

I-6

せん断変形を考慮した薄肉はりの解析

北海道大学工学部 正員 平沢 秀之  
北海道大学工学部 正員 佐藤 浩一

1. はじめに

Bernoulli-Euler の仮定によるはり理論によれば、軸方向垂直応力とつり合うべきせん断応力が無視されているので、軸方向の応力のつり合い方程式は厳密には満たされていない。このため、せん断変形の影響が無視できないようなはり、例えば、はりの支間に対して桁高の比較的大きいはりや薄肉断面をもつはりに、このはり理論をそのままの形で適用すると、得られた計算結果と、実際の変形や応力との差が大きいくい違い、実用的には使えない場合がある。

せん断変形を考慮したはりの解析法として代表的なものは、

- (1) Bernoulli-Euler の仮定に基づく変位関数を出発点とし、ひとまず解を求めた後、無視されているせん断応力を応力のつり合い方程式を満たすように復活させる方法。
- (2) Timoshenkoのはり理論に代表される方法で、せん断変形を考慮した変位関数を仮定し、はりの方程式を導く方法。

の二つがある。また、これらのはり理論の他に数値的解法として、対象とするはりの性質により、平面応力場としたときの有限要素法や3次元有限要素法などがあり、精度の良い解を得ることが可能である。

本論文では、(1)のBernoulli-Euler の仮定に基づく変位関数を用いるが、これにせん断変形を考慮するために、軸方向変位式に補正項を付加する方法を説明し、薄肉はり部材を対象とした曲げ問題の計算例を二つ示し、有限要素法による平面応力の解との比較を行うものとする。

2. 変位関数

Bernoulli-Euler の仮定によるはり理論によれば、変形前に材軸線に垂直に位置していた断面は、変形後も変形した材軸線に対して垂直になる(図1(a))ため、x軸まわりの曲げ問題のみを考慮すれば、変位関数は次のようになる。

$$U(x, y, z) = 0 \quad \text{-----} \quad (1)$$

$$V(x, y, z) = v(z) \quad \text{-----} \quad (2)$$

$$W(x, y, z) = -y \cdot v'(z) \quad \text{-----} \quad (3)$$

ここで、 $U(x, y, z)$ 、 $V(x, y, z)$ 、 $W(x, y, z)$  はそれぞれx, y, z軸方向変位、 $v(z)$ はx軸まわりの曲げによるy方向の変位である。

Timoshenkoのはり理論によれば、変形後の断面の傾きは $v'(z)$ とは別の関数 $\phi$ を用いており、したがって式(3)は次のようになる。

$$W(x, y, z) = -y \cdot \phi(z) \quad \text{-----} \quad (4)$$

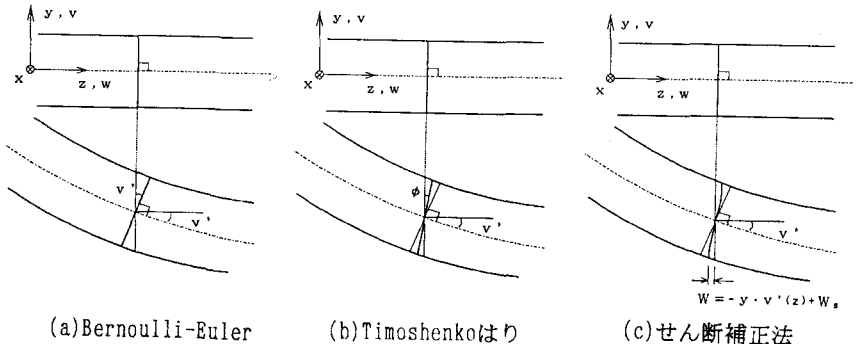


図1 z軸方向変位の仮定

ところで軸方向変位として今、式(3)に $W_s(x,y,z)$ という項を付加してみる。すなわち、

$$W(x,y,z) = -y \cdot v'(z) + W_s(x,y,z) \quad (5)$$

とおく。変位関数をこのように表しても断面不変の仮定、

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad \varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

が満たされている。この変位関数からひずみ成分、応力成分を求めると、次式ようになる。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_z = -y \cdot v''(z) + \frac{\partial W_s}{\partial z} \\ \gamma_{xz} = \frac{\partial W_s}{\partial x} \\ \gamma_{yz} = \frac{\partial W_s}{\partial y} \\ \varepsilon_x = \varepsilon_y = \gamma_{xy} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z = E \varepsilon_z \quad \tau_{xz} = G \gamma_{xz} \quad \tau_{yz} = G \gamma_{yz} \\ \sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

これらのひずみ成分、応力成分からひずみエネルギー $V$ 、及び外力による仕事 $W$ を計算し、これらを仮想働の方程式

$$\delta V - \delta W = 0 \quad (9)$$

に代入することにより、つり合い条件式、境界条件を導くことができる。

### 3. 有限要素解析

前節で導くことのできるつり合い条件式は、解を求めるのが非常に困難な微分方程式であるので、有限要素法による定式化を行う。要素分割の方法は、図2に示すように、はりの長さ方向に通常のはり要素として分割し、さらにその1つのはり要素を断面内にいくつかのせん断補正要素に分割する。前節と同様に $x$ 軸まわりの曲げのみを考慮すれば、はり要素内の変位 $v(z)$ は形状関数を $[S]$ 、節点変位ベクトルを $\{v\}$ とすれば、

$$v(z) = [S] \{v\} \quad (10)$$

と表され、せん断補正要素内の軸方向付加変位 $W_s(x,y,z)$ は、形状関数を $[H]$ 、せん断補正要素の節点位置における変位ベクトルを $\{W_s\}$ とすれば(図2(b))、

$$W_s(x,y,z) = [H] \{W_s\} \quad (11)$$

とおくことができる。

これらの変位式を仮想仕事方程式(7)に代入すると、1つのせん断補正要素について次のような式が得られる。

$$\{\delta v\}^T [k_v^e] \{v\} + \{W_s\}^T [k_{vs}^e] \{\delta v\} + \{\delta W_s\}^T [k_{vs}^e] \{v\} + \{\delta W_s\}^T [k_s^e] \{W_s\} - \{f_v^e\} \{\delta v\} = 0 \quad (12)$$

これを整理してマトリックス表示すると、

$$\begin{bmatrix} [k_v^e] & [k_{vs}^e]^T \\ [k_{vs}^e] & [k_s^e] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{v\} \\ \{W_s\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f_v^e\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (13)$$

となる。ここで、

$$\left. \begin{aligned} [k_v^e] &= EI_{yy} \int_0^L [S'']^T [S''] dz \\ [k_{vs}^e] &= -E \int_0^L y [H_z]^T [S''] dx dy dz \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

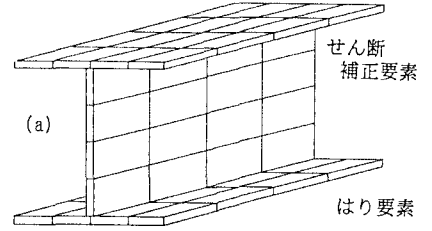


図2 要素分割

$$[k_s^e] = E \iiint [H_z]^T [H_z] dx dy dz + G \iiint [H_x]^T [H_x] dx dy dz + G \iiint [H_y]^T [H_y] dx dy dz$$

であり、Eはヤング率、Gはせん断弾性係数、 $I_{yy}^e$  は1つのせん断補正要素の断面2次モーメントを表す。サフィックスeは1つのせん断補正要素に関することを表す。また $[H_x]$ 、 $[H_y]$ 、 $[H_z]$ は、 $[H]$ をx、y、zで偏微分したことを表す。

次に、1つのはり要素の中に含まれる全部のせん断補正要素に関する剛性方程式(11)を重ね合わせて、1つのはり要素に関する剛性方程式を作成すると、次式ようになる。

$$\begin{bmatrix} [k_v^e] & [k_{vs}^e]^T \\ [k_{vs}^e] & [k_s^e] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{v\} \\ \{w_s\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f_v^e\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad \text{-----} \quad (15)$$

ここで、サフィックスBをつけた $[k_v^e]$ 等の剛性マトリックスは、1つのはり要素に関するものである。さらに全部のはり要素について重ね合わせを行うことにより、はり全体の剛性方程式を次のような形で得ることができる。

$$\begin{bmatrix} [K_v] & [K_{vs}]^T \\ [K_{vs}] & [K_s] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{V\} \\ \{W_s\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_v\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad \text{-----} \quad (16)$$

ここで1行1列成分に関する項のみに着目すると、

$$[K_v]\{V\} = \{F_v\} \quad \text{-----} \quad (17)$$

となってせん断変形を無視した従来のはり理論の剛性方程式となる。式(13)を解くことにより、節点変位が求まり、変位-ひずみ関係式からひずみを求めることができる。

#### 4. 数値計算例

##### 4. 1 計算例(1)

図3に示すような支間24[cm]、桁高8[cm]、厚さ1[cm]の単純支持されたはりの解析を行った。はり要素として軸方向に6分割せん断補正要素として断面内に8分割、要素数48要素として計算を行った。この場合、式(16)中のマトリックス $[K_v]$ は14行14列(1節点2自由度)、 $[K_s]$ は63行63列(1節点1自由度)となり全体の剛性マトリックスは77行77列となる。図3(b)、(c)、(d)に計算結果を示す。図3は変位図で、実線は本法による解、点線はせん断変形を無視した従来のはり理論による解である。また一点鎖線は、三角形要素を用いた有限要素法による平面応力場の解である。本法によればせん断変形の影響が考慮されていることが分かる。図3(c)は軸方向の垂直応力 $\sigma_z$ の分布である。支間中央に近づくにつれ、曲線的な変化をするようになり、三角形要素を用いた有限要素法による解と良く一致している。図3(d)はせん断応力の分布である。従来のせん断変形を無視したはり理論からは、せん断応力を求めることができないため、せん断流理論による解を点線で表した。これは断面に作用するせん断力Q から計算されるため、3つの点線の分布図は同一となる。これらの結果より、支間中央付近では差が見られるが支間中央から離れると3方法ともに良く一致している。

##### 4. 2 計算例(2)

図4(a)に示すような開口部を有するはりについて計算を行った。支間、桁高、板厚は計算例(1)の場合と同じである。開口部に関しては、該当する部分のせん断補正要素を取り除くことによりその影響を考慮し

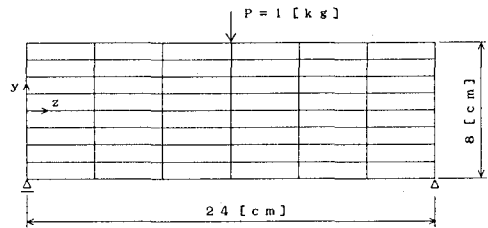
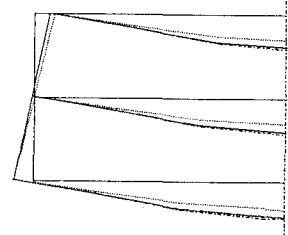
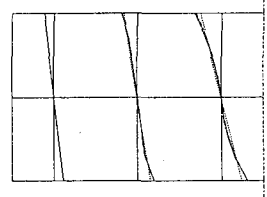


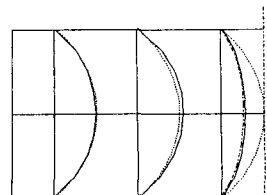
図3(a) 形状



(b) 変位分布



(c) 垂直応力分布



(d) せん断応力分布

た。要素分割数は、はり要素として10分割、せん断補正要素として、開口部のないはり要素は6分割、開口部のあるはり要素は4分割とし、計52要素とした。この場合、式(13)のマトリックス $[K_v]$ は22行22列、 $[K_s]$ は77行77列となり全体の剛性マトリックスは99行99列となる。図4(b)、(c)、(d)に計算結果を示す。これらより本法による解と、有限要素法による平面応力の解が良く対応していることが分かる。

### 5. おわりに

はり要素とせん断補正要素に分割したはりについて有限要素法による定式化を行い、桁高の高い単純支持のはりの計算例を2つ示した。軸方向の変位ベクトル $\{W_s\}$ を付加することにより、従来のはりの曲げ理論による解が修正されてせん断変形による影響が考慮されることがこれらの計算例から示された。計算例ではy-z平面内の2次元問題を扱ったが、x方向に奥行きのある断面、例えばI型断面や箱型断面のはりについても同様に解析することが可能である。実際の計算では、式(13)中の剛性マトリックスの大きさが問題となる。今、はり要素の節点数をN(1節点の自由度を2)、せん断補正要素の節点数をMとすると、式(13)の $[K_v]$ は2N次、 $[K_s]$ はM次となるので、全体の剛性マトリックスの大きさは2N+M次となる。一般的にNよりMの方がかなり大きいので、全体の剛性マトリックスの中ではMが大部分を占める。計算例では、比較的要素数の少ないものを取り上げたが、複雑な断面をもつはりを解析しようとすると、計算機の容量の関係から要素数は制約を受けるため、解法にはバンドマトリックス法やスカイライン法等を適用することが必要である。

### <参考文献>

- 1) 川井忠彦、藤谷義信：梁理論の精密化に関する二、三の試み(その1)、生産研究第25巻第6号、1973
- 2) 川井忠彦、藤谷義信、神津啓時、松沢浩：薄肉梁理論による鉄道車両構体の有限要素解析、日本鋼構造協会第17回大会研究集会マトリックス解析法研究発表論文集、1983
- 3) 藤谷義信：有限要素法によるせん断変形を考慮したはりのねじり解析、日本建築学会構造系論文報告集、第349号、1985
- 4) 藤谷義信：薄肉はり構造解析、培風館、1990

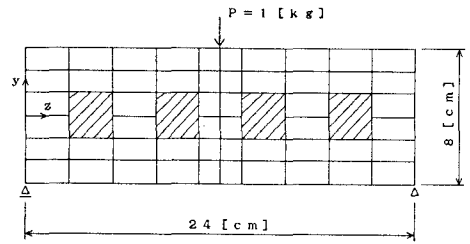
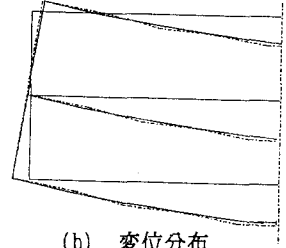
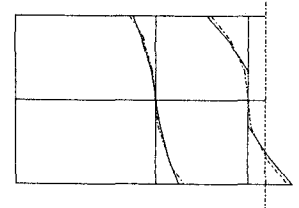


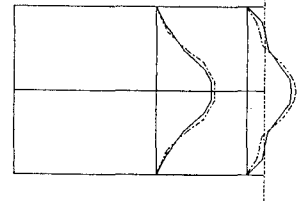
図4(a) 形状



(b) 変位分布



(c) 垂直応力分布



(d) せん断応力分布