

I-10

下フランジに丸みのある
三角形断面桁の解析的研究

北海道大学名誉教授	正 員 渡辺 昇
北海道大学工学部	正 員 平沢 秀之
北海道大学工学部	西川 実
北海道開発局	正 員 新山 惇
(株)北海道技術コンサルタント	正 員 池田 真也

1. はじめに

プレートガーダーのような薄肉断面をもつ桁に曲げを作用させた場合、曲げに伴うせん断応力は、一般にはせん断力をウェブの断面積で除して算出してよいが、より厳密な値を求める場合には、曲げ理論から算出することはできず、せん断流が板厚中心線に沿った方向に流れるとする、いわゆるせん断流理論によらなければならない。またねじりを作用させた場合には、ねじりによるせん断応力と、そり拘束ねじりの場合ならば、軸方向垂直応力が生じる。ある断面内に生じるねじりモーメントは、一般に純ねじりモーメントとそりねじりモーメントの和として受け持たれ、純ねじりモーメントは断面内にせん断応力のみを生じさせ、そりねじりモーメントは桁の軸方向のそりによる垂直応力と、それにつり合うせん断応力を生じさせる。したがって曲げとねじりが同時に作用する桁では、厳密な計算をする場合、これらの応力をすべて計算しなければならず、その解析は複雑なものとなる。本論文では、「下フランジに丸みのある三角形断面桁の実験的研究」(本論文報告集に掲載予定)の中で示されている実験供試体を対象として、せん断流理論及びそりねじり理論を用いて断面計算を行い、集中荷重を載荷させた場合の垂直応力、せん断応力を求めたものである。

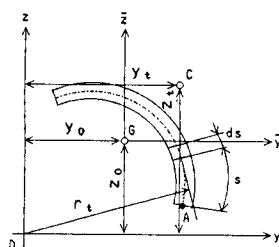


図1 座標関係(1)

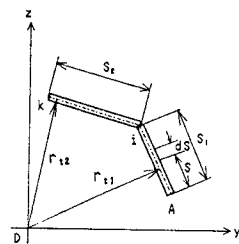


図2 座標関係(2)

2. そりねじり断面定数を求めるための簡便式

そりねじり理論において、まず最初に必要となるのはそり関数 w である。これは式(1)と図1に示すように薄肉断面の板厚中心線の接線と任意の点Dとの距離 r_t と中心線に沿った微小長さ ds との積を積分したものである。

$$w = \int_A^s r_t ds \quad (1)$$

図2に示すように、直線要素で構成される断面の場合には、式(1)の積分計算は簡単な式でできるようになる。図2の場合であれば $w_i = r_{t1} \cdot S_1$ 、 $w_k = w_i + r_{t2} \cdot S_2$ である。次にそり面積 F_w の計算は、図2の座標系では節点 i 、 k 等における値を用いる次式によればよい。

$$F_w = \int_F w dF = \frac{1}{2} \sum (w_i + w_k) \Delta f \quad (2)$$

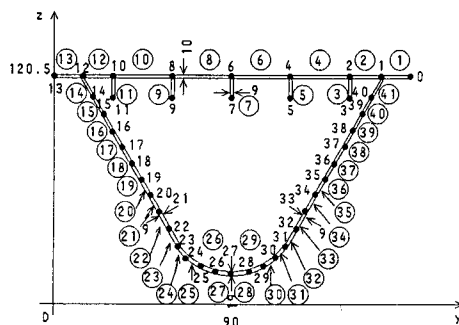


図3 断面分割図

An analytical study of triangular section girder with roundish lower flange
by Noboru WATANABE, Hideyuki HIRASAWA, Minoru NISHIKAWA, Makoto NIYAMA, Sinya IKEDA

ここで Δf は一つの要素の断面積である。同様にして断面定数を求めるのに必要な、 F_y 、 F_z 、 F_{yy} 、 F_{yz} 、 F_{zz} 、 F_{yw} 、 F_{zw} 、 F_{ww} は次式によればよい。

$$F_y = \int_F y dF = \frac{1}{2} \sum (y_i + y_k) \Delta f \quad (3) \quad F_z = \int_F z dF = \frac{1}{2} \sum (z_i + z_k) \Delta f \quad (4)$$

$$F_{yy} = \int_F y^2 dF = \frac{1}{3} \sum (y_i^2 + y_i y_k + y_k^2) \Delta f \quad (5) \quad F_{zz} = \int_F z^2 dF = \frac{1}{3} \sum (z_i^2 + z_i z_k + z_k^2) \Delta f \quad (6)$$

$$F_{yz} = \int_F y z dF = \frac{1}{3} \sum (y_i z_i + y_i z_k + y_k z_k) \Delta f + \frac{1}{6} \sum (y_i z_k + y_k z_i) \Delta f \quad (7)$$

$$F_{yw} = \int_F y w dF = \frac{1}{3} \sum (y_i w_i + y_i w_k + y_k w_k) \Delta f + \frac{1}{6} \sum (y_i w_k + y_k w_i) \Delta f \quad (8)$$

$$F_{zw} = \int_F z w dF = \frac{1}{3} \sum (z_i w_i + z_i w_k + z_k w_k) \Delta f + \frac{1}{6} \sum (z_i w_k + z_k w_i) \Delta f \quad (9)$$

$$F_{ww} = \int_F w^2 dF = \frac{1}{3} \sum (w_i^2 + w_i w_k + w_k^2) \Delta f \quad (10)$$

3. 座標変換

前節で求めた諸量は、計算の当初に用いた任意点Dに関するものであったが、重心の座標をG (y_0 , z_0)、Gを原点とする座標軸をy、z、せん断中心の座標をC (y_t , z_t) とすれば、G、Cに関する諸量を次式による変換式から求めることができる。ここで「のついたものは重心に関する値、～のついたものはせん断中心に関する値である。

$$\bar{y} = y - y_0 = y - \frac{F_y}{F} \quad (11) \quad \bar{z} = z - z_0 = z - \frac{F_z}{F} \quad (12)$$

$$\bar{w} = w - w_0 = w - \frac{F_w}{F} \quad (13) \quad F_{\bar{y}\bar{y}} = \int_F \bar{y}^2 dF = F_{yy} - \frac{F_y F_y}{F} \quad (14)$$

$$F_{\bar{y}\bar{z}} = \int_F \bar{y} \bar{z} dF = F_{yz} - \frac{F_y F_z}{F} \quad (15)$$

$$F_{\bar{y}\bar{w}} = \int_F \bar{y} \bar{w} dF = F_{yw} - \frac{F_y F_w}{F} \quad (16)$$

$$F_{\bar{z}\bar{z}} = \int_F \bar{z}^2 dF = F_{zz} - \frac{F_z F_z}{F} \quad (17)$$

$$F_{\bar{z}\bar{w}} = \int_F \bar{z} \bar{w} dF = F_{zw} - \frac{F_z F_w}{F} \quad (18)$$

$$F_{\bar{w}\bar{w}} = \int_F \bar{w}^2 dF = F_{ww} - \frac{F_w F_w}{F} \quad (19)$$

$$y_t = \frac{F_{\bar{z}\bar{w}} \cdot F_{\bar{y}\bar{y}} - F_{\bar{y}\bar{w}} \cdot F_{\bar{y}\bar{z}}}{F_{\bar{y}\bar{y}} \cdot F_{\bar{z}\bar{z}} - (F_{\bar{y}\bar{z}})^2} \quad (20) \quad \bar{w} = \bar{w} + z_t \cdot \bar{y} - y_t \cdot \bar{z} \quad (21)$$

$$z_t = \frac{-F_{\bar{y}\bar{w}} \cdot F_{\bar{z}\bar{z}} + F_{\bar{y}\bar{z}} \cdot F_{\bar{y}\bar{w}}}{F_{\bar{y}\bar{y}} \cdot F_{\bar{z}\bar{z}} - (F_{\bar{y}\bar{z}})^2} \quad (22)$$

$$F_{\bar{w}\bar{w}} = \int_F \bar{w}^2 dF = F_{ww} + z_t \cdot F_{\bar{y}\bar{w}} - y_t \cdot F_{\bar{z}\bar{w}} \quad (23)$$

式(23)で表される $F_{\bar{w}\bar{w}}$ は一般に C_w または C_H と書き、そりねじり定数という。なお、本節及び前節に関しては、参考文献2)、3)も参照されたい。

4. 断面定数及びそり関数

下フランジに丸みのある三角形断面桁をせん断流理論、そりねじり理論を用いて解析するために、その断面を図3に示すように小面積毎に分割し、それぞれに番号をつけた。断面

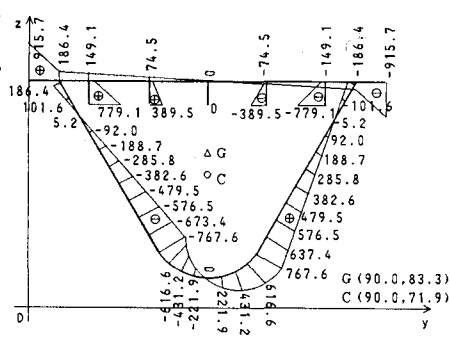


図4 W

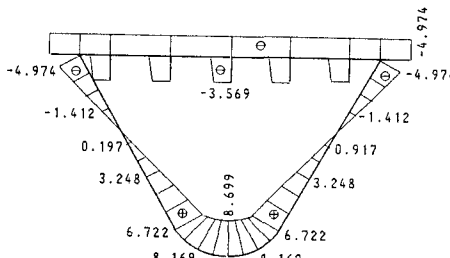


図5 σ_H

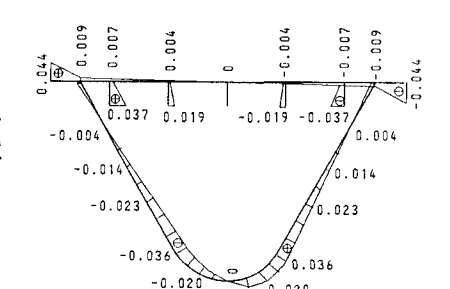


図6 σ_w

寸法の詳細は、参考文献 4) を参照されたい。分割された一つ一つの要素は、2. で示した簡便式で計算するためにすべて直線要素であり、下フランジ部 (24 ~ 31) も直線である。円弧を折れ線とするために近似解となるが、この程度に分割すれば (8 分割) 精度上問題はない。図 3 に示す要素の番号、板厚、座標等を入力データとして、パソコンにより計算した結果、断面定数は次のようになった。

重心 $G(y_g, z_g) = (90.0, 83.3)$

せん断中心 $C(y_t, z_t) = (90.0, 71.9)$

断面二次モーメント $I = 840488 [\text{cm}^4]$

純ねじり定数 $J_T = 863475 [\text{cm}^4]$

そりねじり定数 $C_w = 726636 \times 10^2 [\text{cm}^6]$

また、そり関数 $\tilde{w}$ は図 4 のようになった。

5. 曲げ及びねじりによる応力

5.1 垂直応力

垂直応力は次式により算出する。

$$\text{曲げモーメント } M \text{ による垂直応力 } \sigma_m = \frac{M}{I} z \quad (24)$$

$$\text{そりモーメント } W \text{ による垂直応力 } \sigma_w = -\frac{W}{C_w} \tilde{w} \quad (25)$$

今、支間中央の断面内の図 3 における 12 の点に、集中荷重 P [kg] を鉛直下向きに载荷させた場合を考える。これは、せん断中心軸上に鉛直荷重 P とねじりモーメント $T = P \cdot e$ (e : 偏心距離) を同時に作用させた状態と同等である。このような载荷状態で断面力 M , W を計算し、 σ_m , σ_w , $\sigma = \sigma_m + \sigma_w$ を求めると、図 5 ~ 図 7 のようになる。着目断面は支間の 3/8 の断面である。曲げによる垂直応力に比べ、ねじりによる垂直応力は非常に小さいことが分かる。

5.2 せん断応力

せん断応力は次式により算出する。

$$\text{せん断力 } Q \text{ によるせん断応力 } \tau_q = \frac{Q}{I \cdot t} \int_F z dF \quad (26)$$

$$\text{純ねじりモーメント } T_1 \text{ によるせん断応力 } \tau_1 = \frac{T_1}{J_T} t \quad (27)$$

そりねじりモーメント T_2 によるせん断応力

$$\tau_2 = \frac{T_2}{C_w \cdot t} \int_F \tilde{w} dF \quad (28)$$

(26)、(28) の式に含まれる $\int_F z dF$, $\int_F \tilde{w} dF$ の計算は、式 (4)、(2) によるが、閉断面の場合のこれらの計算を式 (28) を例にとって示す。閉断面の場合はこれらの計算を式 (28) を例にとって示す。閉断面はねじりに対して不静定であるので、任意のある点で切断し (例えば図 3 の点 1 で切断) 静定基本系とする。

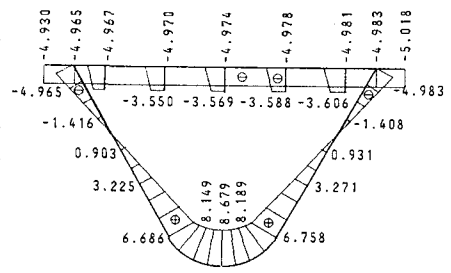


図 7 σ

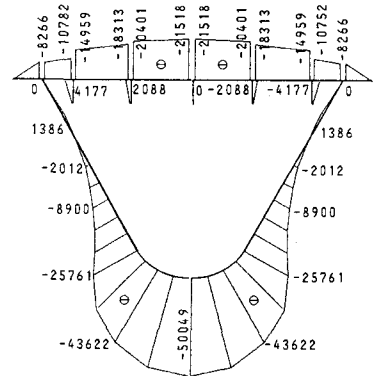


図 8 $[\int_F \tilde{w} dF]_a$

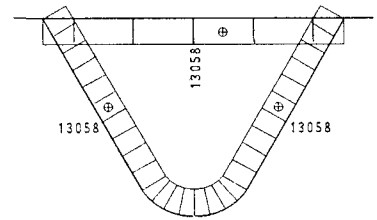


図 9 $[\int_F \tilde{w} dF]_x$

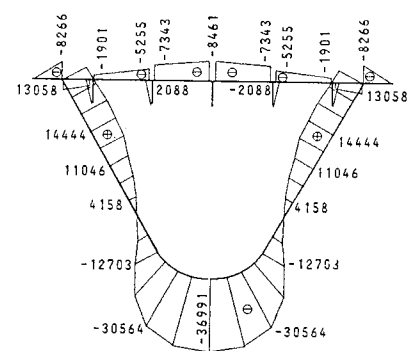


図 10 $\int_F \tilde{w} dF$

この切断した状態で、 $\int_F \tilde{w} dF$ を計算し、 $[\int_F \tilde{w} dF]_a$ とおく。(図8) 次に閉断面における不静定量 $[\int_F \tilde{w} dF]_x$ を次式により求める。

$$[\int_F \tilde{w} dF]_x = -\oint \frac{[\int_F \tilde{w} dF]_a}{t} ds / \oint \frac{ds}{t} \quad (29)$$

ここで $\oint$ は閉断面部の一周積分、 ds は板厚中心線に沿う微小長さである。このようにして求めた $[\int_F \tilde{w} dF]_x$ (図9) と $[\int_F \tilde{w} dF]_a$ を合計し、閉断面における実際の $\int_F \tilde{w} dF$ を求めると図10のようになる。5. 1と同じ载荷状態にした場合のせん断応力の分布を図11～図14に示す。図12は τ_1 のうち、閉断面に生ずるBredtのせん断応力である。曲げによる τ_1 とBredtの τ_{1B} が支配的であることが分かる。

6. おわりに

せん断流理論、そりねじり理論によって曲げに対する断面値、ねじりに対する断面値、さらに集中荷重を載荷させた場合の応力の計算を行った。結果は本文で説明し、図示した通りであるが、この三角形断面の特徴としてつぎの点が挙げられる。

- (1) 閉じ断面であるためねじり剛性が非常に大きい。
- (2) 下フランジに垂直応力が集中することが予想されるが、板厚を大きくすることによりこれを防ぎ、また全体の剛性も高めている。
- (3) リブや張り出し部の自由突出部の長さが短いため、そのつけ根におけるせん断応力集中が小さい。
- (4) 下フランジの曲線部分は、折れ線で近似させることにより精度の良い解が得られる。

<参考文献>

- 1) Bornscheuer: Systematische Darstellung des Biege- und Verdrehvorganges unter besonderer Berücksichtigung der Wölbkrafttorsion, Stahlbau, 1952
- 2) 渡辺 昇: 開き断面連続桁と閉じ断面連続桁の曲げおよび拘束捩れによる応力の計算、工学研究Vol.12、No.2、3、5、6、昭和38年2、3、5、6月
- 3) 林 義税、渡辺 昇: 薄肉断面桁橋のパソコンによるそりねじり解析、土木学会北海道支部論文報告集、昭和63年度
- 4) 渡辺 昇、平沢秀之、西川 実、篠崎紘一、大村登喜夫: 下フランジに丸みのある三角形断面桁の実験的研究、土木学会北海道支部論文報告集第48号掲載予定

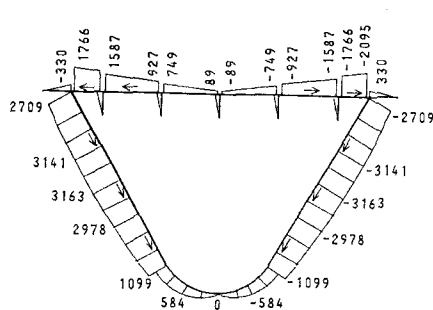


図11 τ_0

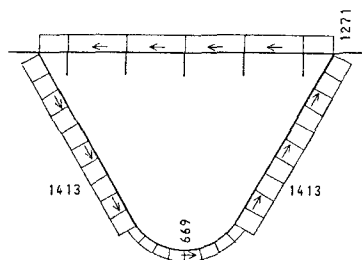


図12 τ_{1B}

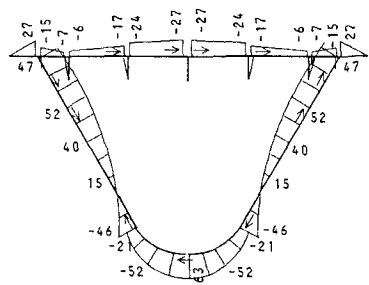


図13 τ_2

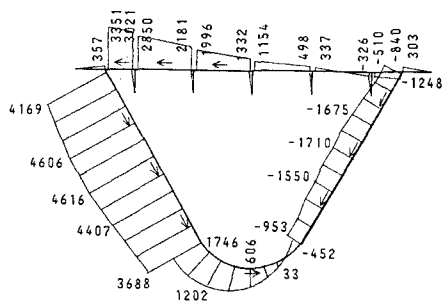


図14 τ