

I-2

不完全合成二層板の弾性座屈 解析について

北海道大学工学部 正員 佐藤 浩一

1. まえがき

現在用いられている鋼とコンクリートとの合成構造物の設計ガイドラインとして、最近、文献¹⁾が出版され、異種材料を合成し複合構造物として設計することが今後益々重要になるものと思われる。

本論文では、鋼板とコンクリート床版からなる合成板に限定せず、等方性材料であるが、弾性係数、ポアソン比、板厚等の異なる二枚の板を接着剤で合成した合成板（二層板）を考える。頭つきスタッドジベルの代わりに接着剤を用いていることになる。従って、接着剤が完全に剛であるならば、完全合成二層板と考えることができる。ここでは接着剤は完全に剛でなくその変形を考慮した場合の二層板について考える（以下、不完全合成二層板という）。このような不完全合成二層板の弾性座屈についてはあまり研究されていないようである。そこで、本論文は不完全合成二層板の弾性座屈について理論式を示し、弾性座屈について考察し、弾性座屈荷重を求め、更に、四辺単純支持板の場合に、定量的に座屈荷重を求めることができるように、無次元量として α , β , γ なるパラメータを導入したのでそれを説明し、数値解析により不完全合成二層板の座屈荷重特性を示す。即ち、無次元量の $\beta = 0$ の場合が完全合成二層板であり、 $0 < \beta < 1$ の場合が不完全合成二層板であり、 $\beta = 1$ の場合が重ね二層板であることを示すものである。

2. 不完全合成二層板の横荷重による解析理論

図-1、2 は本解析で用いる第一板と第二板との合成板（二層板）を示している。

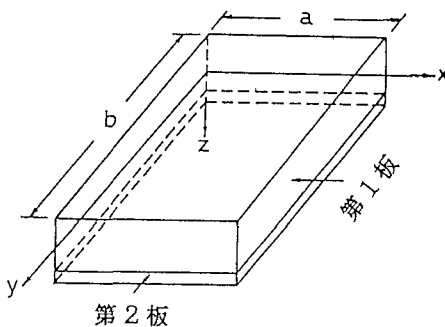


図-1 合成二層板の座標

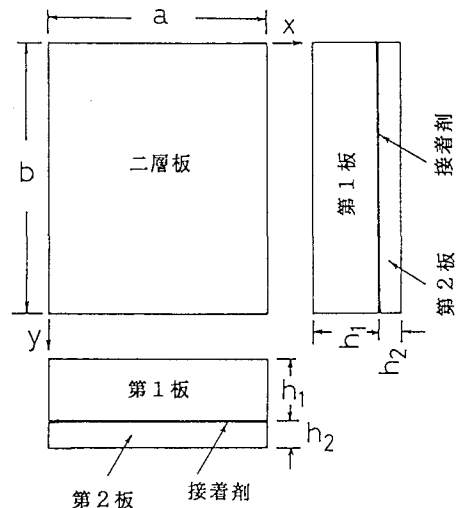


図-2 合成二層板

不完全合成二層板(接着剤の弾性変形を考慮した合成二層板)の横荷重が作用する場合の微分方程式は、次の2個の偏微分方程式になる^{6), 9), 11), 12)}。

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^4 w_v(x, y) = \frac{p_z(x, y)}{D_v} \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^4 w_o(x, y) - \kappa^2 \nabla^2 w_o(x, y) = \frac{p_z(x, y)}{D_o} \end{array} \right. \quad (2)$$

ただし、 $D_v = \bar{E}_2 I_v$, $D_o = D_v \frac{\bar{n} I_2 + I_1}{A_1 s_1 s}$

$$\bar{E}_2 = E_2 / (1 - \nu_2^2) , \quad \bar{E}_1 = E_1 / (1 - \nu_1^2) , \quad \bar{n} = \bar{E}_2 / \bar{E}_1 , \quad (3)$$

$$I_v = I_2 + I_1 / \bar{n} + A_2 s_2 s = I_2 + I_1 / \bar{n} + A_1 s_1 s / \bar{n} = I_2 + I_1 / \bar{n} + A_v s_1 s_2$$

$$\kappa^2 = K \frac{\bar{n} I_v}{\bar{n} I_2 + I_1} \frac{\bar{n}}{\bar{E}_2 A_1} \frac{s}{s_1}$$

D_v は二層板の板剛性、 I_v は第二板に換算した合成断面の単位幅あたりの断面二次モーメント、 I_2 は第二板のその重心Sに関する単位幅あたりの断面二次モーメント、 I_1 は第一板のその重心Cに関する単位幅あたりの断面二次モーメント、 E_1 は第一板のヤング率、 E_2 は第二板のヤング率、 ν_1 は第一板のポアソン比、 ν_2 は第二板のポアソン比、 A_1 は第一板の単位幅あたりの断面積、 A_2 は第二板の単位幅あたりの断面積、 s は第一板の重心Cと第二板の重心Sとの距離、 s_1 は合成断面の中立軸Vと第一板の重心Cとの距離、 s_2 は合成断面の中立軸と第二板の重心Sとの距離である。式(3)の D_v は文献⁵⁾ の p.5 および文献⁸⁾ の p.391 にある二層板の場合の D_v と一致することを確認してある。

3. 不完全合成二層板の弾性座屈の微分方程式

前節までの荷重は静的な横荷重である。ここでは合成二層板の中立面に作用する縦荷重の圧縮力による弾性座屈について考察する。完全合成二層板の横たわみに関する式(1)は板剛性(D_v)で横荷重($p_z(x, y)$)が作用する平板の曲げに関する微分方程式である。同様に、式(2)は板剛性(D_o)で横荷重($p_z(x, y)$)が作用する他に引張力に相当する($H = D_o \cdot \kappa^2$)が中立面に作用する平板の微分方程式である。図-3に示すような面内力 p_{vex} が作用する長方形合成二層板を考える。式(1)は次のような微分方程式になる。

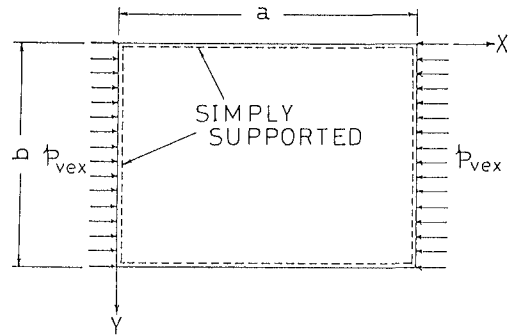


図-3 面内力 p_{vex} が作用する
四辺単純支持二層板

$$\nabla^4 w_v(x, y) = \frac{1}{D_v} \left(p_z(x, y) + p_{vx} \frac{\partial^2 w_v(x, y)}{\partial x^2} \right) \quad (4a)$$

式(1)と同様にして、式(2)は次のような微分方程式になる。

$$\nabla^4 w_o(x, y) - \kappa^2 \nabla^2 w_o(x, y) = \frac{1}{D_o} \left(p_z(x, y) + p_{ox} \frac{\partial^2 w_o(x, y)}{\partial x^2} \right) \quad (4b)$$

式(4a), (4b) において、 p_{vx} と p_{ox} を次のようにおく⁸⁾。

$$p_{vx} = -\lambda_v p_{vx0} \quad (5a)$$

$$p_{ox} = -\lambda_o p_{ox0} \quad (5b)$$

ここで、 λ は共通係数で荷重係数という。

面内端荷重として徐々に増大していくと、横荷重 $p_z(x, y)$ が存在しなくても、平板は面外にたわむ。従って、式(4a)で、 $p_z(x, y)=0$ とおき、式(5a)を式(4a)に代入すれば、次式のような微分方程式を得る。

$$\nabla^4 w_v(x, y) + \frac{\lambda_v}{D_v} p_{v \times 0} \frac{\partial^2 w_v(x, y)}{\partial x^2} = 0 \quad (6a)$$

同様に、式(4b)で、 $p_z(x, y)=0$ とおき、式(5b)を式(4b)に代入すれば、次式のような微分方程式を得る。

$$\nabla^4 w_o(x, y) - \kappa^2 \nabla^2 w_o(x, y) + \frac{\lambda_o}{D_o} p_{o \times 0} \frac{\partial^2 w_o(x, y)}{\partial x^2} = 0 \quad (6b)$$

文献¹⁰⁾に示されているようにビームカラムと同様にオイラーの座屈公式で表示すれば、図-3のような面内力が作用する四辺単純支持板では、基準値として次式ようになる。

$$p_{v \times 0} = \frac{\pi^2 D_v}{a^2} \quad (7a), \quad p_{o \times 0} = \frac{\pi^2 D_o}{a^2} \quad (7b)$$

4. 四辺単純支持の不完全合成二層板の弾性座屈

長方形板の境界条件が四辺単純支持ならば、板のたわみ面を次式のように仮定する。

$$w_v(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (8a)$$

$$w_o(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (8b)$$

$$(m = 1, 2, \dots; n = 1, 2, \dots)$$

式(8a)、(8b)は四辺単純支持の境界条件を満足する。式(8a)を式(6a)に代入すれば、有意解として次式を得る。

$$\frac{m^4 \pi^4}{a^4} + 2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \frac{n^2 \pi^2}{b^2} + \frac{n^4 \pi^4}{b^4} - \frac{\lambda_v}{D_v} \cdot \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \cdot p_{v \times 0} = 0 \quad (9a)$$

同様に、式(8b)を式(6b)に代入すれば、有意解として次式を得る。

$$\frac{m^4 \pi^4}{a^4} + 2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \frac{n^2 \pi^2}{b^2} + \frac{n^4 \pi^4}{b^4} + \kappa^2 \left(\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right) - \frac{\lambda_o}{D_o} \cdot \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \cdot p_{o \times 0} = 0 \quad (9b)$$

式(9a)より次式を得る。

$$\lambda_v p_{v \times 0} = \frac{D_v \cdot a^2}{m^2 \pi^2} \left\{ \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right\}^2 \quad (10a)$$

同様に、式(9b)より次式を得る。

$$\lambda_o p_{o \times 0} = \frac{D_o \cdot a^2}{m^2 \pi^2} \left\{ \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right\}^2 + \frac{D_o \cdot \kappa^2 \cdot a^2}{m^2 \pi^2} \left\{ \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right\} \quad (10b)$$

式(7)を用いれば、式(10)は次式ようになる。

$$\lambda_v = \left\{ m + \frac{1}{m} \left(\frac{n \cdot a}{b} \right)^2 \right\}^2 \quad (11a)$$

$$\lambda_o = \lambda_v \cdot \frac{1}{\beta_{mn}} \quad (11b)$$

ここで、

$$\beta_{mn} = \frac{1}{1 + \frac{\kappa^2}{\mu_{mn}^2}} = 1 - \alpha_{mn} \quad (12)$$

ここで、

$$\mu_{mn}^2 = \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \quad (13)$$

λ の最小値は式(11)において $n=1$ とすれば求まる。与えられたアスペクト比に対して、限界荷重は式(11a),(11b)を最小にする m を求めればよい。正方形の場合、 $m=1$ がこの条件を満足する。

結局、式(6a),(6b)の限界荷重は次式によって求まる。

$$(p_{vx})_{cr} = \left\{ m + \frac{1}{m} \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right\}^2 \cdot \frac{\pi^2 \cdot D_v}{a^2} = \frac{4\pi^2 \cdot D_v}{a^2} \quad (14a)$$

および

$$(p_{ex})_{cr} = \left\{ m + \frac{1}{m} \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right\}^2 \cdot \frac{\pi^2 \cdot D_e}{a^2} \cdot \frac{1}{\beta_{11}} = \frac{4\pi^2 \cdot D_e}{a^2} \cdot \frac{1}{\beta_{11}} \quad (14b)$$

ここで、 β_{11} と μ_{11} は式(12)と式(13)において、 $m=n=1$ とおくことによって求めることができる。この公式は柱の座屈のオイラーの公式と相似である。 $(p_{vx})_{cr}$ あるいは $(p_{vex})_{cr}$ は板の単位幅の限界圧縮荷重であり、 D_v あるいは D_e は単位幅の板剛性である。限界荷重は D_v あるいは D_e に比例することは明らかである。比、 $(p_{vx})_{cr}/(p_{ex})_{cr}$ は

$$\gamma_{11} = \frac{(p_{vx})_{cr}}{(p_{ex})_{cr}} = \frac{D_v}{D_e} \cdot \beta_{11} = \frac{A_1 s_1 s}{\bar{n} I_2 + I_1} \cdot \beta_{11} = \frac{A_1 s_1 s}{\bar{n} I_2 + I_1} \cdot (1 - \alpha_{11}) \quad (15)$$

不完全合成二層板の限界荷重、 $(p_{vex})_{cr}$ は次式で求まる。

$$\frac{1}{(p_{vex})_{cr}} = \frac{1}{(p_{vx})_{cr}} + \frac{1}{(p_{ex})_{cr}} = \frac{1}{(p_{vx})_{cr}} \left\{ 1 + \frac{(p_{vx})_{cr}}{(p_{ex})_{cr}} \right\} \quad (16)$$

式(15)の γ_{11} を式(16)の $(p_{vex})_{cr}$ に代入すれば、

$$\begin{aligned} \frac{1}{(p_{vex})_{cr}} &= \frac{1}{(p_{vx})_{cr}} (1 + \gamma_{11}) = \frac{1}{(p_{vx})_{cr}} \left(1 + \beta_{11} \cdot \frac{I_{12v}}{I_{12}} \right) \\ &= \frac{1}{(p_{vx})_{cr}} \frac{(I_{12} + \beta_{11} \cdot I_{12v})}{I_{12}} \end{aligned} \quad (17)$$

$$\text{ここで、} I_v = I_{12} + I_{12v} ; I_{12} = I_2 + \frac{I_1}{\bar{n}} ; I_{12v} = \frac{A_1 s_1 s}{\bar{n}} \quad (18)$$

式(16)における p_{vx} および p_{vex} の "v" および "ve" はそれぞれ完全合成二層板および不完全合成二層板を意味している。

5. 四辺単純支持の不完全合成二層板の弾性座屈荷重特性

二層板は式(12)で定義される β_{mn} の値によって、大きく次の3つに分類される。

- 1) $\beta_{mn} = 0$, 即ち、 $\alpha_{mn} = 1$, $\gamma_{mn} = 0$, の場合は完全合成二層板。
- 2) $0 < \beta_{mn} < 1$, 即ち、 $\alpha_{mn} = 1 - \beta_{mn}$, $\gamma_{mn} = \frac{A_1 s_1 s}{\bar{n} I_2 + I_1} \cdot \beta_{mn}$, の場合は不完全合成二層板。
- 3) $\beta_{mn} = 1$, 即ち、 $\alpha_{mn} = 0$, $\gamma_{mn} = \frac{A_1 s_1 s}{\bar{n} I_2 + I_1}$, の場合は重ね二層板。

図-4は α_{11} と κa との関係を示したものである。縦軸は α_{11} であり、横軸は κa である。

α_{11} は式(12)において、 $m=n=1$ とおけば得られる、一方、式(3)で定義される κ は重要な定数であり、この κ に辺長 "a" を乗ずれば、 κa は無次元量となる。弾性座屈荷重特性を調べるために重要な値である。

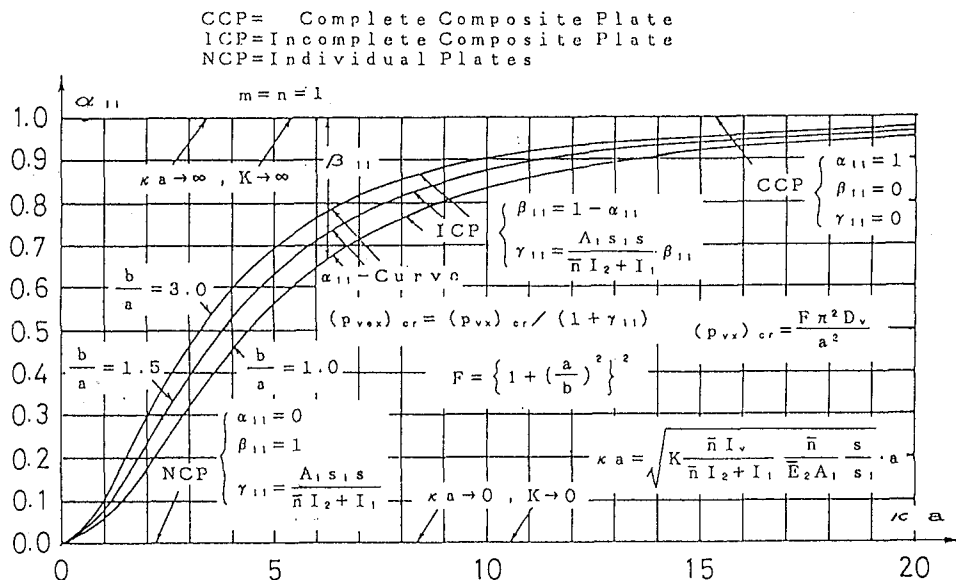


図-4 不完全合成二層板の α_{11} 曲線

次に、図-4の使い方を説明しよう。

最初に、断面諸元を与え、式(3)を用いて κ の値を求め、この κ に辺長 "a" を乗ずる。二番目に κa の値をプロットして図上で α_{11} を求める。従って、 $\beta_{11} = 1 - \alpha_{11}$ も求めることができる。三番目に γ_{11} を $A_1 s_1 s / (\bar{n} I_2 + I_1) \cdot \beta_{11}$ で求める。最後に、この γ_{11} を式(17)の $(p_{vex})_{cr}$ に代入すれば、不完全合成二層板の場合の弾性座屈荷重が求まる。

更に、数値計算例によって説明しよう。材料は特に指定しない。

不完全合成二層板の一般的な諸元は次のようであるとする(図-1、2参照)。

長方形板の大きさは $a \times b = 3 \text{ m} \times 3 \text{ m}$, $E_2 = 206010 \text{ MPa}$, $I_{12} = 2.481 \times 10^{-5} \text{ m}^4/\text{m}$,
 $I_{12v} = 2.069 \times 10^{-5} \text{ m}^4/\text{m}$, $K = 84.95 \text{ MN/m}$ (かなり小さい値を仮定した), $h_2 = 0.006 \text{ m}$,
 $h_1 = 0.13 \text{ m}$, $\bar{n} = 7.385$, $\nu = 0.3$ (仮定), $\nu_2 = 0.3$, $\nu_1 = 0.2$, $s = 0.068 \text{ m}$, $s_1 = 0.0173 \text{ m}$,
 $s_2 = 0.0507 \text{ m}$, $A_1 = 0.13 \text{ m}^2/\text{m}$, $A_2 = 0.006 \text{ m}^2/\text{m}$, $A_v = 0.0236 \text{ m}^2/\text{m}$, $I_1 = 1.831 \times 10^{-4} \text{ m}^4/\text{m}$,
 $I_2 = 1.8 \times 10^{-8} \text{ m}^4/\text{m}$, $I_v = 4.55 \times 10^{-5} \text{ m}^4/\text{m}$, $D_v = 1.03005 \times 10^4 \text{ kN} \cdot \text{m}^2/\text{m}$.

これらの諸元を用いれば、 $\kappa = 3.92/\text{m}$, $\kappa a = 11.76$, $\beta_{11} = 0.1248$, $\alpha_{11} = 0.8752$, and $\gamma_{11} = 0.1041$ ($m=n=1$). 完全合成二層板の弾性座屈荷重は $(p_{vx})_{cr} = 45183 \text{ kN/m}$ と求まる。また、不完全合成二層板の弾性座屈荷重は $(p_{vex})_{cr} = 40922 \text{ kN/m}$ と求まる。これは $(p_{vx})_{cr} = 45183 \text{ kN/m}$ を $(1 + \gamma_{11})$; 即ち、1.1041で割れば、 $(p_{vex})_{cr} = 40922 \text{ kN/m}$ と求まる。

不完全合成二層板の弾性座屈荷重、 $(p_{vex})_{cr}$, は無次元量 α_{11} , β_{11} , および γ_{11} を導入すれば、簡単に求めることができから、本提案の方法は実用上の座屈荷重を求める場合に非常に便利である。

6. あとがき

本研究で得られた結論は次の通りである。

- (1) 本論文は不完全合成二層板（接着剤の弾性変形を考慮した合成二層板）の弾性座屈解析の微分方程式を誘導した。
- (2) 本論文は四辺単純支持板の面内力が作用する完全合成二層板、不完全合成二層板、重ね二層板の弾性座屈荷重の相互関係を明らかにした。

$\beta_{11}=0$, 即ち, $\alpha_{11}=1$, $\gamma_{11}=0$, の場合は完全合成二層板。

$0<\beta_{11}<1$, 即ち, $\alpha_{11}=1-\beta_{11}$, $\gamma_{11}=\frac{A_1 s_1 s}{\bar{n} I_2 + I_1} \beta_{11}$, の場合は不完全合成二層板。

$\beta_{11}=1$, 即ち, $\alpha_{11}=0$, $\gamma_{11}=\frac{A_1 s_1 s}{\bar{n} I_2 + I_1}$, の場合は重ね二層板。

- (3) 本論文は四辺単純支持板の面内力が作用する完全合成二層板、不完全合成二層板、重ね二層板の弾性座屈荷重を求める図を提案している。この図を用いれば、弾性座屈荷重, $(p_{\text{vex}})_{\text{cr}}$, を簡単に求めることができる。

参考文献

- 1) 土木学会編：鋼・コンクリート合成構造の設計ガイドライン、1989。
- 2) Newmark, N.M., Siess, C.P., and Viest, I.M.: Tests and Analysis of Composite Beams with Incomplete Interaction, Proc. of the Society for Experimental Analysis, Vol.9, No.1, pp.75-93, 1951.
- 3) 島田静雄、熊沢周明：合成桁の理論と設計、山海堂、1973。
- 4) J.L.Clarke, C.T.Morley: Steel-Concrete Composite Plates with Flexible Shear Connectors, Proc.Inst. Civ.Engrs, Vol.53, Part2, pp.557-568, Dec., 1972.
- 5) K.S.Pister and S.B.Dong: Elastic Bending of Layered Plates, J. Engrg. Mech., ASCE, 85(4), pp.1-10, 1959.
- 6) 佐藤浩一、渡辺昇、井上稔康：不完全合成桁と合成板の解析理論の相似性について、土木学会北海道支部論文報告集、第45号、pp.55-60、1989。
- 7) S.P.Timoshenko and S.Woinowsky-Krieger: Theory of Plates and Shells, 2nd ed., McGraw-Hill Book Company Inc., New York, 1970.
- 8) Rudolph Szilard: Theory and Analysis of Plates, PRENTICE-HALL, INC., Englewood Cliffs, New Jersey, 1974.
- 9) 井上稔康、佐藤浩一、渡辺昇：不完全合成板の解析について、構造工学論文集 Vol.36A, pp.1245-1258, 1990.
- 10) S.P.Timoshenko and J.M.Gere: Theory of Elastic Stability, 2nd ed., McGraw-Hill Book Company Inc., New York, 1961.
- 11) Koichi SATO: Composite Plates of Concrete Slabs and Steel Plates, J. Engrg. Mech., ASCE, 117(12), pp.2788-2803, 1991.
- 12) Koichi SATO: Elastic Buckling of Incomplete Composite Plates, J. Engrg. Mech., ASCE, 118(1), 1992.