν =ポアソン比、 k =せん断補正係数であり、 Ω^2 は次式で定義される無次元化固有円振動数パラメータである。

$$\Omega^2 = \rho h \omega^2 a^4 / D \quad (2)$$

ただし ρ =密度、 D =曲げ剛性

$x(\xi)$ が一定の辺上の境界条件として次の場合を考える。

$$\left. \begin{array}{l} \text{自由 (F): } M_x = Q_x = M_{xy} = 0 \\ \text{固定 (C): } W = X = Y = 0 \\ \text{単純支持 (S): } W = Y = M_x = 0 \end{array} \right\} \quad (3)$$

同様に $y(\eta)$ が一定の辺上の境界条件は次のようになる。

$$\left. \begin{array}{l} \text{自由 (F): } M_y = Q_y = M_{xy} = 0 \\ \text{固定 (C): } W = X = Y = 0 \\ \text{単純支持 (S): } W = Y = M_y = 0 \end{array} \right\} \quad (4)$$

式(3)および式(4)の合応力 (Q) と合モーメント (M) は次のようなものである

Free Vibration Analysis of Rectangular Mindlin Plates

by Takashi MIKAMI, Sung Jin PARK, Amame SUIZU and Jin YOSHIMURA

$$\left. \begin{aligned} M_x &\equiv X' + \nu \dot{A}Y, & M_y &\equiv \nu X' + \dot{A}Y, & M_{xy} &\equiv Y' + \dot{A}X \\ Q_x &\equiv W' - HX, & Q_y &\equiv \dot{W} - H \cdot \dot{A}Y', \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

3. 定式化

1) 選点法を適用するにあたっての基本事項

図-1に示すような解析領域内 $R[0 \leq \xi \leq 1, 0 \leq \eta \leq 1]$ 内に、 ξ 方向には $0 = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_M < \xi_{M+1} = 1$ の $M+2$ 個、 η 方向には $0 = \eta_0 < \eta_1 < \dots < \eta_M < \eta_{M+1} = 1$ の $M+2$ 個の離散点 (ξ_i, η_j) を配置する。離散点の内、●印を付した離散点は境界条件が規定される辺上に配置されるので、ここでは「境界点」と名付ける。一方、○印を付したそれは、解析領域内の内部に置かれるので、ここでは「内部選点」と呼ぶことにする。

内部選点には、区間 $\xi[0, 1]$ および $\eta[0, 1]$ で定義される shifted Legendre 多項式 $P_M^*(\xi) = 0$ および $P_M^*(\eta) = 0$ の零点を用いることにする。

定式化のための準備として未知関数 (W, X, Y) の1つを代表して ϕ と記し、その導関数を離散点におけるその関数値と結び付ける関係式を導くことにする。これは1次元 (ξ または η) に対する関係式を用い⁶⁾、それを2次元に拡張する形で容易に得られる。例えば、1次元の次式から出発する場合を考える

$$\frac{d\phi}{d\xi} = \sum_{j=0}^{M+1} A_{i+1,j+1} \phi_j \quad (j = 0, 1, \dots, M+1) \quad \dots\dots\dots (6)$$

まず作用素 $d/d\xi$ を2次元問題に関する $\partial/\partial\xi$ に変換する。図-1によれば、 j は $y(\eta)$ 方向の離散点を表すのに使用しているので、 j を例えば k で置き換える。すなわち

$$\frac{d\phi}{d\xi} = \sum_{k=0}^{M+1} A_{i+1,k+1} \phi_k \quad \dots\dots\dots (7)$$

上式は、任意の j 番目の line 上の i 番目の離散点で成立する。次に“ j ” line を規定するため指標“ j ”を付加すれば次式が得られる。

$$\left. \frac{d\phi}{d\xi} \right|_{ij} = \sum_{k=0}^{M+1} A_{i+1,k+1} \phi_{kj} \quad (i, j = 0, 1, \dots, M+1) \quad \dots\dots\dots (8)$$

同様な考え方に求められる関係式 (式(8)も含み、定式化のために必要なすべて) を以下に列挙する。

$$\left. \begin{aligned} \left. \begin{aligned} \left. \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right|_{ij} &= \sum_{k=0}^{M+1} A_{i+1,k+1} \phi_{kj}, & \left. \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right|_{ij} &= \sum_{k=0}^{M+1} A_{j+1,k+1} \phi_{ik} \\ \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} \right|_{ij} &= \sum_{k=0}^{M+1} B_{i+1,k+1} \phi_{kj}, & \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} \right|_{ij} &= \sum_{k=0}^{M+1} B_{j+1,k+1} \phi_{ik} \end{aligned} \right\} & \dots\dots\dots (9) \\ \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi \partial \eta} \right|_{ij} &= \sum_{k=0}^{M+1} A_{j+1,k+1} \sum_{\ell=0}^{M+1} A_{i+1,\ell+1} \phi_{\ell k} \end{aligned} \right\}$$

離散点における未知量の表示の仕方はこれまでと同様に⁶⁾、内部選点に関するものと境界点に関するものに分類し表示することにする。

$$\{\phi_c\}^T = (\phi_{11}, \phi_{12}, \dots, \phi_{1M}, \phi_{21}, \phi_{22}, \dots, \phi_{2M}, \dots, \phi_{M1}, \phi_{M2}, \dots, \phi_{MM}) \quad \dots\dots\dots (10.a)$$

$$\begin{aligned} \{\phi_e\}^T &= (\phi_{00}, \phi_{01}, \phi_{02}, \dots, \phi_{0,M+1}, \phi_{10}, \phi_{1,M+1}, \phi_{20}, \phi_{2,M+1}, \dots, \phi_{M0}, \phi_{M,M+1}, \dots \\ &\quad \phi_{M+1,0}, \phi_{M+1,1}, \phi_{M+1,2}, \dots, \phi_{M+1,M+1}) \quad \dots\dots\dots (10.b) \end{aligned}$$

ここで添字 c と e はそれぞれ、内部選点および境界点に関する諸量を表し以下でも同様である。なお、 $\{\phi_c\}$ は M^2 次のベクトル、 $\{\phi_e\}$ は $(4M+4)$ 次のベクトルである。

2) 隅角点における境界条件

隅角点における境界条件の規定は注意が必要である。例えば、

$$\left. \begin{array}{l} \xi = 0 \text{ で固定; } W = X = Y = 0 \\ \eta = 0 \text{ で単純支持; } W = X = M_y = 0 \end{array} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

の場合を考えてみる。 $\xi = \eta = 0$ なる隅角点では、式(11)のすべてが満足されなければならないので、 $W = X = Y = M_y = 0$ となる。しかし、 $M_y = \nu X' + A\dot{Y}$ において、 $\eta = 0$ で $X = 0$ および $\xi = 0$ で $Y = 0$ なので、 $X' = \dot{Y} = 0$ となり $M_y = 0$ となる。したがって $\xi = \eta = 0$ の隅角点における独立な境界条件は、次式となる。

$$W = X = Y = 0 \dots\dots\dots (12)$$

以上のように求めた隅角点に独立な境界条件は、表-1のように整理できる。表で、 S は単純支持、 F は自由および固定を表す。

表-1 隅角点における独立な境界条件

隅角点	境界条件
ξ —一定で S , η —一定で F	$W = Y = M_x = M_y = M_{xy} = 0$
ξ —一定で F , η —一定で S	$W = X = M_x = M_y = M_{xy} = 0$
ξ —一定で F , η —一定で C	$W = X = Y = M_x = M_{xy} = 0$
ξ —一定で C , η —一定で F	$W = X = Y = M_y = M_{xy} = 0$
F と F の組み合わせ	$M_x = M_y = Q_x = Q_y = M_{xy} = 0$
C と S の組み合わせ	$W = X = Y = 0$

3) 固有振動方程式

全未知量は $3(M+2)^2=3M^2+12M+12$ である。

常微分方程式(1)を式(9)を用いて離散化すれば、 $3M^2$ 個の条件は次のマトリックス代数方程式が得られる。

$$[\alpha_c]\{\delta_c\} + [\alpha_e]\{\delta_e\} - \Omega^2[\gamma]\{\delta_c\} = \{0\} \dots\dots\dots (13)$$

ここで $[\alpha_c]$ と $[\alpha_e]$ はそれぞれ式(9)のマトリックス A, B の成分で構成される、 $3M^2 \times 3M^2$ 次および $3M^2 \times 12(M+1)$ 次のマトリックス、 $[\gamma]$ は $3M^2 \times 3M^2$ 次のマトリックス。

残り $12(M+1)$ 個の条件は、境界条件より得られる。ただし、表-1より理解できるように、単純支持(S)と固定(C)の組み合わせの場合を除いて、未知数と条件式の数が一致しない。このときは、四隅以外の境界上で満足すべき個数の調整を行い、以下のようなマトリックス式を得る。

$$[\beta_c]\{\delta_c\} + [\beta_e]\{\delta_e\} = \{0\} \dots\dots\dots (14)$$

式(13)と式(14)より、次の固有振動数方程式が得られる。

$$[\alpha_c] - [\alpha_e][\beta_e]^{-1}[\beta_c]\{\delta_c\} - \Omega^2[\gamma]\{\delta_c\} = \{0\} \dots\dots\dots (15)$$

4. 数値計算例

矩形状 $[x \times y = a \times b]$ の薄い膜の振動(伝播速度 $= c$)を考える。運動方程式は、 $\partial^2 w / \partial x^2 + \partial^2 w / \partial y^2 = c^2 \partial^2 w / \partial t^2$ であり、 m, n をそれぞれ x および y 方向の波数とすれば、解は $\Omega_{mn} = caw_{mn} = \pi \sqrt{m^2 + (a/b)^2 n^2}$ である。

表-2は $a/b = \sqrt{2}$ の場合について、内部選点数 M の解(10次まで)の収束性に与える影響をみたものである。

$M \geq 10$ であれば、厳密解にほぼ等しい解が得られている。

5. まとめ

本報告は2方向に選点法を適用し、矩形 Mindlin 板の自由振動を解析する手法を述べたものである。詳細な数値的例は当日発表の予定。

参考文献

- 1) D.J.Dawe, O.L.Roufaiel: Rayleigh-Ritz Vibration Analysis of Mindlin Plates, J. Sound & Vib.,69, pp.345-359, 1980.
- 2) O.L.Roufaiel, D.J.Dawe: Vibration Analysis of Rectangular Mindlin Plates by the Finite Strip Method, Comp. & Struct., Vol.12, pp.833-842, 1980.
- 3) E.Hinton, N.Bicanic: A Comparison of Lagrangian and Serendipity Mindlin Plate Elements for Free Vibration Analysis, Comp. & Struct., Vol.10, pp.483-493, 1979.
- 4) D.J.Gorman: Free Vibration Analysis of Rectangular Plates, Elsevier, 1982.
- 5) 内山武司: 自由辺と固定辺を有する Mindlin 平板の自由振動解析, 日本建築学会構造論文報告書, 第 426 号, pp89-98, 1991.
- 6) T.Mikami, J.Yoshimura: Application of the Collocation Method to Vibration Analysis of Rectangular Mindlin Plates, Comp. & Struct., Vol.18, pp.425-434, 1984.
- 7) R.D.Mindlin Influence of Rotatory Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic, Elastic Plates, J. Appl. Mech., March, pp. 31-38, 1951

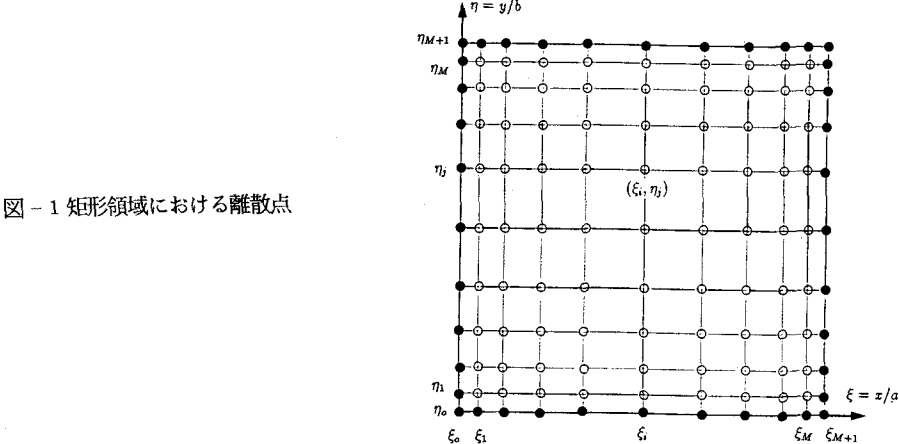


図-1 矩形領域における離散点

表-2 M の解 (Ω_{mn}/π) に与える影響

m, n	$M = 8$	$M = 9$	$M = 10$	$M = 11$	厳密解
1,1	1.7321	1.7321	1.7321	1.7321	$\sqrt{3}$
2,1	2.4495	2.4495	2.4495	2.4495	$\sqrt{6}$
1,2	3.0000	3.0000	3.0000	3.0000	$\sqrt{9}$
3,1	3.3172	3.3166	3.3166	3.3166	$\sqrt{11}$
2,2	3.4641	3.4641	3.4641	3.4641	$\sqrt{12}$
3,2	4.1236	4.1231	4.1231	4.1231	$\sqrt{17}$
4,1	4.2200	4.2467	4.2421	4.2427	$\sqrt{18}$
1,3	4.3598	4.3588	4.3589	4.3589	$\sqrt{19}$
2,3	4.6912	4.6904	4.6904	4.6904	$\sqrt{22}$
4,2	4.8794	4.9025	4.8986	4.8990	$\sqrt{24}$