

I-14

アーチ構造の幾何学的非線形解析

北海道大学工学部 正 員 林 川 俊 郎

北海道大学工学部 渡 部 太一郎

1. まえがき

有限要素法による構造物の非線形解析は、古くより多くの研究者によって、その多種多様な解析手法が発表されている。このうち、幾何学的非線形性を考慮した平面骨組構造物の大変形解析は、わが国でも堀井ら¹⁾や前田ら²⁾によって解析手法が検討され、さらに小堀ら³⁾によって、この解析の実用的な電子計算プログラムも発表されている。

本論文では、文献1)～3)において共通な解析対象となっている2ヒンジアーチ構造について、段階増分荷重をかけることにより、その第2次固有座屈モードに対応した変形過程を追跡して行くことを目的とするものである。解析手法としては、文献2)、3)の骨子をなしている推定増分法、ニュートン・ラプソン法を用い、剛性行列としては、変形後の座標系を用いた簡便な割線剛性行列を用いた。ここにアーチ構造は、直線部材により構成されているものとし、応力-歪み関係式は線形であるとする。

なお、本論文においては、アーチ構造にかかる増分荷重を等分布荷重として計算するかたわら、荷重の載荷バランスを変化させることにより、それぞれの荷重-変位曲線を描き、それらの比較を行った。このことにより、従来の研究の結果および本研究での結果の比較から、その妥当性をみるものである。

ところで、本研究は、座屈の第2次固有モードを対象とするものであるが、一般的なアーチの座屈について考えた場合、非常に偏平なアーチが対称的な座屈たわみ曲線を形成する場合におこる飛移現象を除くと、ほとんどのケースが逆対称の第1次固有モードで座屈する。その点、第1次固有モードの座屈に対応した荷重-変位曲線を計算する方が極めて実用的であるが、本論文においては、分布荷重のかけ方による比較を行う上からも、基本的な対称たわみ曲線を形成する第2次固有座屈モードについて数値計算を行い、その特性について検討したものである。

2. 計算手法

2-1. 剛性行列

平面骨組構造物における3つの基本条件、すなわち(1)応力-歪みの弾性条件、(2)歪み-変位の適合条件、(3)応力(部材力)-荷重(外力)のつりあい条件があるのは周知のとおりである。ここでいう幾何学的非線形性理論とは、(2)の適合条件として、軸変形 ε_x 及び曲率 ρ が次式で与えられる場合である。

$$\varepsilon_x \doteq \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \dots\dots\dots (1)$$

$$\rho \doteq - \frac{d^2 v}{dx^2} \dots\dots\dots (2)$$

ただし、 u : x 方向変位、 v : y 方向変位である。

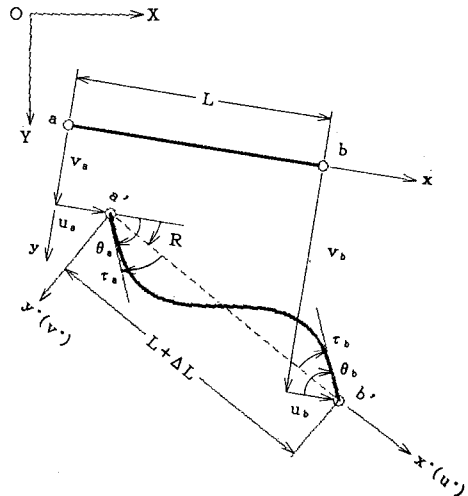


図-1 変形前後における部材座標系

式(1)の2次の項が、幾何学的非線形問題において考慮されるもので、線形問題では微小項として無視されるものである。以上の式をもとにして、剛性方程式を導くと、式(3)のようになる。

$$\{f\} = [k(d)] \cdot \{d\} = [k_0 + k_1(d) + k_2(d)] \cdot \{d\} \dots\dots\dots (3)$$

ただし、 f : 部材端力、 d : 部材端変位

k_0 : 微小変形理論における剛性行列

k_1 、 k_2 : 剛性行列の非線形項で、それぞれ d の1次、2次の項からなる。

しかし、式(2)は $(dv/dx)^2 \ll 1$ という仮定を含んでいるので、図-1において、変形前の座標系から変形後の座標系に変換して剛体変位を除去してやる。その変形後の部材座標系における材端変位 $(u_a^*, v_a^*, \theta_a^*, u_b^*, v_b^*, \theta_b^*)$ は次式(4)~(7)で与えられる。

$$u_b^* - u_a^* = \Delta L \dots\dots\dots (4)$$

$$v_b^* - v_a^* = 0 \dots\dots\dots (5)$$

$$\theta_a^* = \tan \tau_a = \frac{(L+u_b-u_a) \cdot T_a - (v_b-v_a) \cdot T_b}{(L+u_b-u_a) + (v_b-v_a) \cdot T_a} \dots\dots\dots (6), \quad \theta_b^* = \tan \tau_b = \frac{(L+u_b-u_a) \cdot T_b - (v_b-v_a) \cdot T_b}{(L+u_b-u_a) + (v_b-v_a) \cdot T_b} \dots\dots\dots (7)$$

これによって、変形後の部材座標系における剛性方程式は次のように表される。

$$\{f^*\} = [k(d^*)] \cdot \{d^*\} \dots\dots\dots (8)$$

変形前、変形後それぞれの剛性行列は、共に文献2)に詳しい。

2-2. 計算手法

本論文では、構造物の非線形な挙動を追跡するにあたって、推定増分法を含んだニュートン・ラプソン法を使用した。その概要は次のとおりである。

図-2において、X点までの荷重-変位曲線が得られているものとしよう。ここで次の増分荷重 ΔP_{n+1} に対する変位 ΔD_{n+1} 、すなわち点Yを求めるにあたっては、X点の接線より求まる変位 D_{n+1}' を反復計算における第一近似値とするのが普通である。それに対し、推定増分法では、接線のかわりに2次放物線を用いて次の変位を推定することにより(曲線XA)、反復計算の回数を減らし計算時間を短くすることを狙いとするものである。その計算式は式(9)で表される。

$$\Delta D_{n+1}^* = \Delta P_{n+1} \left\{ \frac{\Delta D_n}{\Delta P_n} + \left(\frac{\Delta P_{n+1} + \Delta P_n}{\Delta P_n + \Delta P_{n-1}} \right) \left(\frac{\Delta D_n}{\Delta P_n} - \frac{\Delta D_{n-1}}{\Delta P_{n-1}} \right) \right\} \quad (n \geq 2) \dots\dots\dots (9)$$

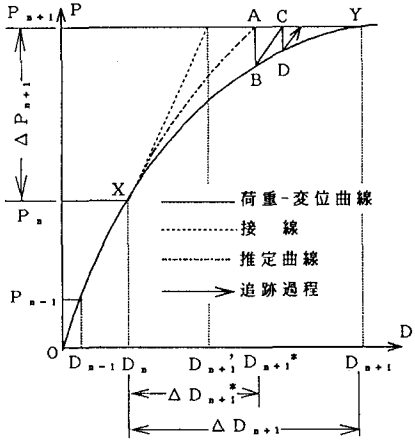
ただし、

$$\Delta D_k = D_k - D_{k-1}, \Delta P_k = P_k - P_{k-1}, D_0 = P_0 = 0 \quad (k=1, 2, 3, \dots) \dots\dots\dots (10)$$

さて、図-2において点Aが求まったなら、その時点までの全変位が得られるので、これを用いて剛性行列を新たに計算し直すことにより、P-D曲線上の点Bが求まる。さらに割線OBを延長することにより点Cも求まる。

以上の計算を繰り返し、1回の反復計算による増分変位量の全増分変位量に対する相対誤差が許容範囲内に収束するまで繰り返し計算を行う。以下の計算例においては、この許容値を0.001とした。

この計算を各増分ステップで行うことにより、荷重-変位曲線が得られることになる。



3. 数値計算例

数値計算例としては、前述のとおり、図-3の2ヒンジアーチを考える。ここでは、アーチに座屈荷重が生じる

図-2 推定増分法による解析モデル図

まで段階増分荷重を節点2～14に鉛直にかけた。

このとき、荷重載荷状態としては、図-4のような載荷パターンを考えた。すなわち、載荷荷重の合計は変わらないようにしつつ、荷重分布に変化をもたせた。それを図-4のように係数 α として表し、荷重パラメータと呼ぶことにする。すなわち、荷重 P に α を掛けた値を加減することにより、荷重分布に変化をもたせた。 α の値としては、0.0～0.1を想定し、アーチの端側に乗っている荷重の一部を中央寄りの節点に移し、上乗せ載荷した状態を考えた。

以上の何通りかの載荷状態における節点3と8の鉛直方向の荷重－変位曲線を描き、比較検討を行うと共に、 $\alpha=0.0$ の等分布荷重状態における全体座屈荷重 P_c と各載荷状態における座屈荷重との差異をみた。

なお、段階増分荷重 P は、表-1のように与えた。

また、本研究においては、座屈の2次固有モードを調べることを目的としているから、境界条件として節点8の水平方向と回転方向の変位を拘束して、計算した。なぜなら、以上の拘束条件を与えなければ、電子計算の些細な桁落ちによる値の変化によって、たわみ曲線の対称性が失われ、1次の座屈モードの計算になってしまうからである。

以上の条件を考えて計算した結果、図-5、6のような荷重－変位曲線が得られた。ここで特に注目されるのは、図-5、6ともに荷重パラメータ α の値が0.02から0.03が変わるときに変位の方に逆転現象

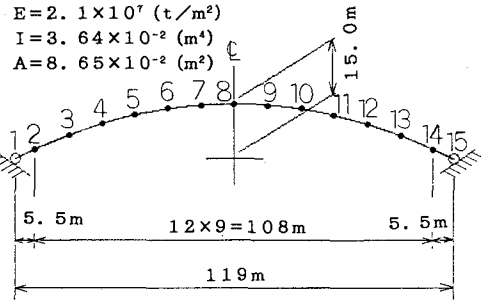


図-3 計算に用いた2ヒンジアーチ

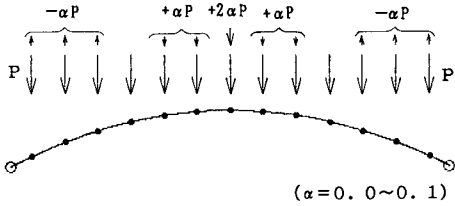


図-4 荷重載荷方法

表-1 増分荷重 (ton)

ステップNo.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
ΔP	35	35	30	50	50	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
P	35	70	100	150	200	210	220	230	240	250	260	270	280	290	300

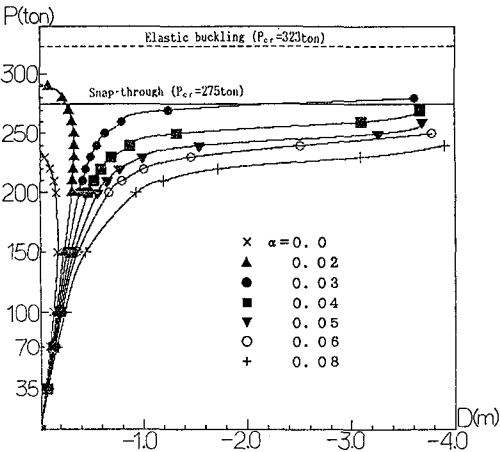


図-5 節点8における荷重-変位曲線

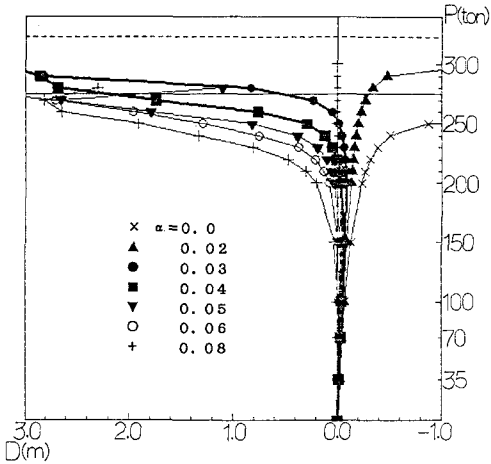


図-6 節点3における荷重-変位曲線

がみられることである。それ以外では、 α の値が増加するにつれて、鉛直たわみが大きくなる傾向がある。

そこで、座屈荷重付近の $P=270, 280, 290\text{ton}$ における変位曲線を図-7～9に表し、荷重パラメータ $\alpha=0.0, 0.02, 0.03$ の場合の比較を行った。図は、変形がわかりやすいように、縦方向を5倍して表している。また、図における破線は、アーチ構造の元の形を表している。図-8、9で、 $\alpha=0.0$ に対応する変位曲線がないのは、剛性方程式の解法で収束しなかったからである。

これらの図からいえることは、まず図-7において、等分布荷重のときの変形がかなり極端で、従来の計算結果とは符合しないことである。更に $\alpha=0.02$ のときの変形が荷重前後でほとんど変わらないということである。それに比べて $\alpha=0.03$ のときは、変位曲線が第2次固有座屈モードに近い結果となっている。

4. あとがき

本研究では、幾何学的非線形性を考慮した2ヒンジアーチ構造の解析を行った。ここで得られた結論と今後の課題についてまとめると次のようになる。

(1) 求めるべき座屈固有モードに対応するように荷重パラメータ α を導入し、その特性を調べた。従来の結果及び座屈値と比較すると、 $\alpha=0.03$ で良好な荷重-変位曲線が得られることがわかった。

(2) 剛性方程式(多元連立一次方程式)解くにあたっては、共役傾斜法とスカイライン法の2種類について数値計算を行った。変位の値が発散するまでは、両者の計算結果にはほとんど差異は認められなかった。しかしながら、スカイライン法による解析結果はCPU時間が半分以下に短縮されるため、特にパソコンを使用して解析を行う場合には有利な計算方法であると思われる。

(3) 初期変位を与えた場合、及び塑性変形については、今後の研究課題としたい。

<参考文献>

- 1) 堀井健一郎・斉藤進・川原睦人・森繁：骨組構造物の大変形解析、土木学会論文報告集、第191号、pp.15-30、1971.
- 2) 前田幸雄・林正・中村守：増分法による平面骨組構造物の大変形解析の加速計算法、土木学会論文報告集、第223号、pp.1-9、1974.
- 3) 小堀為雄・吉田博：有限要素法による構造解析プログラム、丸善株式会社、1980.

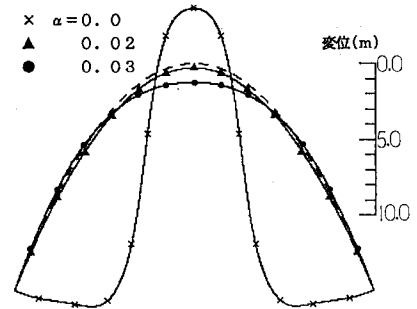


図-7 $P=270\text{ton}$ における変位図

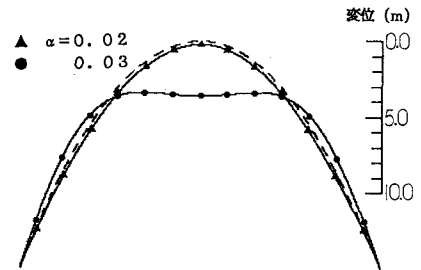


図-8 $P=280\text{ton}$ における変位図

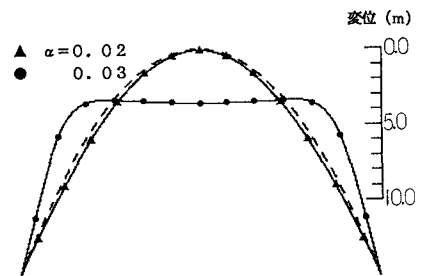


図-9 $P=290\text{ton}$ における変位図