

I-1 厚板理論による長方形厚板の熱曲げ解析

北見工業大学 正員 奥村 勇

1. 緒 言

最近の熱応力問題は、異方性体の定常或は非定常問題に関する研究に向いつつあるが、等方性体或は異方性体を問わずに、3次元固体に関する研究が多い。等方性平板の熱応力問題は、薄板に関しては、ほぼ、体系づけられている様であるが¹⁾、厚板に関しては、未だ、十分には研究されていないようである。厚板といっても、いわゆる、極めて厚い厚盤に関しては、野田ら²⁾および菅野および木元³⁾が、それぞれ、円形厚盤および円環厚盤を解析している。また、近年の複合材料の使用の増加に伴い、横等方性体の熱応力に関する研究もいくつか見受けられる。Nodaおよび Takeuti⁴⁾は、横等方性円形厚盤の軸対称熱応力を、菅野⁵⁾は、円孔を有する横等方性無限厚盤の軸対称熱応力を解析している。最近、Okumura およびNoda⁶⁾は、横等方性体の熱弾性変位ポテンシャルを提案し、横等方性長円筒の非軸対称熱応力を解析している。

厚板といえども、温度場および応力場共に、厳密な3次元解析が最も望ましい解析方法であるが、3次元固体と異なり、中程度の厚さを持つ厚板の場合には、数値計算上に困難さを惹起する。そのため、3次元弾性論の適用が困難になる中程度の厚さの厚板の熱応力解析には、表面荷重を受ける場合と同様に、厚板理論を用いる解析方法が考えられる。この解析方法は、簡易性、適用性および数値計算の容易さの観点から、厚板の熱応力解析に対する有力な手段になっており、これを用いて、Okumuraら⁷⁾は、扇形厚板の定常熱応力を解析している。

本研究は、扇形厚板の熱応力解析に用いた解析方法により、上面に一樣部分温度が課せられた長方形厚板の熱曲げ解析を行うものである。厚板理論としては、Love⁸⁾の理論に改良を加えた一厚板理論を用い、板の上、下面における境界条件を満たす解としては、Goodierの熱弾性変位ポテンシャルを付加したBoussinesqの解を用いる。温度場に関する境界条件は、3次元熱伝導論により、厳密に満足されている。

2. 定常温度場

図-1に示した長方形厚板を解析の対象にする。定常状態を考えているので、 x および y に関する偶の問題であることに留意すると、温度 T は、調和関数となり、次式で表される。

$$T = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \cos \alpha_r x \cos \beta_s y (N_{rs} \cosh n_{rs} z + \overline{N}_{rs} \sinh n_{rs} z) \cdots (1)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \alpha_r &= r\pi/a \quad (r=1, 3, \dots), \quad \beta_s = 2s\pi/b \quad (s=0, 1, \dots); \\ n_{rs} &= \sqrt{\alpha_r^2 + \beta_s^2} \cdots \cdots \cdots (2 \cdot a-c) \end{aligned}$$

また、 N_{rs} および $\overline{N}_{rs}$ は、境界条件から定められる未定定数である。

温度場に関する境界条件として、次式を考える。

$$z = h/2 \text{ において、} \quad T = g(x, y) \cdots \cdots \cdots (3 \cdot a)$$

$$z = -h/2 \text{ において、} \quad T = 0 \cdots \cdots \cdots (3 \cdot b)$$

$$x = \pm a/2 \text{ において、} \quad T = 0 \cdots \cdots \cdots (3 \cdot c)$$

$$y = \pm b/2 \text{ において、} \quad \partial T / \partial y = 0 \cdots \cdots \cdots (3 \cdot d)$$

ここで、

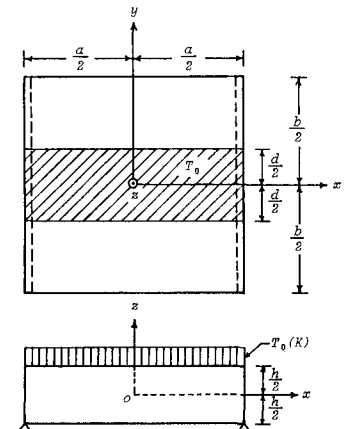


Fig. 1 Rectangular thick plate subjected to surface temperature.

An Analysis for Thermal Bending of a Thick Rectangular Plate by the Theory of Moderately Thick Plates
By Isamu A. OKUMURA

$$g(x, y) = \begin{cases} T_0 & [|x| < a/2 \text{ かつ } |y| < d/2] \\ 0 & [\text{上記以外の場合}] \end{cases} \quad (4)$$

式(3・c)および式(3・d)の境界条件は、式(2・a, b)により、自明に満足されるので、式(4)をフーリエ級数に展開して、式(1)に式(3・a, b)の境界条件を課すると、 T は、次式の様に定められる。

$$T = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{e_{rs}}{2} \cos \alpha_r x \cos \beta_s y \left(\frac{\cosh n_{rs} z}{\cosh \zeta_{rs}} + \frac{\sinh n_{rs} z}{\sinh \zeta_{rs}} \right) \quad (5)$$

ここで、

$$e_{rs} = \begin{cases} 4T_0 \left(\frac{d}{b} \right) \frac{(-1)^{(r-1)/2}}{r\pi} & [s=0, r=1, 3, \dots] \\ \frac{8T_0}{\pi^2} \frac{(-1)^{(r-1)/2}}{rs} \sin \frac{\beta_s d}{2} & [s \geq 1, r=1, 3, \dots] \end{cases}, \quad \zeta_{rs} = \frac{n_{rs} h}{2} \quad (6 \cdot a, b)$$

3. 変位および応力場

3・1 特殊解 板の上、下面における力学的境界条件を満足するために、特殊解が必要になる。その特殊解として、Goodierの熱弾性変位ポテンシャルを付加した次のBoussinesqの解を用いる。

$$2Gu = \frac{\partial}{\partial x} (\phi_0 + x\lambda_1 + y\lambda_2 + z\lambda_3) - 4(1-\nu)\lambda_1 + 2 \frac{\partial \vartheta_3}{\partial y} + \frac{\partial \chi}{\partial x} \quad (7 \cdot a)$$

$$2Gv = \frac{\partial}{\partial y} (\phi_0 + x\lambda_1 + y\lambda_2 + z\lambda_3) - 4(1-\nu)\lambda_2 - 2 \frac{\partial \vartheta_3}{\partial x} + \frac{\partial \chi}{\partial y} \quad (7 \cdot b)$$

$$2Gw = \frac{\partial}{\partial z} (\phi_0 + x\lambda_1 + y\lambda_2 + z\lambda_3) - 4(1-\nu)\lambda_3 + \frac{\partial \chi}{\partial z} \quad (7 \cdot c)$$

ここで、

$$\nabla^2 \phi_0 = 0, \quad \nabla^2 \lambda_1 = 0, \quad \nabla^2 \lambda_2 = 0, \quad \nabla^2 \lambda_3 = 0, \quad \nabla^2 \vartheta_3 = 0, \quad \nabla^2 \chi = \alpha ET / (1-\nu) \quad (8 \cdot a-f)$$

また、 G , ν , α および E は、それぞれ、材料のせん断弾性係数、ポアソン比、線膨張係数および弾性係数であり、 ∇^2 は、直交座標におけるLaplaceの演算子である。

式(8・f)の右辺に式(5)の T を代入して、特殊積分を求めると、熱弾性変位ポテンシャル χ が、次の様に求められる。

$$\chi = \frac{\alpha E}{4(1-\nu)} z \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{e_{rs}}{n_{rs}} \cos \alpha_r x \cos \beta_s y \left(\frac{\sinh n_{rs} z}{\cosh \zeta_{rs}} + \frac{\cosh n_{rs} z}{\sinh \zeta_{rs}} \right) \quad (9)$$

また、特殊解として必要になる他の変位ポテンシャルは、式(8・a, d, e)から、次の様に求められる。

$$\phi_0 = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \cos \alpha_r x \cos \beta_s y (C_{rs}^{(1)} \cosh n_{rs} z + \bar{C}_{rs}^{(1)} \sinh n_{rs} z) \quad (10 \cdot a)$$

$$\lambda_3 = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \cos \alpha_r x \cos \beta_s y (C_{rs}^{(2)} \sinh n_{rs} z + \bar{C}_{rs}^{(2)} \cosh n_{rs} z) \quad (10 \cdot b)$$

$$\vartheta_3 = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sin \alpha_r x \sin \beta_s y (C_{rs}^{(3)} \cosh n_{rs} z + \bar{C}_{rs}^{(3)} \sinh n_{rs} z) \quad (10 \cdot c)$$

ここで、 $C_{rs}^{(1)}, \dots, \bar{C}_{rs}^{(3)}$ は、境界条件から定められる未定定数である。

式(7・a-c)に式(9)および式(10・a-c)を代入すると、変位成分の表現が得られる。それより、ひずみ成分を求め、温度を考慮したHookeの法則を用いると、応力成分の表現が得られる。

3・2 同次解 特殊解のみでは、板の周辺の境界条件を満足できないので、同次解が必要になる。その同次解として、Love⁸⁾の著書に述べられている平面応力解と一般化平面応力解および式(8・e)から誘導される逆対称応力解の三つを用いる。それらの解の具体的表現については、省略する。

4. 境界条件

図-1に示した長方形厚板の $x=\pm a/2$ の2辺を単純支持、 $y=\pm b/2$ の2辺を自由および板の上、下面を自由とすると、力学的境界条件は、次式となる。

$z=\pm h/2$ において、

$$\sigma_{xx} = 0, \quad \sigma_{xy} = 0;$$

$$\sigma_{xz} = 0 \cdots (11 \cdot a-c)$$

$x=\pm a/2$ において、

$$T_{xx} = 0, \quad v = 0, \quad w = 0;$$

$$M_x = 0, \quad \partial v / \partial z = 0 \cdots$$

$$\cdots \cdots (12 \cdot a-c)$$

$y=\pm b/2$ において、

$$T_{yy} = 0, \quad S_{yz} = 0, \quad Q_y = 0;$$

$$M_y = 0, \quad M_{yz} = 0, \quad \cdots$$

$$\cdots \cdots (13 \cdot a-c)$$

ここで、 T_{xx} および M_{yz} などは、それぞれ、合応力および合偶力である。同次解は、式(11・a-c)の境界条件をすでに満足しているので、特殊解に式(11・a-c)の境界条件を課すると、未定定数 $C_{12}^{(1)}$, $\dots$, $\bar{C}_{12}^{(3)}$ が、すべて厳密に定められる。式(12・a-c)の境界条件は、式(2・a)により、自明に満足されるので、式(13・a-c)の境界条件を満足すれば良い。

式(13・a-c)の境界条

件を平面応力解、一般化平面応力解および逆対称応力解に課すると、平面応力解に関する2元連立1次方程式と一般化平面応力解および逆対称応力解に関する3元連立1次方程式とが得られる。その2組の連立1次方程式は、共に、解析的に解くことができ、同次解の未定定数が、すべて、厳密に定められる。未定定数が定められれば、変位および応力場が確定され、ここで考えている熱応力問題は、厳密に解析さ

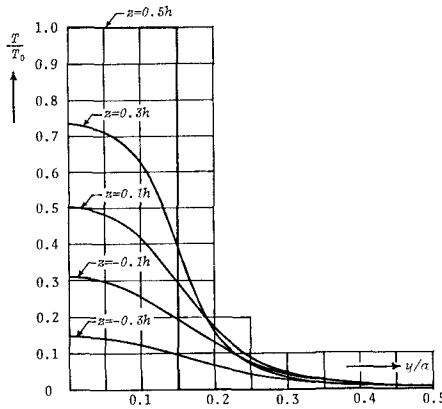


Fig. 2 Distribution of T along y -direction($x=0, h/a=1/4$).

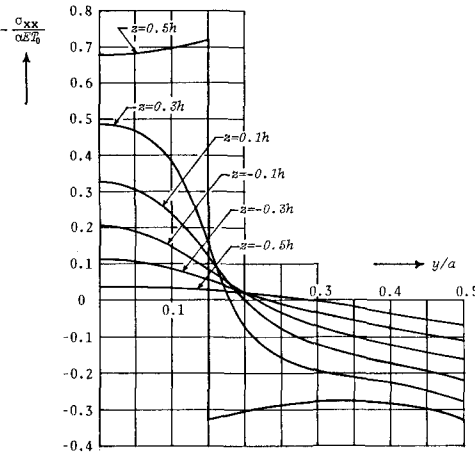


Fig. 3 Distribution of σ_{xx} along y -direction($x=0, h/a=1/4$).

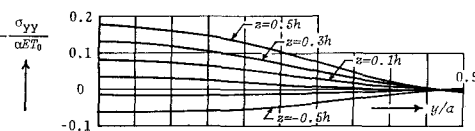


Fig. 4 Distribution of σ_{yy} along y -direction($x=0, h/a=1/4$).

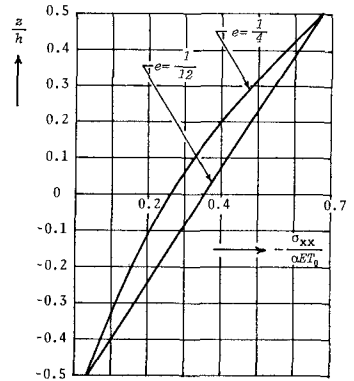


Fig. 5 Distribution of σ_{xx} along z -axis ($x=y=0, e=h/a$).

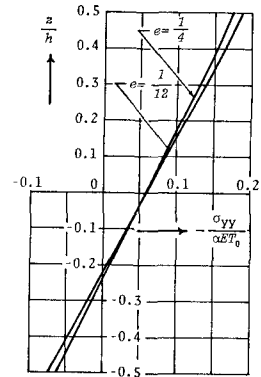


Fig. 6 Distribution of σ_{yy} along z -axis ($x=y=0, e=h/a$).

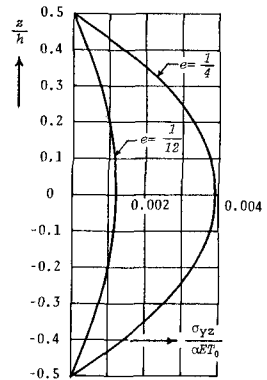


Fig. 7 Distribution of σ_{yz} along z -axis ($x=0, y=0.15a, e=h/a$).

れたことになる。

5. 計算結果

数値計算は、辺長比 $b/a=1.0$ 、ポアソン比 $\nu=0.3$ および温度分布幅比 $d/b=0.3$ の正方形厚板が、種々の板厚比 $e=h/a$ を持つ場合について行った。級数の項数は、 r および s に関する最初の54項を用いた。図-2に、温度 T の y 方向の分布を示す。 $y/a=0.5$ は、断熱の境界条件を課した自由边上であるが、 T は極めて小さな値を示している。図-3および図-4に、それぞれ、 σ_{xx} および σ_{yy} の y 方向の分布を示す。 σ_{xx} は、表面温度の分布境界 ($y/a=0.15$) で著しい不連続性を示し、他方、 σ_{yy} は、ゆるやかに変化し、小さな値を示す。図-5および図-6に、それぞれ、 σ_{xx} および σ_{yy} の z 方向の分布を示す。 σ_{xx} および σ_{yy} 共に板厚比の影響が極めて弱い。面内伸縮の効果が大きい、板厚比 $e=1/12$ では、ほぼ、直線分布になっている。図-7に、 σ_{yz} の z 方向の分布を示す。極めて小さな値であるが、板厚比 e が大きな方が、大きな値を示す。

6. 結 語

3次元弾性論の適用が困難になる中程度の厚さを持つ長方形厚板の熱曲げを厚板理論により解析した。本解析方法は、異方性体に関する同次解および特殊解 (3次元弾性解) が、もし、見出されれば、直交異方性または横等方性長方形厚板の熱曲げ解析にそのまま応用できる手法であり、適用性は相当に広いと考える。また、温度場に関する境界条件および板の上、下面における境界条件は、3次元に厳密に満足されており、板の周辺における境界条件のみが、厚板としての条件により、近似的に満足されているだけなので、本解析方法の精確性は、相当に高いと考える。本論文では、温度場が簡単に定められる定常熱応力を解析したが、板の上面が部分的に加熱され、周辺で熱放散がある場合の非定常熱応力解析にも、本解析方法が応用できると思われ、今後の研究課題と考える。

参考文献

- 1) Nowinski, J.L.: Theory of Thermoelasticity with Applications, p.407, Sijthoff & Noordhoff Int. Publ., 1978.
- 2) 野田直剛・竹内洋一郎・高倉賢一: 表面が局部加熱される有限広さの厚板の非定常熱応力, 日本機械学会論文集 (A編), 第48巻427号, pp.329-338, 1982.
- 3) 菅野良弘・木元順一: 変厚中空円板の非軸対称非定常熱応力の解析解, 日本機械学会論文集 (A編), 第53巻494号, pp.1927-1932, 1987.
- 4) Noda, N. and Takeuti, Y.: Transient thermal stresses in a transversely isotropic thick circular plate, Theor. Appl. Mech., Vol.31, pp.123-133, 1983.
- 5) 菅野良弘: 円孔を有する異方性厚板の非定常熱応力, 日本機械学会論文集 (A編), 第47巻419号, pp.730-739, 1981.
- 6) Okumura, I. A. and Noda, N.: Thermoelastic potential functions in transversely isotropic solids and their applications, J. Therm. Stresses, Vol.14, No.3, pp.309-331, 1991.
- 7) Okumura, I. A., Honda, Y. and Yoshimura, J.: An analysis for thermal-bending stresses in an annular sector plate by the theory of moderately thick plates, Struct. Eng./Earthquake Eng., Vol.6, No.2, pp.347s-356s, 1989.
- 8) Love, A.E.H.: A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, p.455, 4th ed., Dover Publ., 1944.