土木学会北海道支部　論文報告集　平成３年度

I－13　薄肉直線部材の固有剛性マトリックスの誘導について

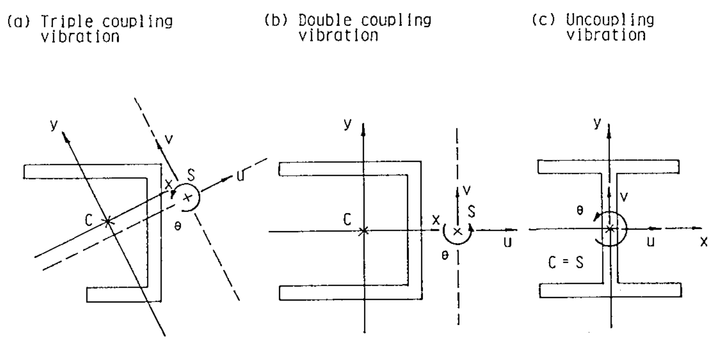
北海道大学工学部　正員　林川俊郎
北海道大学工学部　正員　小幡卓司

１．まえがき

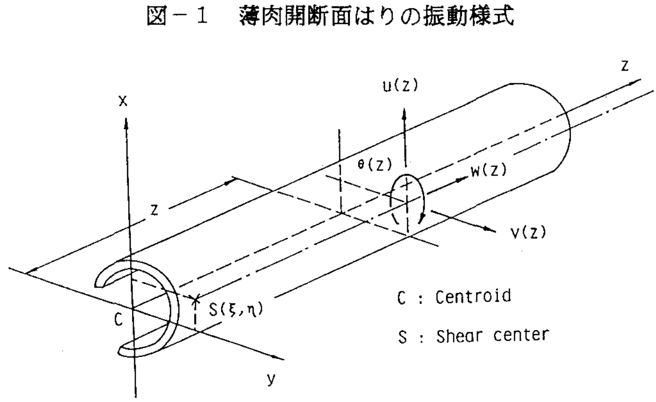
最近、広い幅員を有する連続高架橋、斜角のきつい方杖ラーメン橋、アーチ橋、曲線格子桁橋等が数多く架設されるようになってきた。橋梁構造形式が長大化、複雑化するにつれて、その固有振動性状はますます複雑になってきている。したがって、この種の３次元的な広がりを持つ橋梁の動的設計には、立体固有振動解析が必要となってくる。

一般的に、構造物の固有振動解析は大きく分けて、離散座標系による解と分布座標系による解に分類される。さらに、前者の解法は質量マトリックスの取り扱い方により、集中質量法と整合質量法に分類される。これらの解法は近似解を与えることになるが、同じ要素分割数では、集中質量法よりも整合質量法を用いた解の方がかなり良い精度で計算できると言われている[1]。一方、後者は運動方程式の一般解を用いて、動的な剛性マトリックスを誘導し、通常の変位法と同様の重ね合わせの原理を用いることが可能であり、厳密解を求めることができる。この解法は連続質量法と呼ばれている[2]。

閉じ断面（中実断面）部材より構成された構造物は、軸変形、面内および面外の曲げ変形、St. Venantの純ねじり変形を考慮すれば十分であり、その立体固有振動解析はほぼ体系化されつつある。しかし、図－１に示すような薄肉開き断面部材より構成される構造物の固有振動解析では、曲げねじり変形（そり変形）を無視することはできない。図－１ａのような非対称開断面の場合には、ｘ軸およびｙ軸まわりの曲げ振動が、せん断中心軸Ｓまわりのねじり振動と連成する、いわゆる３重連成振動となる。図－１ｂの１軸対称断面の場合には、ｘ軸またはｙ軸まわりの曲げ振動がねじり振動と連成する２重連成振動となる。図－２ｃの２軸対称断面の場合には、２つの主軸まわりの純曲げ振動と純ねじり振動がお互いに独立した非連成振動となる。しかしながら、薄肉断面はりのせん断中心軸まわりの曲げねじり振動に関する動



図－１　薄肉開断面はりの振動様式



図－２　薄肉開断面部材の座標系と変位成分

Formulation of Eigen Stiffness Matrix of Thin-Walled Beam Segments.
By Toshiro HAYASHIKAWA and Takashi OBATA.

的な剛性マトリックス（固有剛性マトリックス）の定式化は、著者らの知る限りにおいて、研究されていないように思われる。

そこで、本研究の目的は図－２ｃに示した２軸対称開断面に着目して、曲げねじり振動の支配方程式を誘導し、その一般解を用いて、固有剛性マトリックスの定式化を行うことである。また、固有関数を求めるための積分定数マトリックスについても言及する。

２．曲げねじり変形を考慮した薄肉直線部材の運動方程式

図－２に示すような、一様薄肉断面部材について考える。はり部材の変形はせん断中心軸（Ｓ軸）の２主軸方向の変位ｕ、ｖと、そのまわりの断面の回転角θ、それに、断面の図心軸（Ｃ軸）の軸方向変位ｗの４つの変位関数で表される。すなわち、断面上の任意の点ｚの変位をU、V、W で表すと、次のような関係式が成立する。

$$U(x,y,z)=u(z)-(y-\eta)\theta(z) \tag{1a}$$
$$V(x,y,z)=v(z)+(x-\xi)\theta(z) \tag{1b}$$
$$W(x,y,z)=w(z)-xu'(z)-yv'(z)+\theta'(z)\omega_n(x,y) \tag{1c}$$

ここに、（'）はｚに関する微分を表し、(ξ,η)はせん断中心の座標で、$\omega_n(x,y)$は規準化されたそり関数（nomalized warping function）である。式(1)より、ひずみ成分を求めると

$$\begin{gathered}\varepsilon_x=0,\quad \varepsilon_y=0,\quad \varepsilon_z=w'-xu''-yv''+\theta''\omega_n,\\ \gamma_{xy}=0,\quad \gamma_{yz}=\theta'\{(x-\xi)-\partial\omega_n/\partial y\},\quad \gamma_{xz}=-\theta'\{(y-\eta)+\partial\omega_n/\partial x\}\end{gathered} \tag{2}$$

したがって、ひずみエネルギ－Ｖは次のように表示される。

$$V=\frac{1}{2}\int_0^{\ell}(EAw'^2+EI_yu''^2+EI_xv''^2+GJ\theta'^2+EI_w\theta''^2)dz \tag{3}$$

ここで、EAは伸び剛性、EIx、EIyは主軸ｘ，ｙの曲げ剛性、GJはねじり剛性、EIwは曲げねじり剛性である。一方、慣性力のなす運動エネルギ－Ｔは次のように求めることができる。

$$T=\frac{1}{2}\int\int\int\frac{\gamma}{g}(\dot{U}^2+\dot{V}^2+\dot{W}^2)dxdydz \tag{4}$$

ここで、（˙）は時間微分を表す。外力として、せん断中心軸に沿って分布する荷重q_x、q_y、q_z、m_x、m_y、m_z の６成分を考えると、外力のなす仕事（外働）Ｗは次のように表される。

$$W=\int_0^{\ell}(q_xu+q_yv+q_zw+m_xv'+m_yu'+m_z\theta)dz \tag{5}$$

したがって、一般のはりの運動を支配する仮想仕事方程式は次式で与えられる。

$$\delta(V-T-W)=0 \tag{6}$$

ここで、δは変分記号である。部材断面のせん断中心軸Ｓにおける変位ｕ、ｖ とそのせん断中心軸まわりの回転角θと、軸変位ｗではりの曲げ変形、ねじり変形および軸変形を記述すれば、曲げとねじりの連成項の係数はいずれも零となり、式(6)は次のように互いに独立した４つの運動方程式に分離される。

$$EA\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+\frac{\gamma A}{g}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=-\frac{\partial q_z}{\partial z} \tag{7}$$

$$EI_y\frac{\partial^4 u}{\partial z^4}+\frac{\gamma A}{g}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\eta\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}\right)=q_x-\frac{\partial m_y}{\partial z}+\frac{\gamma I_y}{g}\frac{\partial^4 u}{\partial z^2\partial t^2} \tag{8}$$

$$EI_x \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} + \frac{\gamma A}{g}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \xi \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}\right) = q_y - \frac{\partial m_x}{\partial z} + \frac{\gamma I_x}{g} \frac{\partial^4 v}{\partial z^2 \partial t^2} \tag{9}$$

$$EI_w \frac{\partial^4 \theta}{\partial z^4} - GJ\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + \frac{\gamma A}{g}\left(\eta \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \xi \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + r_s^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}\right) = m_z - \frac{\gamma I_w}{g} \frac{\partial^4 \theta}{\partial z^2 \partial t^2} \tag{10}$$

また、付随する境界条件として、$z=0$および$z=\ell$において次式が成り立つ。

$$EA\frac{\partial w}{\partial z}\,\delta W = 0,\quad EI_w \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}\,\delta\left(\frac{\partial \theta}{\partial z}\right) = 0,\quad \left(EI_w \frac{\partial^3 \theta}{\partial z^3} - GJ\frac{\partial \theta}{\partial z}\right)\delta\theta = 0,$$

$$EI_y \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\,\delta\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) = 0,\quad EI_y \frac{\partial^3 u}{\partial z^3}\,\delta u = 0,\quad EI_x \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\,\delta\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right) = 0,\quad EI_x \frac{\partial^3 v}{\partial z^3}\,\delta v = 0 \tag{11}$$

式(7)～(10)の４つの運動方程式を見れば分かるように、wはu、v、θと独立しているが、一般的にu、vとθは連成する。すなわち、図－２ａのような非対称断面のはりの場合、せん断中心軸Ｓが図心軸Ｃに一致しないため、$\xi \neq 0$、$\eta \neq 0$となり、２軸の曲げ振動とねじり振動とは連成することになる。

ここでは、薄肉直線部材の固有剛性マトリックスの定式化を目的としている。すでに、軸変形、曲げ変形および St. Venantの純ねじり変形を考慮した固有剛性マトリックスは誘導されている[3)]。そこで、本研究では曲げねじり振動の基本的な固有剛性マトリックスを誘導することにする。すなわち、図－２ｃに対応する２軸対称断面について考え、回転慣性と外部荷重の項を無視すると、式(10)は次のように簡単化される。

$$EI_w \frac{\partial^4 \theta}{\partial z^4} - GJ\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + \frac{\gamma A}{g} r_s^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = 0 \tag{12}$$

次に、上式(12)の一般解を求める。まず、薄肉直線部材が調和振動するとすれば、固有円振動数をωとおくと、動的なねじり関数$\theta(z,t)$は次のように仮定される。

$$\theta(z,t) = \Theta(z)\exp(i\omega t) \tag{13}$$

したがって、式(13)を式(12)に代入すると、一般解$\Theta(z)$は次のように求められる。

$$\Theta(z) = A\cos\mu z + B\sin\mu z + C\cosh\nu z + D\sinh\nu z \tag{14}$$

ただし、 $\mu = \sqrt{GJ/2EIw(\lambda-1)}$, $\nu = \sqrt{GJ/2EIw(\lambda+1)}$, $\lambda = \sqrt{1+4mr_s^2 EI_w \omega^2/(GJ)^2}$

また、A、B、C、D は積分定数である。はりの曲げねじり振動問題における境界条件は式(11)によって与えられている。また、任意の点ｚにおけるねじり角$\Theta(z)$ 、ねじり率$\Theta'(z)$ 、ねじりモーメント$Mz(z)$、曲げねじりモーメント$Mw(z)$は、式(14)を用いて表示できる。したがって、$z=0$ における状態量ベクトル$\mathbf{X}(0)$は積分定数ベクトル$\mathbf{C}$によって、次のように表される。

$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{A}(0)\,\mathbf{C} \tag{15}$$

ここで、$\mathbf{X}(0) = \{\Theta(0),\ \Theta'(0),\ Mz(0),\ Mw(0)\}^T$、 $\mathbf{C} = \{A,\ B,\ C,\ D\}^T$ である。

同様にして、$z=\ell$における状態量ベクトル$\mathbf{X}(\ell)$は次のように求められる。

$$\mathbf{X}(\ell) = \mathbf{A}(\ell)\,\mathbf{C} \tag{16}$$

したがって、式(15)、(16)より積分定数ベクトル$\mathbf{C}$を消去し、変位および断面力の符号を微分方程式のものから、固有剛性マトリックスのものへ変換すると、最終的に次式を得る。

$$\mathbf{X} = \mathbf{K}(\omega)\,\mathbf{U} \tag{17}$$

ここに、$\mathbf{X}=\{Mzi, Mwi, Mzj, Mwj\}^T$、 $\mathbf{U}=\{\Theta zi, \Theta wi, \Theta zj, \Theta wj\}^T$ 、$\mathbf{K}(\omega)$ は求める固有剛性マトリックスである。この固有剛性マトリックスは固有円振動数ωを含む、４行４列の正方対称マトリックスである。その具体的な要素k_{ij}は次の通りである。

$$k_{11}=(\mu^2+\nu^2)(\nu\cos\mu\ell\sinh\nu\ell+\mu\sin\mu\ell\cosh\nu\ell),\quad k_{13}=-(\mu^2+\nu^2)(\mu\sin\mu\ell+\nu\sinh\nu\ell),$$
$$k_{12}=(\nu^2-\mu^2)(1-\cos\mu\ell\cosh\nu\ell)-2\mu\nu\sin\mu\ell\sinh\nu\ell,\quad k_{14}=(\mu^2+\nu^2)(\cos\mu\ell-\cosh\nu\ell),$$
$$k_{22}=(\mu^2+\nu^2)(\sin\mu\ell\cosh\nu\ell/\mu-\cos\mu\ell\sinh\nu\ell/\nu),\quad k_{24}=-(\mu^2+\nu^2)(\sin\mu\ell/\mu-\sinh\nu\ell/\nu),$$
$$k_{23}=-k_{14},\quad k_{33}=k_{11},\quad k_{34}=-k_{12},\quad k_{44}=k_{22},$$
$$\alpha=EI_w/\{2(1-\cos\mu\ell\cosh\nu\ell)+(\nu^2-\mu^2)/(\mu\nu)\sin\mu\ell\sinh\nu\ell\} \tag{18}$$

ただし、係数αはすべての要素k_{ij} に掛けるものとする。この固有剛性マトリックス$\mathbf{K}(\omega)$は通常の重ね合わせの原理を適用することができる。境界条件による拘束節点処理を施すと、構造物の固有円振動数ωを求めるための振動数方程式が次のように得られる。

$$\det|\mathbf{K}(\omega)|=0 \tag{19}$$

上式は、一般的に固有円振動数ωに関する超越方程式となる。固有値ωは Regula-Falsi法により求めることができる。各固有振動モードに対応した固有値ω_iが求められれば、構造物の各節点におけるねじり角Θziとねじり率Θwiがそれぞれ相対値として計算される。この相対変位Θzi、Θwi より各部材における固有関数$\Theta(z)$の積分定数A、B、C、D は次式により求められる。

$$\mathbf{C}=\mathbf{R}(\omega)\mathbf{U} \tag{20}$$
$$r_{11}=-(1-\cos\mu\ell\cosh\nu\ell+\nu/\mu\sin\mu\ell\sinh\nu\ell),\quad r_{13}=\cosh\nu\ell-\cos\mu\ell,$$
$$r_{12}=\sin\mu\ell\cosh\nu\ell/\mu-\cos\mu\ell\sinh\nu\ell/\nu,\quad r_{14}=\sinh\nu\ell/\nu-\sin\mu\ell/\mu,$$
$$r_{21}=\sin\mu\ell\cosh\nu\ell+\nu/\mu\cos\mu\ell\sinh\nu\ell,\quad r_{23}=-(\sin\mu\ell+\nu/\mu\sinh\nu\ell),$$
$$r_{22}=(1-\cos\mu\ell\cosh\nu\ell)/\mu-\sin\mu\ell\sinh\nu\ell/\nu,\quad r_{24}=-r_{13}/\mu,\quad r_{31}=-\mu r_{22},\quad r_{32}=-r_{12},$$
$$r_{33}=-r_{13},\quad r_{34}=-r_{14},\quad r_{41}=-\mu/\nu r_{21},\quad r_{42}=-r_{11}/\nu,\quad r_{43}=-\mu/\nu r_{23},\quad r_{44}=r_{13}/\nu,$$
$$\beta=1/\{2(1-\cos\mu\ell\cosh\nu\ell)+(\nu^2-\mu^2)/(\mu\nu)\sin\mu\ell\sinh\nu\ell\} \tag{21}$$

ここで、$\mathbf{R}(\omega)$は積分定数マトリックスと呼ばれる。また、係数βは各要素r_{ij}に掛けられるものとする。以上により、薄肉直線部材の曲げねじり振動に関する固有剛性マトリックスの定式化がなされた。したがって、従来のはりの縦振動と横振動に関する固有剛性マトリックスを加味することにより、分布座標系による立体骨組構造物の固有振動解析が可能になるものと考えられる。

３．あとがき

本研究では薄肉直線部材の曲げねじり振動に着目して、固有剛性マトリックスと積分定数マトリックスを誘導した。今後、連続質量法による３次元固有振動解析に役立つものと考えられる。最後に、本研究に貴重な助言を賜った北海道大学名誉教授渡辺 昇氏に深甚なる感謝の意を表します。

（参考文献）

1)林川・佐藤・角田：平面骨組構造物の固有振動解析と固有値の精度、北海道大学工学部研究報告、第148号、pp.1-15、1989. 2)林川：Ｖレッグラーメン橋の固有振動解析とその精度の検討について、構造工学論文集、Vol. 35A、719-725、1989. 3)Leung, A. Y.:Fast Convergence Modal Analysis for Continuous Systems, Journal of Sound and Vibration, Vol. 87, pp.449-467, 1983.