

I-19

2次近似を用いた連続体の形状最適化に関する基礎的研究

室蘭工業大学 学生員 杉村 朋之

室蘭工業大学 正 員 杉本 博之

1. はじめに

構造最適設計のためのツールとして、筆者らは連続体を対象とする汎用的な形状最適化システム^{1) 2) 3)}を開発したが、システムにはまだ近似の概念が導入されていなかった。故に、100回～数100回の構造解析を行う必要がある最適化設計において、大規模構造物や要素数の多い構造物に対しては、かなりの計算時間を要すると思われる。そこで、何らかの近似法を用いた計算の効率化を検討した。近似の概念に基づく最適設計の手法は数々提案されているが、本研究ではトラス構造物の近似法において良好な結果が報告されている2次近似関数の利用^{4) 5)}を試みた。本文では、いくつかの計算例をあげ、数理計画法のGRGおよび順変数による1次近似との比較を行い、連続体の構造最適設計における2次近似の有効性について検証する。

2. 連続体の形状最適設計

連続体の形状最適化において、原問題は次のように示される。

目的関数や制約条件が設計変数の関数として表され、次のように定式化される問題である。

$$\text{目的関数} : F(\{X\}) \rightarrow \min \quad (1)$$

$$\text{制約条件} : g_j(\{X\}) \leq 0 \quad (j = 1 \sim m) \quad (2)$$

$$\text{上下限値} : x_i^L \leq x_i \leq x_i^U \quad (i = 1 \sim n) \quad (3)$$

$$\text{設計変数} : \{X\}^T = \{x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n\} \quad (4)$$

ここで、 F は目的関数、 g_j は制約条件、 $\{X\}$ は設計変数を表す。 x_i^L 、 x_i^U は、それぞれ設計変数 x の下限値、上限値である。 m は制約条件の数、 n は設計変数の数である。

応力を制約条件とすると式(2)は、次式で表される。

$$g_j(\{X\}) = \sigma_j(X) - \sigma_a \leq 0 \quad (5)$$

ここで、 σ_a は許容応力度である。

本研究では、式(1)～(5)による原問題を直接、数理計画法で繰り返し解く方法と、構造解析に係る応力に近似関数を用いて副問題を作成し、それを数理計画法で繰り返し解く部分近似法⁶⁾を行った。構造解析には有限要素法を用いるが、有限要素解析は応力の計算のために作成される剛性方程式の解法に計算時間のほとんどが費やされる。部分近似法では、厳密な解析は近似式の作成のみに行なわれるので、解析の大幅な負担軽減が期待される。

3. 2次近似による応答近似式

ある多変数関数を $f(X)$ とすると、その2次近似関数は次のように表わすことができる。

$$\tilde{f}(X) \doteq f(X^0) + \sum_{p=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_p} \right)^0 (x_p - x_p^0) + \frac{1}{2} (X - X^0)^T [A] (X - X^0) \quad (6)$$

ここで、 $()^0$ は X^0 における $()$ 内の関数の値、 $[A]$ は2次の微係数で構成されるヘッセ行列で、その p, q 項は次式である。

$$A_{pq} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_p \partial x_q} \right)^0 \quad (p, q = 1 \sim n) \quad (7)$$

すべての応答値について式(7)のヘッセ行列を完全に計算するのが理想であるが、近似式の作成に負担をかけないため、ヘッセ行列の対角項のみを用いる。その結果、式(6)は次のようになる。

$$\tilde{f}(X) = f(X^0) + \sum_{p=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_p} \right)^0 (x_p - x_p^0) + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^n \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_p^2} \right)^0 (x_p - x_p^0)^2 \quad (8)$$

幾何変数に関する近似式に、式(8)の2次近似関数を用いる場合の応力の近似による応答近似式は次のようになる。

$$\tilde{\sigma}_j(X) = \sigma_j(X^0) + \sum_{p=1}^n \left(\frac{\partial \sigma_j}{\partial x_p} \right)^0 (x_p - x_p^0) + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^n \left(\frac{\partial^2 \sigma_j}{\partial x_p^2} \right)^0 (x_p - x_p^0)^2 \quad (9)$$

式(9)には、1次と2次の微係数が含まれるが連続体の場合、これらの微係数を解析的に求めることは困難であるので、以下に示す差分による数値計算で求める。

図-1の曲線は、ある応答値と設計変数の関係を示す。 x^0 は現在の設計、 f^0 は x^0 に対応する応答値である。 Δx は増分量であり、 $x^0 + \Delta x$ に対応する応答値を f_1 、 $x^0 - \Delta x$ に対応する応答値を f_2 とする。各微係数の値は、それぞれ次式で計算される。

幾何変数に関する1次微分；

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f_1 - f_2}{2\Delta x} \quad (10)$$

幾何変数に関する2次微分；

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{f_1 - 2f^0 + f_2}{(\Delta x)^2} \quad (11)$$

本研究において幾何変数の Δx は、図-2、5では、0.3mm、図-6では、10mmとした。

なお、1次近似における1次微係数は前進差分を用いる。

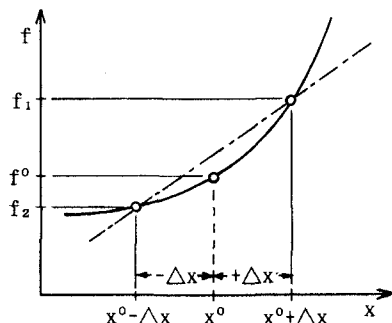


図-1. 差分による微係数の計算

4. 数値計算例

1種類の応力集中緩和の問題と2種類の連続体構造物の最小重量設計を、順変数による1次近似法、本研究の2次近似法、および近似法を用いないで、直接、数値計画法(GRG)を用いる方法で計算を行ない結果を比較した。なお、各要素ごとに4つガウス積分点が設定され応力が計算されるが、すべての積分点について応力の近似式を作成しスクリーニングは行っていない。また、幾何変数に対するムーブリミットは設定していない。一般的に、その問題に適したムーブリミットの設定は困難であると考えられるためである。したがって、ムーブリミットにかなり依存する1次近似においては、非許容に収束した結果も集計している。本例題では、2次近似においてはムーブリミットを設定しなくても良好な結果が得られた。

(1) 応力集中緩和の例

図-2は、応力集中の緩和の例である。図-2(a)のような形状の部材では部材内側の曲線の部分に応力が集中する(荷重合計1.17tf)。そこで、この曲線の部分を最適化の対象とし、この部分の応力集中の緩和を試みる。その方法は、まず図中の網掛けの部分に関して計算された応力のうち最大値と最小値を選び出す、そして、その差を計算する。この値が最小になるように目的関数を設定する。よって式(1)は、次のように表わされる。

$$F = |\sigma_{\max}| - |\sigma_{\min}| \rightarrow \min \quad (12)$$

制約条件は、応力の条件($\sigma_a = 14.0 \text{ kgf/mm}^2$)に加えて、面積が初期形状の面積以下(この場合は、 310.86 cm^2)となるように設定する。

曲線の部分はスプライン関数^{1) 2)}を用いる。設計変数は、極座標による代表点の半径 (図中の R_1, R_2, R_3) である。

図-2 (b) は、最適化の結果である。図-2 において●は、それぞれの形状において応力が最大となった点、○は、最小となった点である。表-1 にその値を示す。初期形状に比べ最適形状では、約 18% 応力集中が緩和する。

表-2 は、5 通りの初期値を与えたときの集計である。目的関数と面積とで最適解への収束を見てみると、GRG では CASE (3)、(5) において、1 次近似では CASE (2)、(3) において最適解に収束していない。一方、2 次近似ではすべてのケースで最適解付近に収束している。また、イテレーションは 3~5 回、平均の計算時間は GRG とくらべて、約 3 分の 2 ほどであり、他の手法に比べ 2 次近似は良好な結果が得られた。

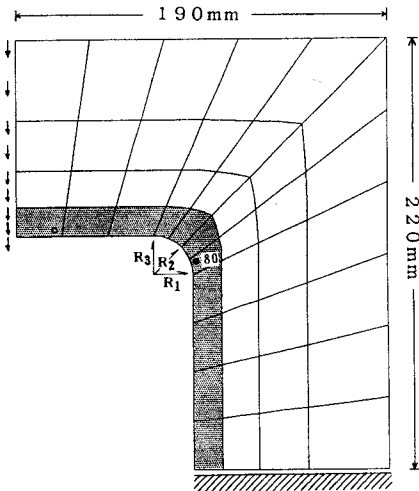


図-2 (a) 初期形状

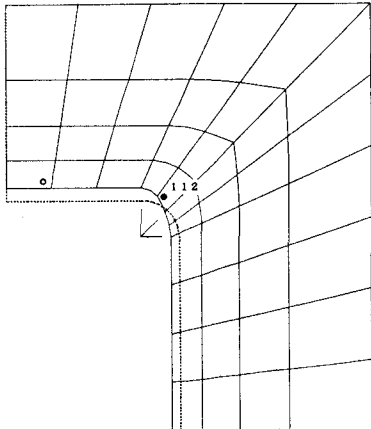


図-2 (b) 最適形状

表-1. 諸数値

	R_1, R_2, R_3 (mm)	面積 (cm^2)	応力度 (kgf/mm^2)		目的関数
			最大値	最小値	
初期形状	20. 20. 20.	310.86	13.71	2.58	11.13
最適形状	16. 17. 26.	310.86	11.94	2.80	9.14

表-2. 応力集中緩和の結果

CASE	初期値 R_1, R_2, R_3 (mm)	手法	面積 (cm^2)	目的関数	計算時間 (sec)	イテレーション 回数
(1)	20.	GRG	310.86	9.20	18.22	14
		2次近似	310.85	9.15	6.85	3
		1次近似	310.85	9.20	5.83	3
(2)	15.	GRG	310.86	9.15	14.07	11
		2次近似	310.86	9.15	10.99	4
		1次近似	305.83	9.41	5.46	3
(3)	25.	GRG	306.21	9.37	9.96	7
		2次近似	310.85	9.29	8.53	3
		1次近似	306.57	9.32	5.44	3
(4)	30.	GRG	310.86	9.21	13.46	9
		2次近似	310.86	9.15	10.20	4
		1次近似	310.86	9.15	5.84	3
(5)	50.	GRG	305.07	9.87	18.77	14
		2次近似	310.86	9.25	13.03	5
		1次近似	310.86	9.14	10.88	4
平均		GRG	308.77	9.36	14.90	11.0
		2次近似	310.86	9.20	9.92	3.8
		1次近似	308.99	9.25	6.69	3.2

次に、この例題における応力の厳密な挙動と式 (9) による 2 次の応答近似式、および 1 次近似式の比較を図-3、4 に示す。それぞれ (a)、(b) は 1 変数のみの変化に対する応答値を表わし、(c) は 2 変数同時に変化させた場合の応答値を表わす。(c) ではヘッセ行列について、その対角項のみを利用した場合に、近似の精度にどの程度影響するかを検討することができる。

図-3 (a) ~ (c) は、図-2 (a) において、 R_1 、 R_3 の値およびこれら両方の変化に対する●の位置の応力（初期形状で応力が最大になった点： σ_{80} ）の関係を示した図である。実線が厳密な値、○が式(9)の2次近似、◇が1次近似の結果である。

図-4 (a) ~ (c) は、図-2 (b) において●の位置の応力（最適形状で応力が最大になった点： σ_{112} ）で、初期形状における応力の関係を示した図である。○は設計点を示しおり、 R_1, R_2, R_3 すべて20mmで各近似式を作成した。これらの図より、2次近似は応力の挙動を精度良く再現し、また、ヘッセ行列の対角項の影響も小さく、近似の程度が良いと考えられる。

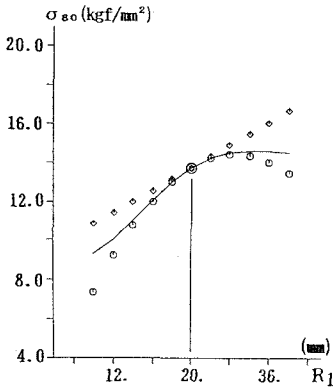


図-3 (a) $R_1 - \sigma_{80}$

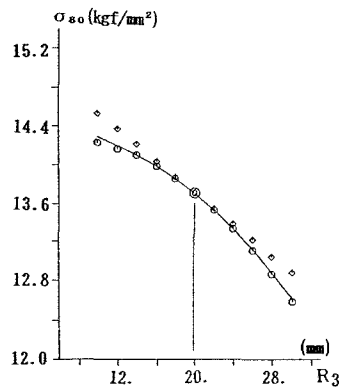


図-3 (b) $R_3 - \sigma_{80}$

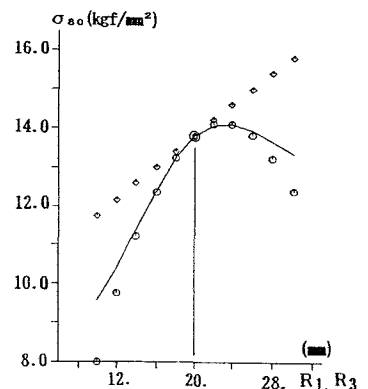


図-3 (c) $R_1, R_3 - \sigma_{80}$

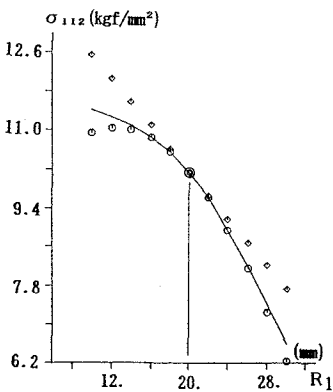


図-4 (a) $R_1 - \sigma_{112}$

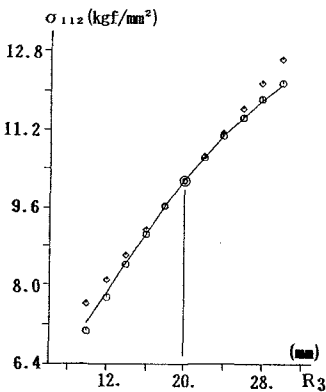


図-4 (b) $R_3 - \sigma_{112}$

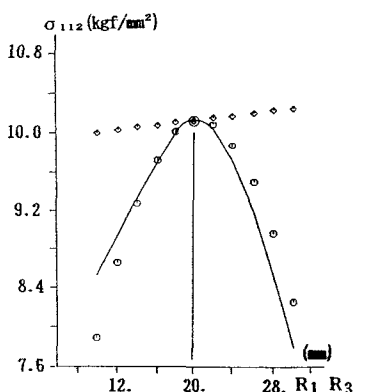


図-4 (c) $R_1, R_3 - \sigma_{112}$

(2) 重量最小設計例

そのほかの数値計算例について説明する。それぞれ、初期形状と最適形状および集計の結果を示す。最適形状における図中の●は、応力度がアクティブになった点である。

図-5は、有孔平板の最小重量設計の例である。1 : 2の不等荷重 ($P = 2.1 \text{ tf}$) を設定した場合の、孔の部分の形状最適化を行なった。設計変数は、3個の代表点の半径 R である。

この例では、すべての場合においてどの手法も最適解に収束した。1次近似が最も良い結果であったが、これは、この形状においては1次近似の近似の程度が良かったと考えられる。2次近似とGRGとの計算時間の比較では、2ケースでGRGの方が若干少ない場合があるが、平均の計算時間では2次近似がGRGよ

表-3. 有孔平板の結果

CASE	初期値 R ₁ , R ₂ , R ₃ (mm)	手法	面積 (cm ²)	計算時間 (sec)	イテレーション 回数
(1)	20. 20. 20.	G R G	208.7	13.35	7
		2次近似	209.5	8.82	5
		1次近似	208.7	5.56	5
(2)	30. 30. 30.	G R G	208.7	8.85	8
		2次近似	209.5	11.04	7
		1次近似	208.7	5.55	5
(3)	40. 40. 40.	G R G	209.5	8.93	5
		2次近似	209.4	9.41	6
		1次近似	208.7	5.39	5
(4)	50. 50. 50.	G R G	209.6	17.16	12
		2次近似	208.7	4.57	3
		1次近似	208.7	5.65	5
(5)	70. 70. 70.	G R G	209.5	13.22	9
		2次近似	208.7	10.64	7
		1次近似	209.4	4.93	4
(6)	100. 100. 100.	G R G	208.7	19.27	14
		2次近似	209.4	12.25	8
		1次近似	208.8	5.75	4
(7)	33. 41. 61.	G R G	208.6	17.78	12
		2次近似	209.5	16.51	10
		1次近似	209.5	5.33	5
平 均		G R G	209.0	14.08	9.6
		2次近似	209.2	10.46	6.6
		1次近似	208.9	5.45	4.7

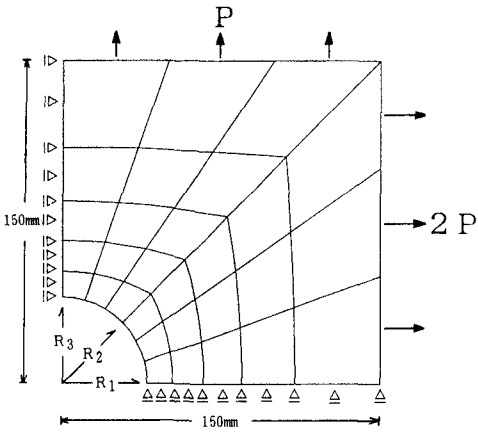


図-5 (a) 初期形状

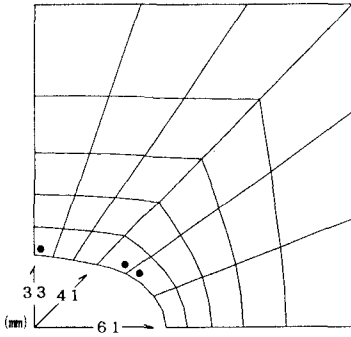


図-5 (b) 最適形状

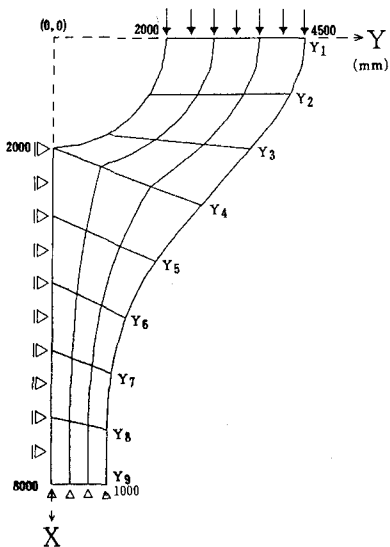


図-6 (a) 初期形状

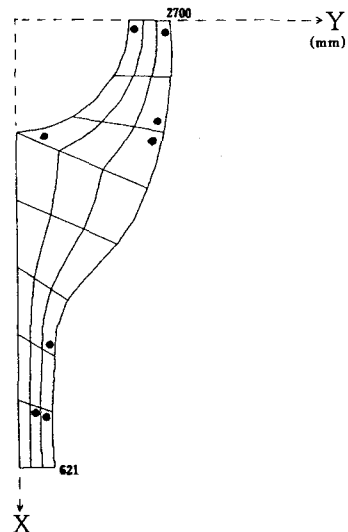


図-6 (b) 最適形状

り優っている結果となった。

表-4. Y型橋脚の結果

図-6は、Y型橋脚の最小重量

設計例である。最適化の対象は右側の形状とし、設計変数は9個の代表点のY座標値である。コンクリート構造物 ($\sigma_a=94.5\text{kgf/cm}^2$) を想定し、荷重は合計560tfである。この例では、2次近似の結果が優れている。イテレーション回数が5.5とGRGと比べて非常に少なく、応力の挙動を精度良く近似しているのがうかがえる。1次近似では3ケース非許容に収束しているが、ムーブリミットを設定していないためと考えられる。

このケースにおいて適当なムーブリミットを設定すると2次近似と同程度の計算時間で最適解に収束したことをつけ加えておく。

CASE	初期値						手法	面積 (m^2)	計算時間 (sec)	イテレーション 回数
	Y_1 Y_6	Y_2 Y_7	Y_3 Y_8	Y_4 Y_9	Y_5					
(1)	4500. 1326.	4227. 1083.	3514. 1016.	2627. 1000.	1840.		G R G 2次近似 1次近似	10.022 10.020 非許容収束	31.38 21.13 -----	20 7 --
(2)	5500. 2326.	5227. 2083.	4514. 2016.	3627. 2000.	2840.		G R G 2次近似 1次近似	10.020 10.020 非許容収束	48.74 22.45 -----	31 7 --
(3)	2500. 2500.	2500. 2500.	2500. 2500.	2500. 2500.	2500.		G R G 2次近似 1次近似	10.020 10.020 10.021	48.93 29.96 30.86	31 7 10
(4)	4000. 926.	3727. 583.	3014. 516.	2127. 500.	1340.		G R G 2次近似 1次近似	10.021 10.021 非許容収束	40.29 15.69 -----	32 4 --
(5)	3500. 1226.	3227. 883.	3014. 816.	2627. 800.	1840.		G R G 2次近似 1次近似	10.020 10.020 10.021	23.74 12.43 17.95	15 4 8
(6)	2600. 760.	2630. 540.	2500. 500.	2100. 530.	1670.		G R G 2次近似 1次近似	10.023 10.021 10.020	23.09 13.17 6.86	16 4 3
平 均							G R G 2次近似 1次近似	10.021 10.020 10.021	36.03 19.14 18.56	24.2 5.5 7.0

5. 結論

以上による数値計算結果や応力の応答近似式についての近似の程度の比較により、2次近似関数を用いた部分近似法は、連続体の形状最適化においても有効であると考えられる。2次近似は、近似式の作成方法の容易さ、収束の信頼性や効率において優れた手法であり、ムーブリミットを設定しないことによる解の振動も見られず、ムーブリミットの必要のない手法であることも特徴である。

なお、今回はすべての積分点の応力について近似式を作成し、計算を行なったが不要な点の応力をスクリーニングをすることで更に計算時間の短縮が可能であり、要素数の多い構造物にはより効果が大いと思われる。

参考文献

- 1) 杉村朋之・杉本博之：形状最適化プログラムの開発に関する基礎的研究、第2回システム最適化に関するシンポジウム講演論文集、pp.263-268、1991.
- 2) 杉本博之・杉村朋之：連続体の形状最適化プログラムに関する基礎的研究、構造工学における数値解析法シンポジウム論文集、p.579-584、1991.
- 3) 杉村朋之・杉本博之・山村和人・岩松浩一：連続体の形状最適化に関する基礎的研究、土木学会第46回年次学術講演会講演概要集第1部、pp.16-17、1991.
- 4) 杉本博之・大塚敏正：2次近似を用いるトラス構造物の形状最適化、土木学会構造工学論文集 Vol.37A pp.531-542、1991.
- 5) Hiroyuki SUGIMOTO and Toshimasa OHTUKA: ON QUADRATIC APPROXIMATION METHOD FOR OPTIMUM DESIGN OF TRUSS STRUCTURES、Proc. of JSCE No.441/I-18、January 1992。(掲載予定)
- 6) 杉本博之：制約条件の部分近似によるトラス構造物の最適設計に関する研究、土木学会構造工学論文集 Vol.36A. pp.429-439、1990.