I－3

パソコンによる格子桁の解析手法について

北海道大学工学部　正員　佐藤浩一
北海道大学工学部　正員　小幡卓司
北海道大学工学部　正員　平沢秀之
(株)釧路製作所　正員　杉江豊

1、まえがき

最近、市街地の中小河川の橋梁において、非常に厳しい桁高制限をうける場合が増えてきており、従来の合成桁橋や格子桁橋では対応することは困難になってきている。このような時代のニーズに応えて、新形式低桁橋とした多主桁橋の開発·研究が行われている[1)]。文献[2)]では「多主桁橋の設計は、格子桁理論により計算するのを標準とする」としている。このような多主桁の格子桁橋において、主桁の本数が２０本、横桁の本数が３本にもなると、剛性マトリックス法などを用いてコンピュータ解析を行うとすれば、外力ベクトルと変位ベクトルとの関係を示す多元連立一次方程式(剛性方程式)を解かなければならない。その元数もかなりのものになるので膨大な容量(メモリー)と計算時間を要し、大型コンピュータが必要となり、その方程式の解法が計算精度および計算速度に大きな影響を与えることになる。一方、文献[3)]ではコンピュータを用いず、電卓で、しかもかなりの精度で、荷重分配影響線を求める解析法について述べている。最近では、パソコンが普及して、手軽に購入でき、これらの計算をパソコンで手早く解析しうるならば、設計者にとって便利であり、好都合となるばかりでなく、大幅な設計コスト低減が期待できるのでそれを利用するのも一方法と思われる。現在のパソコンは３２ビットとなっており、また、容量ならびに演算速度も１０年前の大型コンピュータとほぼ同一になっていると言われている[4)]。この点から見ても、パソコンの性能はかなりのもと思われる。しかしながら、パソコンをＣＰＵ(中央処理装置)として使用する場合には、大型コンピュータと比較して、計算に時間がかかることや容量に制限があるなどの欠点を有しているが、従来、大型コンピュータでなければ処理できなかった有限要素解析も、最近のコンピュータ技術の進歩によって、手近かにあるパソコンでも処理できるようになってきている[5)]。それにはパソコンの性能から種々の工夫が必要である。最初に、使用するプログラム言語の選択である。科学技術計算用に開発されたプログラム言語 FORTRAN は数値計算を主体としており、今後のパソコンの発展にも容易に対応できる有利さがあると思われるので本報告で用いる。次に、剛性マトリックスの性質を十分に利用することである。剛性マトリックスは対称マトリックスであり、しかも多くの場合、キングサイズであり、その非零成分は対角成分の付近に集中するという特徴がある。即ち、疎行列であり、バンドマトリックスである。最後は、解法(ソルバー)の選択である。連立一次方程式の解法として修正コレスキー分解を一次元配列し、スカイライン法を使用する。

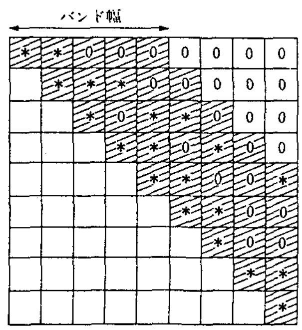
本報告は、パソコンを用いて直接 MS-FORTRAN でメモリーを節約して多主桁格子桁橋の構造解析を行うための一手法としてのスカイライン法について説明し、節点数、要素数、パソコンの機種、演算プロセッサーの有無が演算時間にどのような影響を及ぼすかを検討するのが目的である。計算機の今後の発展は、超大型化と小型化の２極化となると考えられている。超大型はスーパーコンピュータであり、小型の最も代表的なのはパソコンである。いずれにしても、本報告での解析手法は FORTRAN を用いる限り、両コンピュータに適用できるものである。

Method of Structural Analysis of Grillage Girders by Using Personal Computers
by Koichi SATO, Takashi OBATA, Hideyuki HIRASAWA and Yutaka SUGIE

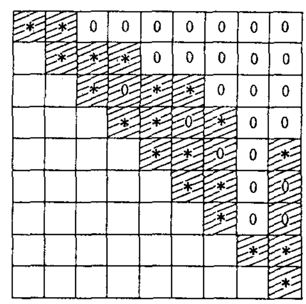
2．修正コレスキー分解とスカイライン法

前述のように剛性マトリックスは対称であり、キングサイズであり、バンドマトリックスであり、スパース行列などの性質を利用する。その一つとしては、バンドマトリックス法(band matrix method)を用いることである。この手法は、図－1に示すように剛性マトリックスの各列において、対角成分から数えた最初の非零成分までの長さの最大値をバンド幅とし、その範囲のみを計算することにより、計算効率を上げたものである。また、剛性マトリックスの各列のバンド幅内の成分のみを一次元配列に記憶することによりメモリーの効率を上げることができる。しかしこの手法は、一つでもバンド幅の大きい要素があれば効率が下がるため、一要素で節点番号の差が大きい場合には不利となる。この欠点を改良した手法がスカイライン法である。スカイライン法は剛性マトリックスの各列ごとにバンド幅を決定する手法であり、一要素によって全体の効率が大幅に下がることがない。スカイライン法では、図－2に示すように各列ごとに非零成分の幅を計算し、その範囲のみを一次元配列に記憶する。そして、計算する値が非零成分であるかどうかを常に検討して、計算を進める方法である。

図－2におけるような正方行列 K を仮想的二次元配列による全体剛性マトリックスとし、その K を左下三角行列 L と右上三角行列 U との積で表示する。次に、この U を対角行列 D を導入して $U=D\cdot L^T$ のようにおけば、$K=LDL^T$ のように分解することができる。この分解を修正コレスキー分解という。



図－1　バンドマトリックス法

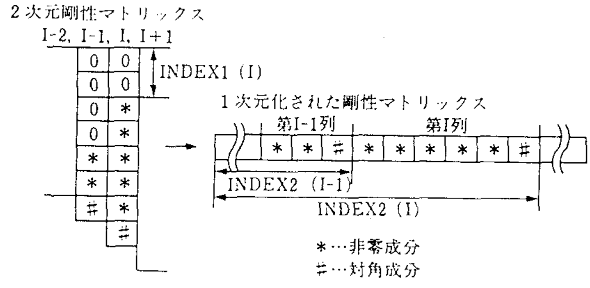


図－2　スカイライン法

3．剛性マトリックスの一次元配列(スカイライン用)の求め方

3.1 スカイライン用の一次元配列の番号の作成(図－3参照)

必要なデータは全節点数、全要素数、各要素の各節点番号である。これらを与えて、全体の剛性マトリックスの第Ｉ列の最初の非零成分である行番号 INDEX1(I) と全体の剛性マトリックスの第Ｉ列の対角成分の一次元配列における位置 INDEX2(I) を決める。まず、各列の最初の非零成分である行番号 INDEX1(I) を求める。また、第(Ｉ－１)列と第Ｉ列の対角成分の一次元配列での関係は、求めた INDEX1(I) を用いて



図－3　剛性マトリックスの一次元配列

INDEX2(I)=INDEX2(I-1)+I-INDEX1(I)+1 で表示される。これで、各列の最初の非零成分を示す行番号 INDEX1(I) と各列の対角成分の一次元配列における番号 INDEX2(I) が決まる。従って、第Ｋ行第Ｉ列は一次元配列で INDEX2(I)－Ｉ+Ｋ で表示されることになる。

3.2 スカイライン用の各節点の自由度番号の作成

必要なデータは全節点数である。これを与えて、各節点の全体の剛性マトリックスにおける自由番号を求める。

3.3 スカイライン用の一次元配列の剛性マトリックスの作成

必要なデータは全節点数、荷重が作用している節点番号、荷重の個数、荷重である。これらを与えて、

a) 節点に作用する荷重を全体の剛性マトリックスに合致した位置に入れる。
b) 各要素の節点番号の全体剛性マトリックスにおける自由度番号を求める。
c) 要素の剛性マトリッマスを求める。
d) スカイライン用の一次元配列の全体剛性マトリックスを求める。

3.4 スカイライン用の境界条件処理方法

通常、二次元配列の剛性マトリックスの境界条件処理方法では成分の入れ替えを行うが、一次元配列の場合はやや面倒であり次のようにする。必要なデータは全節点数、拘束数、各列の最初の非零成分である行番号 INDEX1(K)、各列の対角成分の一次元配列における通し番号 INDEX2(K)、一次元配列におけるＪ番目の値、全体剛性マトリックスにおける荷重項である。これらを与えて、境界条件の処理を行う。いま第Ｋ行目に拘束条件が与えられているとすれば、第１列および第Ｋ列が対角成分のみの場合はスキップする。第Ｋ列の最初の非零成分であるＩ行から対角成分の一つ前までの成分を零にする。第Ｋ行の第(Ｋ＋１) 列から第Ｎ列までの成分を零にする。第Ｋ行の荷重項を零にする。結局、全体剛性マトリックスにおける一次元配列において仮想的二次元配列のＫ行Ｋ列の成分を対角成分を除いて零とし、荷重項を零とすることである。ただし、対角成分は１とする。

3.5 スカイライン法による解法

スカイライン法による解法においては、境界条件処理後の一次元配列の剛性マトリックスを一次元配列のまま修正コレスキー分解し、分解後に後退代入して解くことになる。この場合 L^T の対角成分は全部１なのでその位置に対角行列Ｄをストックすればよいので、Ｄのためにメモリーは増加することはない。解き方(プログラミング)の一例は文献[6)]に示されているので、ここでは省略する。

４．多主桁格子桁橋の解析例

文献[2)]において、多主桁橋を格子桁理論により計算する場合、主桁の剛性(曲げ剛性ＥＩ、純ねじり剛性GJ_T、反りねじり剛性EC_W)および横桁の剛性(曲げ剛性EI_Q、純ねじり剛性GJ_{TQ}、反りねじり剛性EC_{WQ})の考慮の仕方を次の(1),(2)のように示している。

(1)直角格子桁橋あるいは直角に近い斜角格子桁橋の場合。

(2)斜角格子桁橋、曲線格子桁橋の場合。

しかしながら、これらの格子桁橋の構造特性などは既に多くの研究者によってなされているので本報告では省略する。ここでは、パソコンによる格子桁橋の解析手法に主眼を置いているので、節点数、要素数、パソコンの機種、演算プロセッサーの有無が演算時間にどの程度影響を及ぼすかを検討する。なお、数値計算例および計算精度に関しては、文献[6)]に示されているので、ここでは省略する。

本報告での検討の対象とした多主桁格子桁橋は直角格子桁橋とし、主桁に関しては曲げ剛性と純ねじり剛性を考慮、横桁に関しては曲げ剛性と純ねじり剛性を考慮した。主桁本数は ｍ＝１５本と固定し、主桁間隔は１００ｃｍと固定した。横桁本数 ｎ は3本、５本、７本、９本、・・・・・・・、４１本、４３本、４５本と２本づつ増やしていった。横桁間隔は１００ｃｍ とした。表－１に諸元と演算時間(秒)を示している。表－１の中の機種１とは NEC 9801-VM2 であり、機種２とは NEC 9801-RA2 であり、機種３と

は 演算プロセッサーを搭載した NEC 9801-RA2 である。表－1よりわかることは、節点数 705、要素数 1320 まで解析することが可能であった。その場合の一次元配列は 97380 である。パソコンでは一次元配列は 100000 までのようであるのでほぼ限界に近いと思われる。また、演算時間も 9801-VM2 の場合は約54分であり、9801-RA2 の場合は約18分であり、演算プロセッサーを搭載した 9801-RA2 の場合は約5分であった。このように機種3は機種1の約10倍計算が速いことがわかる。各機種とも演算時間は横桁本数 n にほぼ比例して増加していることもわかる。このように多主桁格子桁橋の解析は大型コンピュータを利用するまでもなく、演算プロセッサーを搭載すれば、パソコンで十分対処できるものと思われる。反りねじり剛性をも考慮した多主桁格子桁橋についてのパソコン用プログラムも作成済みである。これについては別の機会に発表する予定である。

表－1　主桁本数 m＝15本 、横桁本数 n の場合

n	節点数	要素数	一次元配列	演算時間(秒)		
				機種1	機種2	機種3
3	75	102	8550	190	72	20
7	105	160	12780	317	120	33
5	135	218	17010	447	170	47
9	165	276	21240	576	216	60
11	195	334	25470	706	263	73
13	225	392	29700	837	311	87
15	255	450	33930	973	360	100
17	285	508	38160	1109	407	113
19	315	566	42390	1247	456	127
21	345	624	46620	1388	503	140
23	375	682	50850	1532	553	153
25	405	740	55080	1680	600	167
27	435	798	59310	1830	647	180
29	465	856	63540	1969	695	193
31	495	914	67770	2118	744	207
33	525	972	72000	2269	792	220
35	555	1030	76230	2364	840	233
37	585	1088	80460	2570	887	247
39	615	1146	84690	2734	937	260
41	645	1204	88920	2893	985	273
43	675	1264	93150	3055	1033	287
45	705	1320	97380	3213	1080	300

5．あとがき

本報告で示したように、NEC 9801-RA2 に演算プロセッサーを搭載すれば、節点数 705、要素数 1320 の格子桁を約5分で解析することができた。これは本プログラムのパソコンでのほぼ限界であるが、大型コンピュータを利用するまでもなく、パソコンで十分対処できるものと思われる。

本報告のパソコンを用いたスカイライン法のプログラム言語は FORTRAN 77 を使用しているので、メモリーがオーバーするような場合は簡単に大型コンピュータに移せることを付記しておく。

参考文献

1) 村田勝弘、藤本義輝、渡辺昇、小幡卓司 ： 桁高の低い multi-box 格子桁橋の構造特性について、土木学会北海道支部論文報告集、第47号、pp.1-4 、1991.
2) 北海道土木技術会鋼道路橋研究委員会編 ： 北海道における鋼道路橋の設計及び施工指針、1989.
3) 渡辺昇、佐藤浩一、小幡卓司、小笠原数夫 ： 多主桁格子桁の荷重分配影響線の解析法について、土木学会北海道支部論文報告集、第47号、pp.9-14 、1991.
4) 座古　勝 ： 数値複合材料力学、養賢堂、1989.
5) 三好俊郎 ： MS-FORTRAN による有限／境界要素解析プログラミング、サイエンス社、1985.
6) 佐藤浩一、渡辺昇、小幡卓司、井上稔康 ： 一次元配列のＩＣＣＧ法とスカイライン法のパソコンへの適用について、土木学会北海道支部論文報告集、第46号、pp.13-18、1990.