

I-43

矩形板の座屈・振動問題における固有値の相似性

北海道大学 工学部 正員 三上 隆

1. はじめに

初期応力下の矩形板の自由振動に関する研究は古くから行われ、いまだに多くの論文が発表されている。その中でも古典板理論によれば、一方向に一樣な圧縮荷重が作用する荷重辺単純支持、非荷重辺が任意条件支持の矩形板の固有振動数は、次式で算定できることはよく知られている¹⁾。

$$\left(\frac{\omega}{\omega^0}\right)^2 = 1 - \frac{N_x}{(N_x)_{cr}} \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 ω^0 と $(N_x)_{cr}$ はある規定されたモードに対する無負荷時の固有振動数および座屈荷重、 ω は圧縮荷重 N_x が作用するときの固有振動数である。式(1)は固有振動数の2乗(ω^2)と作用荷重(N_x)が線形関係にあるという有益な情報を提供しているが、 ω^2 の評価には座屈荷重の決定および無負荷時の固有振動数の算定のための二つの固有値問題を解析しなければならない。また式(1)にはモード次数と ω^2 の関係が陽な形で表されていないため、固有振動数特性を理解するにはいま一つ不便さが残る。さらに著者の知る限りでは、他の板理論に対する式(1)のような関係式は見当らない。

そこで本研究では、上述の荷重・境界条件を対象にし、古典板・修正板理論(Mindlin板理論を採用)に対して成立する次式を提示する。

$$\Omega_{mn}^2 = \bar{\Omega}_{mn}^2 - \lambda \left(\frac{m}{m_*}\right)^2 \bar{\Omega}_{m_*1}^2 \dots\dots\dots (2)$$

ここで、 m, n = 荷重載荷方向およびそれに直角方向の半波数、

$\Omega, \bar{\Omega}$ = 負荷および無負荷時の無次元化固有振動数、

$m, \bar{\Omega}_{m_*1} = \text{Min} \left[\bar{\Omega}_{j1}^2 / (j^2 \pi^2) \right] (j=1, 2, \dots)$ を満たす j と $\bar{\Omega}_{j1}$ 、なお座屈係数(k_{cr})は $k_{cr} = \bar{\Omega}_{m_*1}^2 / m_*^2 \pi^2$ で与えられる。^j

$\lambda (0 \leq \lambda \leq 1)$ = 作用荷重と座屈荷重の比。

式(2)の特徴および式(2)から理解できる負荷時の固有振動数特性は次のようになる。

- (1) Mindlin板に対しては、Sun²⁾によってTimoshenko梁の座屈解析に導入された曲率項(Curvature term)を考慮する場合にのみ成立する。
- (2) 無負荷時の固有振動解析の結果のみより、座屈荷重および負荷時の固有振動数の算定が可能である。
- (3) 式(1)に同様に、固有振動数の2乗 Ω_{mn}^2 は作用荷重(λ に相当)に比例する。作用荷重(λ)の変化に対する Ω_{mn}^2 の変化率(変動率)は波数 n に依存しない。さらに変化率は波数 $m > m_*$ で大きく、 $m < m_*$ で小さい。

以下では、式(2)の誘導過程を示し、その妥当性を数値例で検討することにする。

2. $\Omega_{mn}^2 = \bar{\Omega}_{mn}^2 - \lambda(m/m_*)^2 \bar{\Omega}_{m_*1}^2$ の誘導

図-1に示すように、 $x=0, a$ で単純支持された厚さ h が一樣な等方性矩形板($a \times b$)が、単純支持された辺に大きさ $N_x^0 (= h\sigma_x^0)$ の一樣な面内圧縮応力を受ける場合の問題を考える。

式(2)は、変位関数に Levy 型のそれを採用すれば、離散化手法によらず導くことが出来るので、記述の簡単さから Rayleigh-Ritz 法による場合を示す。Mindlin 理論を採用すれば、変位関数 (w, ψ_x, ψ_y) には次の Levy 型を仮定できる。

$$\left. \begin{aligned} w &= \sum_{m=1}^{\infty} a_m W_m(y) \sin \frac{m\pi}{a} y e^{i\omega t} \\ \psi_x &= \sum_{m=1}^{\infty} b_m \psi_{xm}(y) \cos \frac{m\pi}{a} y e^{i\omega t} \\ \psi_y &= \sum_{m=1}^{\infty} c_m \psi_{ym}(y) \sin \frac{m\pi}{a} y e^{i\omega t} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

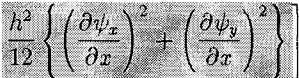
ここで、 ω =固有振動数、 a_m, b_m, c_m =未定係数、 $W_m(y), \psi_{xm}(y), \psi_{ym}(y)$ = y 方向の試行関数

さて、Mindlin 板のひずみエネルギー (U)、運動エネルギー (T) およびエネルギーロス (V) はそれぞれ次のようになる。

$$U = \iint \left[\frac{D}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right)^2 \right\} + \frac{k}{2} G h \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi_x \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \psi_y \right)^2 \right\} \right] dx dy \dots\dots\dots (4)$$

$$T = \frac{\rho h}{2} \iint \left[\left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + \frac{h^2}{12} \left\{ \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial t} \right)^2 \right\} \right] dx dy \dots\dots\dots (5)$$

$$V = \frac{N_x^o}{2} \iint \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{h^2}{12} \left\{ \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right)^2 \right\} \right] dx dy \dots\dots\dots (6)$$

ここで、 D =曲げ剛性、 ν =ポアソン比、 G =せん断弾性係数、 k =せん断補正係数。式(6)の  の部分は、曲率項の考慮により現れたものであり、式(5)と比較すれば明らかなように、運動エネルギーの回転慣性項と同様な役割を果たすものである。

汎関数 (Π) は式(3)~式(5)より次式となる。

$$\Pi = U - T - V \dots\dots\dots (7)$$

式(3)を式(7)に代入し、積分を実行し、適当な無次元パラメータを用いれば、汎関数は次式で表される。

$$\Pi^* = U^*(a_m, b_m, c_m) - \Omega^2 T^*(a_m, b_m, c_m) - k V^*(a_m, b_m, c_m) \dots\dots\dots (8)$$

ここで、無次元化固有振動数 (Ω) と無次元化座屈係数 (k) はそれぞれ次式で与えられる。

$$\Omega^2 = \rho h \omega^2 a^4 / D, \quad k = a^2 N_x^o / D \dots\dots\dots (9)$$

さらに、曲率項を考慮すれば T^* と V^* の間に次式が成立する。

$$V^* = m^2 \pi^2 T^* \dots\dots\dots (10)$$

汎関数 (Π^*) を最小化 ($\partial \Pi^* / \partial a_m = \partial \Pi^* / \partial b_m = \partial \Pi^* / \partial c_m = 0$) すれば、次のマトリックス方程式が得られる。

$$[[K] - k[K_G] - \Omega^2[M]]\{\delta\} = 0 \dots\dots\dots (11)$$

ここで、 $\{\delta\}$ は変位係数ベクトル、 $[K], [K_G]$ および $[M]$ はそれぞれ剛性、幾何学的および質量マトリックスである。

式(11)には次のような固有値問題に分類できる。

無負荷時の振動問題: $[K_G]=0$ とおけば次式が得られる。

$$[[K] - \bar{\Omega}^2[M]]\{\delta\} = 0 \quad \dots\dots\dots (12)$$

ここで $\bar{\Omega}$ に付した ‘-’ は無負荷の固有振動数を表す。

座屈問題: $[M]=0$ とおけば次式が得られる。

$$[[K] - k[K_G]]\{\delta\} = 0 \quad \dots\dots\dots (13)$$

負荷時の振動問題: 座屈荷重 $(N_x)_{cr}$ の λ 倍 ($\lambda=0\sim 1$) の圧縮力が作用しているとすれば、次式が得られる。

$$[[K] - \lambda k_{cr}[K_G] - \Omega^2[M]]\{\delta\} = 0 \quad \dots\dots\dots (14)$$

さて、式(2)は次のように得られる。

(1) 無負荷の固有振動数と座屈係数の関係

式(10)に留意すれば、幾何学的剛性マトリックス $[K_G]$ と質量マトリックス $[M]$ には次の関係が成立する。

$$[K_G] - m^2 \pi^2 [M] \quad \dots\dots\dots (15)$$

したがって式(13)は次式となる。

$$[[K] - km^2 \pi^2 [M]]\{\delta\} = 0 \quad \dots\dots\dots (16)$$

式(12)と式(16)を比較すれば、無負荷の固有振動数 $\bar{\Omega}$ と座屈係数 k の間には次の関係が成立する。

$$km^2 \pi^2 = \bar{\Omega}^2 \quad \dots\dots\dots (17)$$

式(17)より x, y 軸方向波数 m, n に対して、最小の $\bar{\Omega}^2/m^2 \pi^2$ が座屈係数 k_{cr} を与える。なお、考察している問題では (N_x°) のみ作用、 $n=1$ で基本振動数を与えるので、 k_{cr} は次式で与えられる。

$$k_{cr} = \bar{\Omega}_{m_{*1}}^2 / (m_{*1}^2 \pi^2) \quad \dots\dots\dots (18)$$

ここで $m_{*1}, \bar{\Omega}_{m_{*1}}$ は $\text{Min}_j (\bar{\Omega}_{j1}^2 / (\pi^2 j^2))$ (ただし、 $j=1, 2, \dots$) を満たす j と $\bar{\Omega}_{j1}$ である。

(2) 負荷時の固有振動数 Ω と無負荷の固有振動数 $\bar{\Omega}$ の関係

式(15)および式(18)を用いれば、式(14)は次式となる。

$$[[K] - \{\lambda m^2 \bar{\Omega}_{m_{*1}}^2 / (m_{*1}^2) + \Omega^2\}[M]]\{\delta\} = 0 \quad \dots\dots\dots (19)$$

上式と式(12)を比較すれば、既に述べた式(2)が得られる。

$$\Omega_{mn}^2 = \bar{\Omega}_{mn}^2 - \lambda \bar{\Omega}_{m_{*1}}^2 \left(\frac{m}{m_{*1}} \right)^2 \quad \dots\dots\dots (2)$$

上式は、非載荷辺の境界条件に無関係に成立し、Mindlin 板に対しては曲率項を考慮する場合のみ成り立つ。なお、古典板理論に対しては、 $T = \frac{\rho h}{2} \iint \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx dy$, $V = \frac{N_x^\circ}{2} \iint \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx dy$ より式(15)の関係式が無条件に得られ、式(2)は成立する。

3. 式(2)および式(18)の数値的検証

数値計算にはポアソン比 $\nu=0.3$ 、せん断補正係数 $k=5/6$ を用いた。

1) 座屈荷重に及ぼす曲率項の影響

曲率項の座屈荷重に与える影響を4辺単純支持された Mindlin 板を例に示す。

表-1に結果 ($k_{cr} = a^2 N_x^0 / D$, 式(13)による)を示す。曲率項を考慮した解はそれを無視した解に比べて小さいか,あるいは等しくなければならないが,この点は表-1からも確認できる。また曲率項の解に与える影響は,板厚比 (a/h) およびアスペクト比 (a/b) が大きい程,大きくなることがわかる。

表-1 曲率項の解 (k_{cr}) に与える影響

a/b	$a/h=10$		$a/h=100$	
	考慮	無視	考慮	無視
0.5	14.75	14.90	15.41	15.42
1	36.83	37.37	39.45	39.46
2	123.39	128.85	157.46	157.56

2) $k_{cr} = \bar{\Omega}_{m*1}^2 / (m_*^2 \pi^2)$ の検討

曲率項を考えれば,固有振動数と座屈係数の間に式(18)の関係が成立する。ここでは, $a/h=100$ の4辺単純支持の場合を例にとり式(18)の妥当性を確認する。

表-2は,アスペクト比 (a/b) を種々変化させた場合の式(12)より得られた固有振動数 $\bar{\Omega}_{m1}$ ($m=1\sim 4$) を整理したものである。

表-3は,式(18)より求めた座屈係数(表-2の $\bar{\Omega}_{m1}$ を用いる)と式(13)より直接求めたそれを比較したものである。表中の括弧内の数値は座屈係数と与える x 軸方向の波数 m を表す。いずれのアスペクト比に対して両者の解はよく一致している。

表-3 式(18) $[k = \bar{\Omega}_{m*1}^2 / (\pi^2 m_*^2)]$ の検証

表-2 座屈係数の算定に用いた $\bar{\Omega}_{m1}$

a/b	$\bar{\Omega}_{m1}$			
	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$
0.5	12.33	41.91	91.14	159.91
1	19.73	49.03	98.52	162.27
2	49.30	78.84	128.00	196.68
3	98.52	128.00	177.07	245.63

a/b	式(18)	式(13)
0.5	15.41 ($m=1$)	15.41
1	39.45 ($m=1$)	39.45
2	157.46 ($m=2$)	157.46
3	352.99 ($m=3$)	352.99

3) $\Omega_{mn}^2 = \bar{\Omega}_{mn}^2 - \lambda \bar{\Omega}_{m*1}^2 (m^2/m_*^2)$ の検討

式(2)は,式(18)と同様に,線形マトリックス方程式で表わされた固有値問題の固有値の等価性より導かれたものである。したがって,数値的誤差が入らない限り成立する。ここでは,確認の意味で表-4を作成した。表-4は,4辺単純支持された Mindlin 板 ($a/b=2, a/h=100$) に座屈荷重の50%の荷重 ($\lambda=0.5$) が作用するときの結果で,いずれの波数 (m, n) に対して式(2)は良好な解を与える。

表-4 式(2) $[\Omega_{mn}^2 = \bar{\Omega}_{mn}^2 - \lambda \bar{\Omega}_{m*1}^2 (m^2/m_*^2)]$ の検証

(m, n)	式(2)				式(14)
	$\bar{\Omega}_{mn}$	m_*	$\bar{\Omega}_{m* n}$	Ω_{mn}	Ω_{mn}
(1,1)	49.303	2	78.842	40.667	40.667
(1,3)	362.745	2	78.842	361.672	361.672
(2,1)	78.842	2	78.842	55.750	55.750
(2,2)	196.678	2	78.842	188.611	188.611
(3,3)	440.547	2	78.842	432.537	432.537

図-2は、 $a/b=3, a/h=100$ の4辺単純支持板に対する $(\lambda - \Omega_{mn}^2 / \bar{\Omega}_{m*1}^2)$ 直線を示す。なお、座屈荷重を与える波数は $m_*=3$ である。結果は式(14)によるものであるが、式(2)より理解できる特性、すなわち[1]直線の傾きは $\alpha = (m/m_*)^2$ である、[2] $m > m_*$ では λ の変化に対する $(\Omega_{mn}^2 / \bar{\Omega}_{m*1}^2)$ の変化率が大きく、 $m < m_*$ ではその逆である、および[3] m が規定されれば、 $(\Omega_{mn}^2 / \bar{\Omega}_{m*1}^2)$ の変化率は波数 n に依存しないなどが理解できる。

4. 応用例

次のような問題を考える。

非載荷辺が固定の正方形板の座屈荷重および座屈荷重の50%の初期圧縮荷重が作用するときの最小固有振動数を求めよ。ただし $\nu=0.3$ とする。

古典理論が適用可能とすれば、 $\bar{\Omega}_{m1} (m=1\sim 4)$ は例えば文献3)によれば $\bar{\Omega}_{11}=28.95, \bar{\Omega}_{21}=54.74, \bar{\Omega}_{31}=102.2, \bar{\Omega}_{41}=170.3$ となる。式(18)より $k_m (m=1\sim 4)$ を求めれば、 $k_1=84.92, k_2=75.90, k_3=117.59, k_4=183.66$ となるので、座屈荷重は $(N_x)_{cr}=75.90D/a^2$ (ただし $m_*=2$)となる。この結果は $(N_x)_{cr}=7.69\pi^2 D/a^2$ であり、文献4)の結果に一致している。

座屈荷重を与える m_* と $\bar{\Omega}_{m*1}$ はそれぞれ、 $m_*=2, \bar{\Omega}_{m*1}=54.74$ である。したがって式(21)より Ω_{m1} を求めれば、 $\Omega_{11}^2=(28.95)^2-0.5(1/4)(54.74)^2=463.54, \Omega_{21}^2=1497.69, \dots$ となり、最小固有振動数は $m=n=1$ で $\Omega_{11}=21.53$ となる。

なお、この例では、最小固有振動数を与える波数が $m=1$ から $m=2$ に移り変わる λ が存在する。すなわち、 $\Omega_{11}^2 \geq \Omega_{21}^2$ を満たす λ がある。式(2)を用いて次の不等式

$$\bar{\Omega}_{11}^2 - \lambda(1/m_*)^2 \bar{\Omega}_{m*1}^2 \geq \bar{\Omega}_{21}^2 - \lambda(2/m_*)^2 \bar{\Omega}_{m*1}^2$$

を解けば $\lambda \geq 0.96$ となる。なお、この結果は文献5)の図-2-(b)のそれに一致する。

5. まとめ

単純支持された二辺上に一様な圧縮荷重が作用する場合の矩形板の固有振動数の算定式を提示した。算定式は従来のそれに異なり、無負荷時の固有振動数より負荷時の固有振動数が求められ、また単純支持方向の振動モードを規定する波数および座屈モードを規定する波数が陽な形で取り込まれており、固有振動数特性を理解する上でも有益と思われる。

参考文献

- 1) Laurie, H. : Lateral vibrations as related to structural stability, J. of Appl. Mech., Vol.74, p.195, 1952.
- 2) Sun, C.T. : On the equations of Timoshenko beam under initial stress, J. of Appl. Mech., Vol.39, p.292, 1972.
- 3) 関谷壮・浜田実・角誠之助：平板構造強度設計便覧，朝倉書店，1982.
- 4) Timoshenko, S.P. and Gere, J.M. : Theory of Elastic Stability, McGraw-Hill, New York, N.Y., 1961.
- 5) 三上隆・芳村仁：初期応力を受ける円筒パネルの振動特性，構造工学論文集，Vol.35A, p.709, 1989.

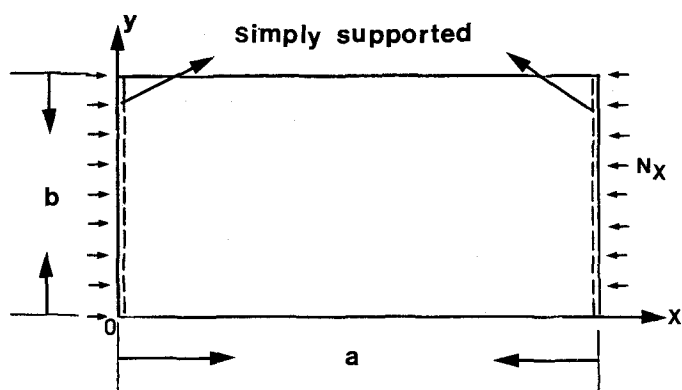


図-1 解析モデル

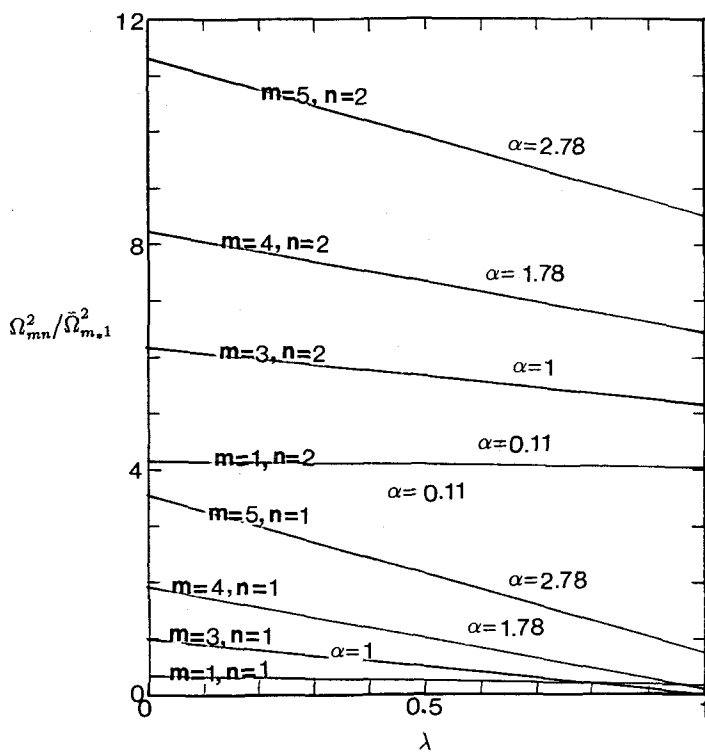


図-2 λ と $\Omega^2_{mn} / \bar{\Omega}^2_{m*1}$ の関係