

逆対称クロス・アングルプライ積層板の振動特性に及ぼす初期応力の影響

北海道大学 工学部 正 員 三上 隆
北海道大学 工学部 学生員 朴 勝振
北海道大学 工学部 正 員 芳村 仁

1. はじめに

積層板は軽量化が必須な宇宙構造物等の構造要素としてその使用は増々増加している。積層板は、強い異方性を示すとともに薄板の場合でも面内・面外剛性に対して面外せん断剛性が極めて小さいのが特徴であり、その力学的特性を明らかにすることが重要な課題となっている。そのため最近では、座屈問題や自由振動問題に関する研究が盛んに行われ、その状況は幾つかのレビュー論文^{1,2)}によってうかがうことができる。しかしながら、構造物に対する荷重条件が次第に厳しくなる今日では、構造物の安定性を検討する基礎的資料として、初期応力の作用するときの振動特性の変化を把握しておく必要があるが、積層板に対する研究は周辺単純支持の逆対称クロス・プライ板を扱った Yang らの論文³⁾が見受けられる程度であり極めて少ないのが実状である。

このような観点から、本論文では単純支持された相対する2辺上に一様な初期応力が作用する場合の逆対称クロス・プライおよび逆対称アングル・プライ積層板を対象にし、初期応力の固有振動数特性に及ぼす影響を明らかにする。

積層板理論には Yang, Norris および Stavsky の1次せん断変形理論 (YNS 理論)⁴⁾を採用する。積層板の固有振動数特性の把握には数多くのパラメトリックな計算が要求されるので、初期応力下の固有振動数の算定には、無負荷時の固有振動数のみの結果で解が得られる算定式⁵⁾を用いた。なお、無負荷時の振動数は選点数⁶⁾により求めた。

2. 解析モデルと基礎方程式

平板の厚さは一様とし h で表す。板厚中央面に座標 (x, y) 、それらに垂直な座標 z を定める。積層板を構成する各ラミナは均質な直交異方性弾性材料とし、各ラミナの密度および厚さは一様とする。材料の直交異方性主軸を $(1, 2, 3)$ で表し、主軸 3 は z 軸に平行で、主軸 1 と 2 はそれぞれ x と y に対し傾き角度 θ (プライ配向角) だけ傾いているものとする。材料主軸 $(1, 2)$ 方向の弾性係数 E_1, E_2 、ポアソン比 ν_{12}, ν_{21} 、およびせん断弾性係数 G_{12}, G_{13}, G_{23} で与えられるものとする。座標軸と材料主軸の関係を図-1に示す。

積層板は $x=0$ と $x=a$ で単純支持され、図-2に示されるように単位長さ当り一様な初期圧縮応力 σ_x^0 (圧縮力 $N_x^0 = h\sigma_x^0$) を受けるものとする。

さて、初期応力を受ける積層板の基礎方程式は、ひずみエネルギー、運動エネルギー、曲率項⁸⁾を考慮した初期応力による仕事を用いて、Hamilton 原理より次のように表される。

$$\left. \begin{aligned} N_{x,x} + N_{xy,y} - h\sigma_x^0 u_{,xx} - \rho h u_{,tt} &= 0 \\ N_{y,y} + N_{xy,x} - h\sigma_x^0 v_{,xx} - \rho h v_{,tt} &= 0 \\ Q_{x,x} + Q_{y,y} - h\sigma_x^0 w_{,xx} - \rho h w_{,tt} &= 0 \\ M_{x,x} + M_{xy,y} - Q_x - \frac{\sigma_x^0 (h^3/12) \psi_{x,xx}}{\rho} - \rho (h^3/12) \psi_{x,tt} &= 0 \\ M_{y,y} + M_{xy,x} - Q_y - \frac{\sigma_x^0 (h^3/12) \psi_{y,xx}}{\rho} - \rho (h^3/12) \psi_{y,tt} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

Effect of Initial Stress on Vibration of Antisymmetric Cross-Ply and Angle-Ply
Laminated Plates
BY Takashi MIKAMI, Sung Jin PARK and Jin YOSHIMURA

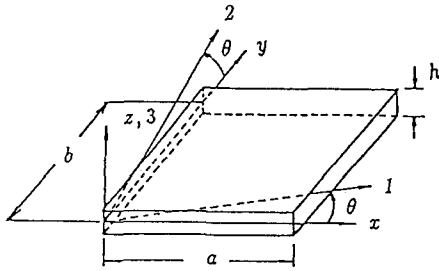


図-1 座標軸と材料主軸の関係

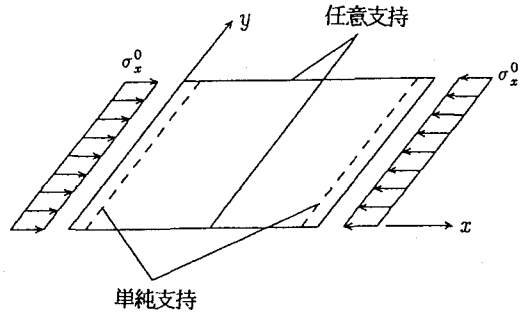


図-2 一様な初期圧縮応力を受ける積層板

ここで、コンマ(,)に続く添字は偏微分を表し、 (u, v, w) =(中央面の x, y, z 方向の変位)、 (ψ_x, ψ_y) =($x-z, y-z$ 平面の回転角)、 ρ =密度、 t =時間、 $(N_x, N_y, N_{xy}, Q_x, Q_y)$ =合応力、 (M_x, M_y, M_{xy}) =合モーメントである。式(1)の $\square$ は、曲率項の考慮により現われたものである。

$x=0$ と $x=a$ では次のような単純支持とする。

$$\left. \begin{array}{l} \text{アングル・ブライ積層板: } u = w = \psi_y = N_{xy} = M_x = 0 \\ \text{クロス・ブライ積層板: } v = w = \psi_y = N_x = M_x = 0 \end{array} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

$y=0$ と $y=b$ では次の境界条件の組み合わせで規定される。

$$\left. \begin{array}{l} \text{固 定 (C): } u = v = w = \psi_x = \psi_y = 0 \\ \text{自 由 (F): } N_y = N_{xy} = Q_y = M_y = M_{xy} = 0 \\ \text{単純支持 (S)[アングル・ブライ積層板のとき]: } v = w = \psi_x = N_{xy} = M_y = 0 \\ \text{単純支持 (S)[クロス・ブライ積層板のとき]: } u = w = \psi_x = N_y = M_y = 0 \end{array} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

3. 解析手法および固有振動数の算定

$x=0, a$ で式(2)の単純支持条件を満足する変位関数として、Levy 型のそれを採用すれば、式(1)は y 方向の無次元化座標 $\eta(=[0,1])$ に関する 2 階 5 元連立方程式で表される。

$$[C_1]\{Z''\} + [C_2]\{Z'\} + [C_3]\{Z\} - \Omega^2[C_4]\{Z\} - k[C_5]\{Z\} = 0 \dots\dots\dots (4)$$

ここで $(\cdot)' = d(\cdot)/d\eta$ 、 $\{Z\}^T = (U, V, W, X, Y) = (x, y, z \text{ 方向変位および回転角})$ 、 k および Ω^2 は次式で表わされる座屈応力係数および固有振動数パラメーターである。

$$k = \sigma_x^0 a^2 / (E_2 h^2), \quad \Omega^2 = \rho \omega^2 a^4 / (E_2 h^2) \dots\dots\dots (5)$$

さらに、 $[C_1] \sim [C_5]$ は 5×5 の係数マトリックスである。ここで後の展開に必要なマトリックス $[C_4]$ と $[C_5]$ を示せば以下となる。

$$\left. \begin{array}{l} [C_4] = \text{Diag} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1/12 & 1/12 \end{pmatrix} \\ [C_5] = \text{Diag} \begin{pmatrix} m^2 \pi^2 & m^2 \pi^2 & m^2 \pi^2 & m^2 \pi^2 / 12 & m^2 \pi^2 / 12 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

$y=0 (\eta=0)$ と $y=b (\eta=1)$ で規定される境界条件は式(4)に類似な次式で表わされる。

$$[C_6]\{Z'\} + [C_7]\{Z\} = 0 \dots\dots\dots (7)$$

ここで $[C_6] \sim [C_7]$ は 10×5 の係数マトリックスである。

さて、式(4) および (7) に選点法⁶⁾を適用すればそれぞれ次式が得られる。

$$[\alpha_c]\{\delta_c\} + [\alpha_e]\{\delta_e\} - k[\gamma_c]\{\delta_c\} - \Omega^2[\rho_c]\{\delta_c\} = \{0\} \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$[\beta_c]\{\delta_c\} + [\beta_e]\{\delta_e\} = \{0\} \quad \dots\dots\dots (9)$$

ここで、添字 c と e はそれぞれ選点および端点に関するマトリックス、ベクトルを表し、 $[\alpha_c]$ 、 $[\gamma_c]$ および $[\rho_c]$ は $5M \times 5M$ 次のマトリックス、 $[\alpha_e]$ は $5M \times 10$ 次のマトリックス、 $\{\delta_c\}$ 、 $\{\delta_e\}$ はそれぞれ $5M$ 次および 10 次のベクトルである。さらに、 $[\beta_c]$ は $10 \times 5M$ 次、 $[\beta_e]$ は 10×10 次のマトリックス。

式(8),(9)よりベクトル $\{\delta_e\}$ を消去すれば、選点における関数値を成分とするベクトル $\{\delta_c\}$ を固有ベクトルとする次の固有方程式が得られる。

$$([\alpha] - k[\gamma_c] - \Omega^2[\rho_c])\{\delta_c\} = \{0\} \quad \dots\dots\dots (10)$$

ここで、 $[\alpha] = [\alpha_c] - [\alpha_e][\beta_e]^{-1}[\beta_c]$ であり、 $5M \times 5M$ 次のマトリックス $[\rho_c]$ と $[\gamma_c]$ はそれぞれ、式(6)のマトリックス $[C_4]$ と $[C_5]$ の成分よりなる対角マトリックスである。

初期応力の変化による固有振動数の変化を知るためには、式(10)で $\Omega^2 = 0$ としたマトリックスを用いて座屈解析を行い座屈応力 ($k_{cr} = \sigma_{cr}^0 a^2 / E_2 h^2$) を求める。次に、任意の初期応力 σ_x^0 と座屈応力との比 $\lambda = k/k_{cr} (= \sigma_x^0 / \sigma_{cr}^0)$ を用いて、一連の初期応力に対する固有値解析を次式によって行えばよい。

$$([\alpha] - \lambda k_{cr}[\gamma_c])\{\delta_c\} - \Omega^2[\rho_c]\{\delta_c\} = \{0\} \quad \dots\dots\dots (11)$$

ところで、式(6)より次式の関係

$$[C_5] = m^2 \pi^2 [C_4] \quad \dots\dots\dots (12)$$

が成立するので、初期応力下の固有振動数 (Ω_{mn}) は次の算定式⁵⁾を用いれば容易に決定できる。

$$\Omega_{mn}^2 = \bar{\Omega}_{mn}^2 - \lambda \bar{\Omega}_{m+1}^2 m^2 / m_*^2 \quad \dots\dots\dots (13)$$

ここで

m, n = 振動モードにおける x, y 方向の半波数、 Ω_{mn} = 初期応力下の無次元化固有振動数。

$\bar{\Omega}_{mn}$ = 非負荷状態で無次元化固有振動数、 $\lambda (= \sigma_x^0 / \sigma_{cr}^0)$ = 作用応力と座屈応力の比。

$m_*, \bar{\Omega}_{m+1}$ = $\text{Min}[\bar{\Omega}_{j1}^2 / (\pi^2 j^2)]$ (ただし $j = 1, 2, \dots$) を満たす j と $\bar{\Omega}_{j1}$ であり非負荷状態の固有振動数は、式(10)で $[\gamma_c] = 0$ と置いた次式より得られる。

$$([\alpha] - \Omega^2[\rho_c])\{\delta_c\} = \{0\} \quad \dots\dots\dots (14)$$

4. 数値計算例

数値計算に用いたせん断補正係数は、 $K_{44}^2 = K_{55}^2 = 5/6$ である。また内部選点数 M には、逆対称アングル・プライ積層板の振動問題の解析結果⁶⁾より判断して、 $M=13$ を用いた。

数値計算に用いた積層板は、非載荷辺が固定または自由の正方形板とし、各ラミナは特に断わりのない限りグラフィイト/エポキシの特性 $E_1/E_2=40$ 、 $G_{12}=G_{13}=0.6E_2$ 、 $G_{23}=0.5E_2$ 、 $\nu_{12}=0.25$ を有するものとする。なお、以下で N は積層数を表す。

(a) 逆対称アングル・プライ積層板

ここでは、プライ配角度 θ および、異方性の度合いを表す縦弾性係数比 E_1/E_2 をパラメータにとり解析する。

図-3は非載荷辺が固定の場合について、初期応力の状態を $\lambda (= \sigma_x^0 / \sigma_{cr}^0) = 0, 0.25, 0.5, 0.75$ と変化させ、最低次の固有振動数 Ω^* に与える影響を、各パラメータに対して示した(プライ配向角 θ は図-3(a)、縦弾性係数比 E_1/E_2 は図-3(b))。図より次のようなことがわかる。

[1] $\Omega^* - \theta$ 曲線は不連続点を有する複雑な様相を呈し、プライ配向角に大きく依存する。この不連続点は初期応力の増

加とともに明確になり、1つは $k_{cr} - \theta$ 曲線に現れる尖点⁷⁾、もう1つは最低次固有振動数を与える振動モードが $m=1$ から $m=2$ に移る尖点 ($\lambda=0.5$ では $\theta=80^\circ$ 、 $\lambda=0.75$ では 58°) である。

[2] 初期応力の作用による固有振動数の低下は、パラメータ E_1/E_2 によらず一定である。 $\lambda=0$ のときの固有振動数と比較して、 $\lambda=0.25, 0.5, 0.75$ では最大で 10, 25, 40% の低下であり、この低下率は積層数にもほとんど依存しない。

図-4 は、非載荷辺が自由の場合について、初期応力の Ω^* に与える影響をみたものである (ブライ配向角 θ は図-4(a)、縦弾性係数比 E_1/E_2 は図-4(b))。図より次の点が指摘できる。

[1] θ を変化させたとき、非載荷辺が固定の場合と異なり、 $\Omega^* - \theta$ 曲線は θ に関して単調減少関数であり、最低次固有振動数を与える振動モードは常に $m=1$ である。

[2] 初期応力の作用による固有振動数の低下は、非載荷辺が固定の場合と同様に、パラメータ E_1/E_2 によらず一定である。 $\lambda=0$ のときの固有振動数と比較して、 $\lambda=0.25, 0.5, 0.75$ では最大で 10, 30, 50% の低下であり、この低下率は積層数にもほとんど依存しない。

(b) 逆対称クロス・ブライ積層板

ここでは、縦弾性係数比 E_1/E_2 をパラメータにとり解析する。

図-5 は非載荷辺が固定の場合について、初期応力状態を $\lambda=0, 0.25, 0.5, 0.75$ と変化させた際の最低次固有振動数 Ω^* に与える影響をみたものである。初期応力の作用による固有振動数の低下は、パラメータ E_1/E_2 によらず一定である。 $\lambda=0$ ときの固有振動数と比較して、 $\lambda=0.25, 0.50, 0.75$ では最大で 10, 25, 40% の低下であり、この低下率は積層数 N にもほとんど依存しない。

図-6 は、非載荷辺が自由の場合について、初期応力の Ω^* に与える影響をみたものである。固有振動数に与える初期応力の影響は、非載荷辺が固定の場合に類似であるが、パラメータ E_1/E_2 を変化させたときの Ω^* の変動率 (変率) は固定のときに比べて小さいのが特徴と思われる。

5. まとめ

単純支持された相対する二辺上に一樣な初期応力が作用する場合の逆対称クロス・アングルブライ積層板の自由振動解析を行い、初期応力の固有振動数に与える影響を検討した。

正方積層板の基本固有振動数特性について、非載荷辺が固定もしくは自由の場合を例にとり、ブライ配向角 θ および縦断係数比 E_1/E_2 をパラメータにとり数値解析を行い、次の点が明らかになった。

- (1) 初期応力の作用による固有振動数の低下は、ブライ配向角 θ に大きく依存する。低下の度合はブライ配向角が大きい程著しい。
- (2) 初期応力の作用による固有振動数の低下は、断積係数比 E_1/E_2 によらずば一定である。しかも積層板にほとんど影響を受けない。

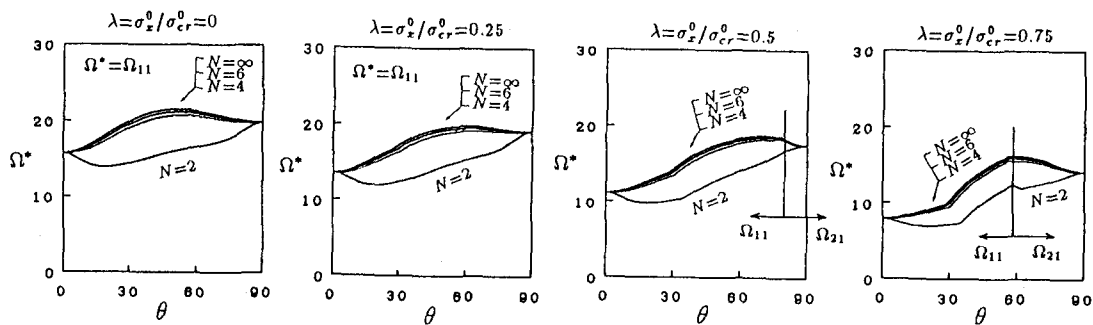
他のパラメータ (a/h) や他の境界条件については、当日発表の予定。

最後に、本研究は平成3年度科学研究補助金 (一般研究 (c)) によるものの一部であることを付記し、関係各位に感謝を表します。

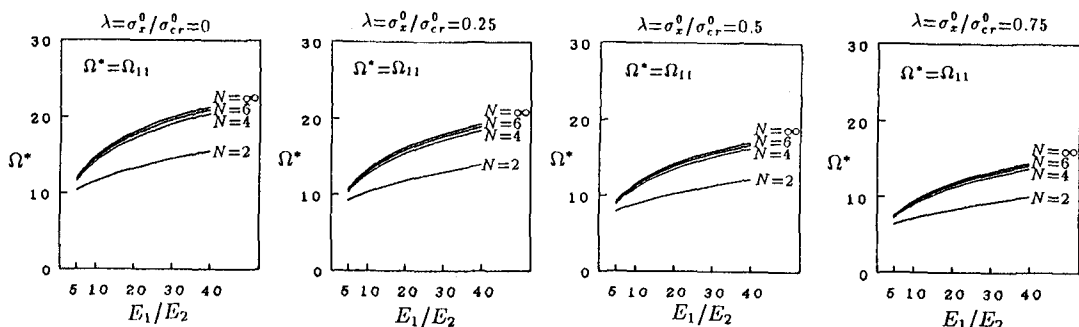
参考文献

- 1) Leissa, A.W. : Recent studies in plate vibrations : 1981-85, Part II. Complicating effects, Skock Vib. Dig., Vol.18, p.23, 1986.
- 2) Leissa, A.W. : A review of laminated composite plate buckling, *Appl Mech Rev.*, Vol.40, p.575, 1987.
- 3) Yang, I.H. and Shieh, V.A. : Vibrations of initially stressed thick, rectangular orthotropic plates, *J. Sound Vib.*, Vol.119, p.545, 1987.

- 4) Yang, P.C., Norris, C.H. and Stavsky, T. : Elastic wave propagation in heterogeneous plates, *Int. J. Solids Struct.*, Vol.2, p.665, 1965.
- 5) 三上隆 : 矩形板の座屈・振動問題における固有値の相似性, 土木学会北海道支部論文集, 第 48 号, 1992.
- 6) 芳村仁・三上隆・朴勝振 : 逆対称アングル・ブライ積層板の自由振動, 構造工学論文集 Vol.37A, p.911, 1991.
- 7) 三上隆・朴勝振・芳村仁 : 初期応力を受けるクロス・アングルブライ積層板の振動 Vol.38A, 1992.
- 8) Sun, C.T. : On the equations of Timoshenko beam under initial stress, *J. Appl. Mech.*, Vol.39, p.282, 1972.



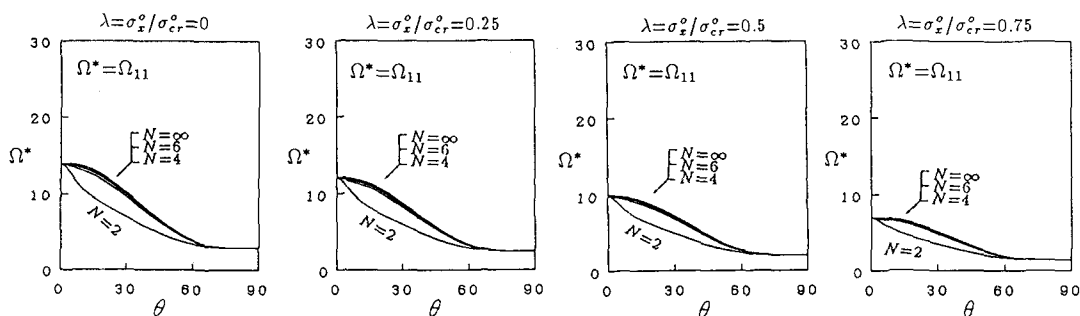
(a) プライ配向角 θ に対する Ω^* ($a/h=10$)



(b) 弾性係数 E_1/E_2 に対する Ω^* ($\theta=45^\circ, a/h=10$)

図-3 初期応力 ($\lambda=\sigma_x^0/\sigma_{cr}^0$) の基本固有振動数 Ω^* に与える影響

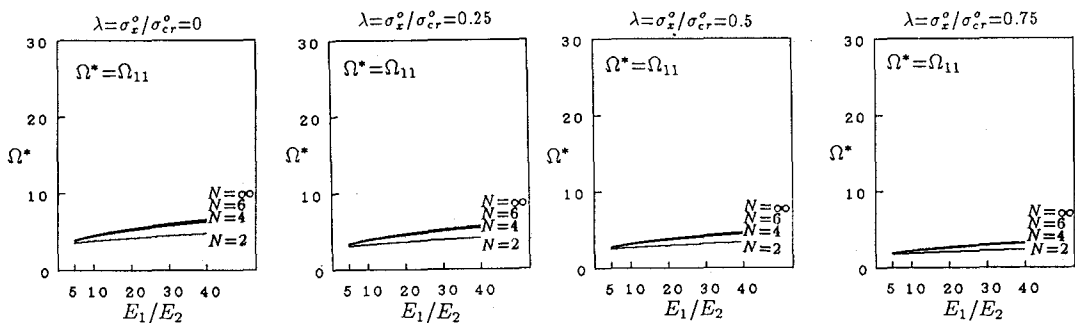
(逆対称アングル・ブライ積層板)



(a) プライ配向角 θ に対する Ω^* ($a/h=10$)

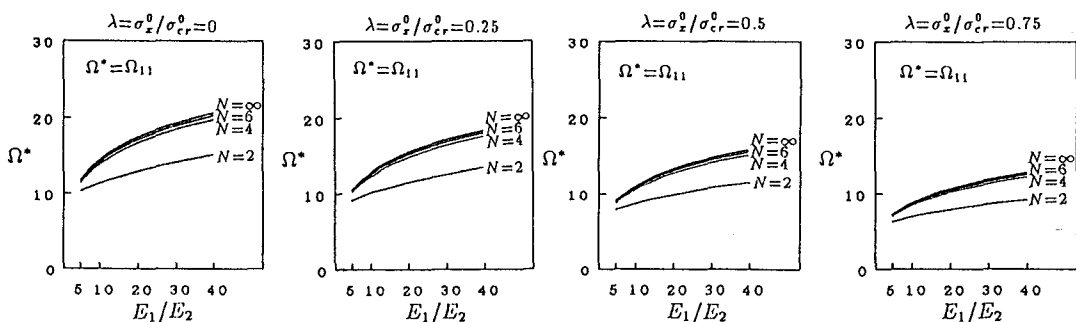
図-4 初期応力 ($\lambda=\sigma_x^0/\sigma_{cr}^0$) の基本固有振動数 Ω^* に与える影響

(逆対称アングル・ブライ積層板)



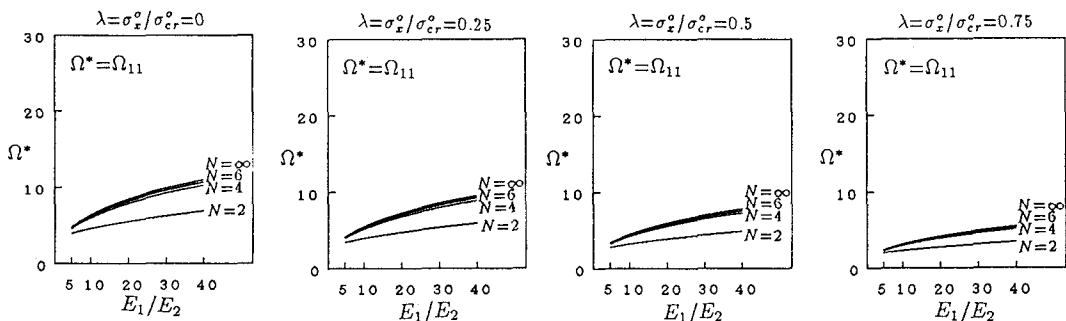
(b) 弾性係数 E_1/E_2 に対する Ω^* ($\theta=45^\circ, a/h=10$)

図 - 4 初期応力 ($\lambda=\sigma_x^0/\sigma_{cr}^0$) の基本固有振動数 Ω^* に与える影響
(逆対称アングル・プライ積層板)



弾性係数比 E_1/E_2 に対する Ω^* ($a/h=10$)

図 - 5 初期応力 ($\lambda=\sigma_x^0/\sigma_{cr}^0$) の基本固有振動数 Ω^* に与える影響
(逆対称クロス・プライ積層板)



弾性係数比 E_1/E_2 に対する Ω^* ($a/h=10$)

図 - 6 初期応力 ($\lambda=\sigma_x^0/\sigma_{cr}^0$) の基本固有振動数 Ω^* に与える影響
(逆対称クロス・プライ積層板)