

I-18

改良型満足化トレードオフ法における満足度パラメータの効果に関する一考察

室蘭工業大学 学生員 亀廻井 寿 明
 室蘭工業大学 正 員 杉 本 博 之
 甲南大学理学部 中 山 弘 隆

1. まえがき

近年、様々な分野で多目的計画法に対するニーズが高まっている。現在、多目的計画問題を解くための対話型手法がいくつか提案されており、その中の1つに中山¹⁾により提案された満足化トレードオフ法がある。著者らは、構造最適設計にこの手法を応用するに当り、比較的大規模な設計問題に対しても十分耐え得るように、補助的スカラー化問題を若干修正した改良型満足化トレードオフ法^{2) 3) 4)}を発表している。この改良型手法においては、従来型のものに対して、新たに満足度パラメータ、最悪点の2つのパラメータが追加されている。満足度パラメータは、設計者が各目的関数の希求水準に対して先験的に保持している要求を、一回の補助的スカラー化問題の最適化に反映させることを可能にする。文献2)、3)、4)では、この手法の特徴および設計の効率面での有効性について、若干の数値計算により実証している。しかし満足度パラメータの効果そのものについての検討はまだ不十分である。

ここで、改良型手法では各目的関数に対して、理想点、最悪点を設定する。一般にこれらの設定にはpay-off table⁵⁾を用いる。しかし大規模な設計問題や目的関数が多い場合、pay-off tableの作成は、設計の効率上困難となる場合もある。この手法では理想点、最悪点をいかなる値に設定しても、パレート解の一候補は決定されるので、これらを任意の値に設定できる。しかし、理想点、最悪点の設定によっては、同じ希求水準を設定しても1回の補助的最適化で求まるパレート解も大きく異なることが予想される。したがって、満足度パラメータの効果は、理想点、最悪点の設定によって少なからぬ影響を受けることになる。

そこで、本研究では満足度パラメータの効果について、トレードオフとの比較、さらに参考点(理想点、最悪点、希求水準)の設定が満足度パラメータの効果にどのような影響を及ぼすかについて、数値計算を行い考察を加える。

2. 改良型満足化トレードオフ法における補助的スカラー化問題

改良型満足化トレードオフ法は、多目的最適化問題を、次に示すような1目的の補助的スカラー化問題に変換し、これを最適化することにより、パレート解の一候補を決定する。

$$\text{目的関数} : Z \rightarrow \min \quad (1)$$

$$\text{制約条件} : g_j(\mathbf{X}) \leq 0 \quad (j = 1 \sim m) \quad (2)$$

$$w_i \{f_i(\mathbf{X}) - \hat{f}_i\} - (1 - \xi_i) Z \leq 0 \quad (i = 1 \sim r) \quad (3)$$

$$\text{設計変数} : \mathbf{X} = \{X_1 \ X_2 \ \cdots \ X_n\} \quad (4)$$

$$\text{ただし、} \quad w_i = \frac{1}{f_{i*} - f_i^*} \quad (i = 1 \sim r) \quad (5)$$

ここで、 w_i は目的関数の重みを表し、設計者が理想点 f_i^* 、最悪点 f_{i*} を与えた時点で自動的に設定される。式(3)中、 $f_i(\mathbf{X})$ は原問題の目的関数、 $\hat{f}_i$ は希求水準、 ξ_i は満足度パラメータである。ここで、もし ξ_i を0に設定すれば、 $f_i(\mathbf{X})$ は目的関数として取り扱われる。また、 $\xi_i = 1$ に設定すれば目的

関数が希求水準以下であるという制約条件式に置き換わり、この時希求水準への達成度は100%となる。したがって、これを0～1の間の実数値で与えれば、これらの間を連続的に取り扱うことが可能となる。

3. トレードオフと満足度パラメータを設定しての設計の比較

ここでは、トレードオフによる設計と満足度パラメータを設定した設計の比較を行うために、図-1に示す5部材片持梁の設計問題を挙げる。目的関数には梁の全容積 $V(\text{cm}^3)$ 、および荷重載荷点における鉛直方向変位 $\delta(\text{cm})$ を取っている。また、制約条件は各部材断面における応力度 ($\sigma \leq \sigma_s$)、および設計変数とする部材断面寸法に関する条件 ($h_i \leq 20 b_i$) を取っている。なお、理想点、最悪点はpay-off table を用いて表-1のように設定した。

(1) トレードオフによる設計

ここでは、トレードオフのみを用いて設計を行う場合の例を挙げる。ただし、トレードオフは、改善したい目的の新希求水準のみを設定し、緩和する目的に対する新希求水準はラグランジュ乗数を利用した自動設定⁴⁾で行った。設計の過程を表-2、図-2に示す。図中、△はパレート解、●は新希求水準を表す。

まず、初期希求水準に対して、表-2上段のようにパレート解が得られた。この結果に対して、変位に対して0.5(cm)にまで改善したいとする。新希求水準を設定し、再計算した結果得られたパレート解が表-2中段である。解は新希求水準を満たしていない。そこでもう一度トレードオフを行い、得られた結果が表-2下段である。解はほぼ新希求水準を満たした。

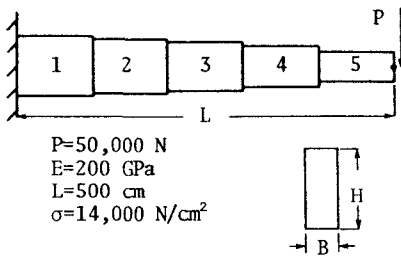


図-1 片持梁

(2) 満足度パラメータを設定する設計

ここでは、満足度パラメータを設定して設計を行う場合の例を挙げる。設計過程を表-3および図-3に示す。まず初期の段階で変位に対しての要求が高いとして、これに対する満足度パラメータを0.8に設定した結果、表-3上段のようにパレート解が得られた。この結果に対して、さらにもう少し変位を小さくしたいとして、満足度パラメータを0.9に設定して再計算した結果、表-3下段のようにパレート解が得られた。結果は(1)の要求をほぼ満たしたものとなった。

表-1 理想点、最悪点の設定

	理想点	最悪点
$V(\text{cm}^3)$	61916.0	320000.0
$\delta(\text{cm})$	0.305	2.818

表-2 トレードオフによる設計

	$V(\text{cm}^3)$	$\delta(\text{cm})$
初期希求水準	80000.0	0.400
パレート解1	117929.1	0.777
感度	1.852×10^{-7}	1.712×10^{-2}
トレードオフ1	緩和	改善
新希求水準	143574.4	0.500
パレート解2	149066.0	0.560
感度	1.142×10^{-7}	2.441×10^{-2}
トレードオフ2	緩和	改善
新希求水準	161831.4	0.500
パレート解3	162252.9	0.504

表-3 満足度パラメータによる設計

	$V(\text{cm}^3)$	$\delta(\text{cm})$
希求水準	80000.0	0.400
満足度パラメータ	0.0	0.8
パレート解1	151442.6	0.549
新満足度パラメータ	0.0	0.9
パレート解2	165509.3	0.492

(1)の結果では、2回のトレードオフを必要とした。これは、新希求水準の自動設定はあくまでも1次の情報によるものであり、変位の改善量に対する容積の緩和量を十分に設定できなかったことが原因であると考えられる。小規模な問題ではトレードオフの回数については余り苦にならないとも考えられるが、1回の構造解析に多大な時間を要する大規模

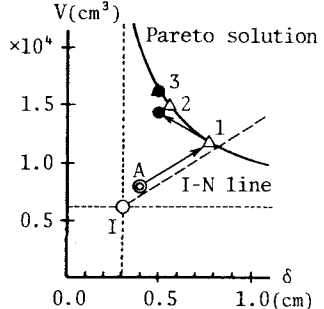


図-2 トレードオフによる設計

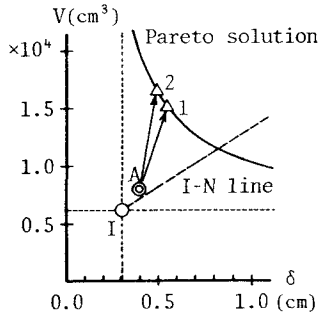


図-3 パラメータによる設計

な問題ではトレードオフの回数が設計の効率に大きく影響する。さらに、一般にパレート解は目で見えるものではなく、特に目的関数の数が増えれば、それだけパレート解曲線（曲面）は複雑となり、設計者がある目的の改善量に対する他の目的の緩和量を決定することは難しく、適切な新希求水準の設定は難しい。

それに対し、満足度パラメータによる設計であるが、これは初期に設定した希求水準に対しての達成度を調整する方法であるので、得られた解に満足が行かなくても、新希求水準を設定することなしに、満足度を与えることによって設計者の要求する設計を得ることもできる。無論、満足度パラメータのみで設計者の要求を満たす設計を行うことも難しいと思われるが、上記の点を考慮すれば、トレードオフの回数の削減、設計の効率化という点に関しては、かなり改善されることが期待できる。

4. 参考点の設定と満足度パラメータの効果について

ここでは理想点、最悪点の設定が満足度パラメータの効果にどのように影響を及ぼすかを調べ、さらに満足度パラメータを効果的に利用するための理想点、最悪点の設定について検討を行った。

(1) 理想点、最悪点の設定によるパラメータの効果の違い

ここでは、3. で用いた片持梁の設計問題に対して、理想点、最悪点をpay-off table を用いて設定した場合(A)と、任意に与えた場合(B)の計2通りについて、満足度パラメータを表-5のように設定して計算を行った。なお、Aの場合の理想点、最悪点は表-1に、Bの場合のそれは表-4のように設定した。また、希求水準はA、B共に $V=70000.0(\text{cm}^3)$ 、 $\delta=0.4(\text{cm})$ とした。

まず、Aの結果を図-4に示した。満足度パラメータの効果は、容積、変位のどちらの希求水準に対しても片寄ることなく、ほぼ均等に得られている。

次に、Bの結果を図-5に示した。この結果は満足度パラメータの効果が均等に得られていない。容積に満足度パラメータ(ξ_v)を与えても、得られるパレート解はそれほど大きく変動しないが、変位の満足度パラメータ(ξ_δ)を与えた場合、特に1に近い値の時には、満足度の少しの差でパレート解も大きく変動する。また満足度を設定せずに得られたパレート解(No.5)は、容積の希求水準に対しての達成度が高くなっている。

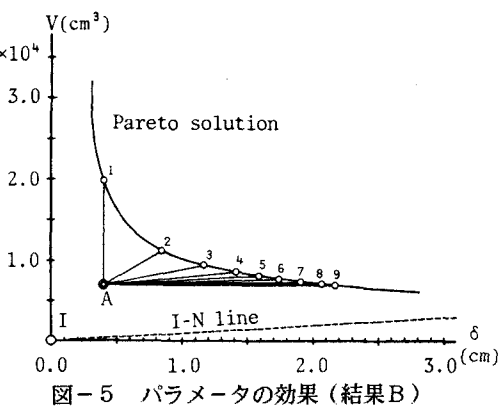
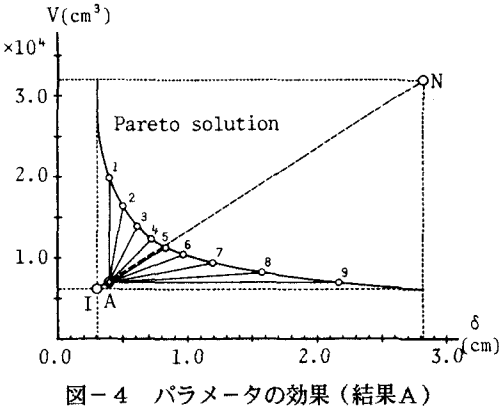
	理想点	最悪点
V (cm ³)	0.000	100000.0
δ (cm)	0.000	10.000

表-5 満足度パラメータの設定

No.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ξ_v	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.4	0.7	0.9	1.0
ξ_δ	1.0	0.9	0.7	0.4	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

結果Aのように、pay-off table により理想点、最悪点が正確に求められている場合はそれほど明確には現われてこなかったが、結果Bに示されるように、それらの与え方によっては、満足度パラメータの効果に対して悪影響を及ぼす可能性が示された。

十分なパラメータの効果を引き出すためには、満



足度を設定しない時に得られるパレート解について、すべての目的の希求水準に対する不足達成量（超過達成量）が、同じ割合であることが望ましいと考えられる。

そこで次に、参考点と満足度パラメータの効果について検討を行う。

(2) 理想点、最悪点の設定について

i) パレート最適性の条件下におけるパレート解と参考点の関係

まず、すべての目的関数が負の相関（すべての目的関数が相反した関係を持つこと。逆に、ある目的を改善すれば、引きずられて他の目的が改善される関係を正の相関と呼ぶ）にあれば、得られたパレート解の下で式（3）はすべてアクティブな制約条件式となる。したがってこの時、式（3）は次式のようになる。

$$w_i \{f_i(\mathbb{X}) - \hat{f}_i\} = (1 - \xi_i) Z, \quad w_i = \frac{1}{f_{i*} - \hat{f}_i} \quad (i=1 \sim r) \quad (6)$$

ここで、式（6）は、次式のようにも表される。

$$w_i \cdot \hat{f}_i \cdot \frac{f_i(\mathbb{X}) - \hat{f}_i}{\hat{f}_i} = (1 - \xi_i) Z \quad (i=1 \sim r) \quad (7)$$

式（7）より、 $f_i(\mathbb{X})$ は次式のようになる。

$$f_i(\mathbb{X}) = \left(1 + \frac{(1 - \xi_i) Z}{w_i \cdot \hat{f}_i}\right) \hat{f}_i = c_i \cdot \hat{f}_i \quad (i=1 \sim r) \quad (8)$$

式（8）より、パレート最適性を保証されている目的関数 $f_i(\mathbb{X})$ は希求水準 $\hat{f}_i$ に定数 c_i をかけたもので表される。したがって、 c_i をすべての目的関数に対して一定にすれば、得られるパレート解は、各希求水準に対して同じ割合だけ不足または超過することになる。そこで、満足度パラメータを設定しない状態で（ $\xi_i=0.0$ ）、 c_i を各目的関数で一定にするには、式（8）における $w_i \cdot \hat{f}_i$ を等しくすれば良いことになる。したがって、理想点、最悪点をこの関係を保つように設定すれば、各希求水準に対して公平なパレート解が求まることになる。

ii) 数値計算による検討

ここでは3.の片持梁の問題で、2通り（A、B）の希求水準に対して、 $w_i \cdot \hat{f}_i=0.5$ となるように理想点、最悪点を設定し、数値計算を行った。参考点を表-6～7に示す。また、満足度パラメータは表-5のように設定した。結果を図-6～7に示す。

まず図-6は、4.（1）の例題と同じ希求水準を与えた時であるが、今回の結果は満足度パラメータの効果が、片方の希求水準に片寄ることなく、ほぼ均等に得られている。また図-7も、希求水準に対してほぼ均等に満足度パラメータの効果が得られている。

表-6 参考点の設定（A）

	理想点	希求水準	最悪点
V (cm ³)	0.000	70000.0	140000.0
δ (cm)	0.000	0.400	0.800

表-7 参考点の設定（B）

	理想点	希求水準	最悪点
V (cm ³)	0.000	65000.0	130000.0
δ (cm)	0.000	1.000	2.000

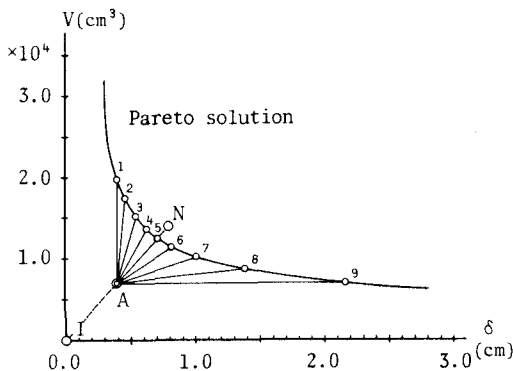


図-6 パラメータの効果（結果A）

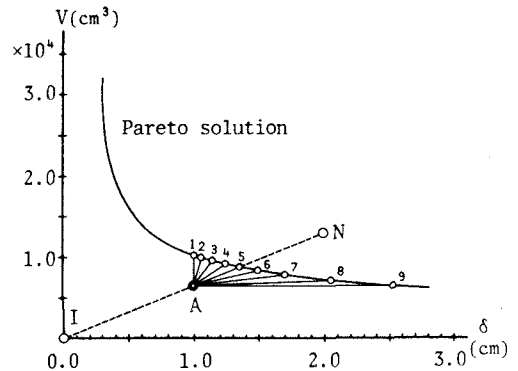


図-7 パラメータの効果（結果B）

(3) 39部材トラスによる検討

ここでは、4. (1)、(2)で行った満足度パラメータの効果と参考点の影響について、図-8に示すような荷重条件の39部材トラスの設計問題を例に取り、検討を行う。この問題において、目的関数として全容積(m^3)、クラウンにおける鉛直方向変位 δ (cm)、および水平面からのライズH(cm)を取っている。

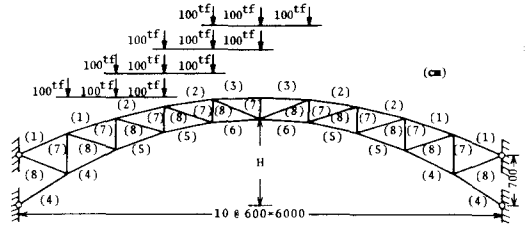


図-8 39部材トラス

まず希求水準と理想点をA、B、C共通に表-8のように設定した。また、容積、変位、ライズに対する $w_i \cdot \hat{f}_i$ をA(0.5, 0.3, 0.1)、B(0.1, 0.3, 0.5)、C(0.5, 0.5, 0.5)となるように、最悪点を表-9のように設定した。この問題に対して、満足度パラメータを与えずに数値計算を行った結果を表-10に示す。表には、パレート解、感度、および副問題における目的関数Zと式(3)の制約条件式の値を示した。

設計Aについては、得られたパレート解が、容積に対する達成度が高くなっており、逆にライズに対しては達成度が低い。設計BについてはAとは逆に、ライズに対する達成度が高く、容積に対する達成度は低い。すなわち $w_i \cdot \hat{f}_i$ 値の大きいものに対しては達成度が高く、逆に小さいものに対しては達成度が低くなる。最後に設計Cであるが、パレート解の各希求水準に対する不足達成量の割合は、どの目的に対しても等しくなっている。

最後にA、B、Cの参考点の与え方に対して、満足度パラメータを容積、ライズの順にそれぞれ0.2~1.0まで0.2ステップで与えて計算した結果をパレート解のみ表-11に示した。

まず設計Aでは、容積の満足度(No.1~5)を上げていくと、容積が改善される分、他の2目的は犠牲となるが、その変化は比較的小さい。しかし、ライズの満足度(No.11~15)を上げていくと、ライズの達成度および他の2目的の犠牲量が少しの満足度の変化で大きく変動する。また、変位の満足度(No.6~10)を上げていくと他の2目的は犠牲となり、犠牲量の割合は、容積よりもライズの方が大きいことが分かる。つまり、 $w_i \cdot \hat{f}_i$ 値の小さい方の目的関数の犠牲の割合が大きくなっている。

次に設計Bでは、容積の満足度を上げていくと、満足度パラメータの少しの変化で容積の達成度および他の2目的の犠牲量が大きく変動している。また、ライズに対する満足度を上げていくと、他の2目的は犠牲となるが、その変化比較的小さい。また、変位の満足度を上げていくと、他の2目的は犠牲となり、犠牲量の割合は、ライズよりも容積の方が大きい。

最後に設計Cであるが、これはA、Bの結果に比べ、満足度パラメータの効果が、各目的に対する達成度、および犠牲量に極端な影響を与えることなく、ほぼ均等に得られている。

表-8 理想点、希求水準の設定

	理想点	希求水準
V (cm^3)	0.000	2.500
δ (cm)	0.000	6.000
H (cm)	400.0	1200.0

表-9 最悪点の設定

設計	A	B	C
V_n (cm^3)	5.000	25.000	5.000
δ_n (cm)	20.000	20.000	12.000
H_n (cm)	12400.0	2800.0	2800.0

表-10 $w_i \cdot \hat{f}_i$ 値のパレート解への影響

	$w_i \cdot \hat{f}_i$	Pareto解	制約条件	感度	Z
A	V 0.5	2.634	-0.2931×10^{-4}	0.5321×10^{-2}	0.2683 $\times 10^{-1}$
	δ 0.3	6.548	0.5646×10^{-3}	0.1143×10^{-2}	
	H 0.1	1521.9	-0.1024×10^{-6}	0.4203×10^{-5}	
B	V 0.1	3.018	-0.1676×10^{-7}	0.2699×10^{-2}	0.2074 $\times 10^{-1}$
	δ 0.3	6.415	-0.7723×10^{-5}	0.1054×10^{-2}	
	H 0.5	1249.8	0.9313×10^{-8}	0.4720×10^{-5}	
C	V 0.5	2.787	0.1233×10^{-5}	0.8566×10^{-2}	0.5738 $\times 10^{-1}$
	δ 0.5	6.698	0.7479×10^{-3}	0.2505×10^{-2}	
	H 0.5	1337.7	0.2384×10^{-6}	0.1125×10^{-5}	

表-11 満足度パラメータとパレート解

No	満足度パラメータ			設 計 A			設 計 B			設 計 C		
	ξ_v	ξ_s	ξ_H	V (m ³)	δ (cm)	H (cm)	V (m ³)	δ (cm)	H (cm)	V (m ³)	δ (cm)	H (cm)
1	0.2	0.0	0.0	2.613	6.578	1540.4	2.979	6.484	1257.5	2.752	6.765	1350.9
2	0.4	0.0	0.0	2.589	6.595	1570.8	2.929	6.573	1268.6	2.710	6.849	1368.3
3	0.6	0.0	0.0	2.565	6.658	1592.0	2.856	6.714	1285.4	2.660	6.967	1391.8
4	0.8	0.0	0.0	2.536	6.719	1631.5	2.741	6.973	1315.7	2.595	7.148	1427.3
5	1.0	0.0	0.0	2.500	6.820	1688.6	2.500	7.558	1486.2	2.500	7.490	1499.2
6	0.0	0.2	0.0	2.641	6.460	1537.5	3.040	6.350	1251.8	2.806	6.595	1346.7
7	0.0	0.4	0.0	2.648	6.363	1555.7	3.065	6.277	1254.3	2.828	6.477	1357.5
8	0.0	0.6	0.0	2.656	6.261	1575.5	3.094	6.199	1257.0	2.854	6.347	1370.0
9	0.0	0.8	0.0	2.667	6.143	1600.5	3.127	6.107	1260.2	2.887	6.189	1385.9
10	0.0	1.0	0.0	2.680	6.000	1632.5	3.168	6.000	1264.2	2.930	6.000	1406.3
11	0.0	0.0	0.2	2.650	6.601	1488.4	3.028	6.432	1240.6	2.804	6.735	1316.8
12	0.0	0.0	0.4	2.670	6.691	1444.3	3.044	6.434	1231.3	2.823	6.787	1292.9
13	0.0	0.0	0.6	2.698	6.804	1389.9	3.058	6.446	1221.9	2.847	6.835	1266.5
14	0.0	0.0	0.8	2.742	6.967	1316.1	3.072	6.460	1211.0	2.873	6.905	1235.8
15	0.0	0.0	1.0	2.820	7.280	1200.0	3.086	6.475	1200.0	2.907	6.980	1200.0

5. あとがき

本研究は、著者らが発表した改良型満足化トレードオフ法における満足度パラメータの効果について、その有効性および設定する参考点との関係について、数値計算により考察を加えた。以下本研究で行った考察事項をまとめると以下のようになる。

- (1) 理想点、最悪点の設定の仕方によっては、満足度パラメータの効果に悪影響を及ぼすことがあることを数値計算により確認した。
- (2) 満足度パラメータの効果を有効に利用するための、参考点の設定について検討を行った。これにより、与えた希求水準に対して、 $w_i \cdot \hat{f}_i$ 値がすべての目的に対して同じであれば、満足度を設定せずに得られるパレート解は、どの目的の希求水準に対しても同じ割合の不足達成量（超過達成量）となる。これにより、満足度パラメータの効果をほぼ均等に得ることができる。
- (3) (2)の方法では、希求水準を与えれば、重み w_i の自動的設定が可能となり、理想点、最悪点を設定する負担がなくなる。

なお、今回は設定した目的関数がすべて負の相関を持っている場合について、満足度パラメータの有効性、参考点の設定についての考察を加えたが、3目的以上では、正の相関を有する多目的最適化問題も予想されるため、今後このような問題に対しての検討が必要であると思われる。

参考文献

- 1) 中山弘隆：多目的計画に対する満足化トレードオフ法の提案、計測自動制御学会論文集、Vol.20、pp.29-35、1984。
- 2) 亀廻井寿明・杉本博之・中山弘隆：多目的計画法の構造設計への応用に関する基礎的研究、土木学会北海道支部論文報告集、第47号、pp.95-100、1991。
- 3) 亀廻井寿明・杉本博之・中山弘隆：多目的計画法の構造設計への応用について、土木学会第46回年次学術講演論文集(I)第47号、pp.794-795、1991。
- 4) 亀廻井寿明・杉本博之・中山弘隆：構造最適設計のための改良型満足化トレードオフ法に関する研究、土木学会論文集、No.441/I-18（掲載予定）
- 5) 田村坦之編：大規模システムモデリング・制御・意志決定一、（株）昭晃堂、1986。