

II-24

一般座標系を用いた2次元流れと河床変動の計算

北海道開発局 正会員 ○ 畑 敏夫

北海道開発局 正会員 清水康行

北海道開発局 正会員 崇田徳彦

はじめに

河川において、洪水流による水衝部の位置、局所洗掘、堆積を予測することは河川計画上重要な課題である

従来より、河川研究室では2次元浅水流モデルによる流況計算と河床変動の計算モデルを組み合わせた方法の開発を行っている。これまでのモデルは計算の座標を作成する段階で流下方向の格子点に対し、横断方向がほぼ直角に配置される必要があった。しかしながら、実際の河川は複雑に湾曲し河道幅も一様ではない、また最近は引き込み護岸等が施工され、基礎式と整合のとれた格子点を配置することが困難な場合もある。ここでは基本的には格子点の配置に制約されない一般座標系の基礎式を用いた流れの計算と、河床変動計算のモデルの開発を行ない模型実験により検証を行なったものである。

1. 流れの基礎式

流れを差分法で計算する場合、格子点を直角に配置出来る場合には直交座標の基礎式、又ある程度一様に湾曲している場合には曲率を含んだ極座標系の基礎式が用いられ、従来のモデル¹⁾がこれらに該当する。

直線直交座標系における運動方程式が(1)、(2)式、連続の式が(3)式である。これを一般座標系で表した場合の運動方程式が(4)、(5)式、連続の式が(6)式に対応する。式の誘導については紙面の都合上省略するが、今後発表する予定³⁾である。それぞれの座標系の模式図を図-1に示す。

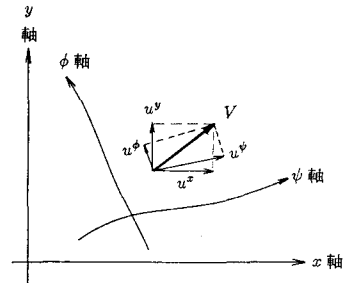


図-1 座標系模式図

1.1 直線直交座標

$$\langle x \text{ 方向} \rangle \quad \frac{\partial(u^x)^2}{\partial x} + \frac{\partial(u^x u^y)}{\partial y} = -g \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\tau_x}{\rho h} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\varepsilon \frac{\partial u^x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\varepsilon \frac{\partial u^x}{\partial y} \right) \quad (1)$$

$$\langle y \text{ 方向} \rangle \quad \frac{\partial(u^x u^y)}{\partial x} + \frac{\partial(u^y)^2}{\partial y} = -g \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\tau_y}{\rho h} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\varepsilon \frac{\partial u^y}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\varepsilon \frac{\partial u^y}{\partial y} \right) \quad (2)$$

$$\langle \text{連続の式} \rangle \quad \frac{\partial(u^x h)}{\partial x} + \frac{\partial(u^y h)}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

1.2 一般座標

$$\begin{aligned} \langle \psi \text{ 方向} \rangle \quad & \psi_x \left\{ \frac{\partial}{\partial \psi} \left[\frac{1}{J^2} (\phi_y u^\psi - \psi_y u^\phi) u^\psi \right] + \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\frac{1}{J^2} (\phi_y u^\psi - \psi_y u^\phi) u^\phi \right] \right\} \\ & + \psi_y \left\{ \frac{\partial}{\partial \psi} \left[\frac{1}{J^2} (\psi_x u^\phi - \phi_x u^\psi) u^\psi \right] + \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\frac{1}{J^2} (\psi_x u^\phi - \phi_x u^\psi) u^\phi \right] \right\} \\ & = -\frac{g}{J} \left[(\psi_x^2 + \psi_y^2) \frac{\partial H}{\partial \psi} + (\psi_x \phi_x + \psi_y \phi_y) \frac{\partial H}{\partial \phi} \right] \\ & - \frac{g n^2}{J^2 h^{4/3}} u^\psi \sqrt{(\phi_y u^\psi - \psi_y u^\phi)^2 + (\psi_x u^\phi - \phi_x u^\psi)^2} \\ & + \frac{\psi_x}{J} \left\{ \psi_x \frac{\partial}{\partial \psi} \left[\varepsilon \psi_x \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{\phi_y u^\psi}{J} - \frac{\psi_y u^\phi}{J} \right) + \varepsilon \phi_x \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\phi_y u^\psi}{J} - \frac{\psi_y u^\phi}{J} \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \phi_x \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\varepsilon \psi_x \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{\phi_y u^\psi}{J} - \frac{\psi_y u^\phi}{J} \right) + \varepsilon \phi_x \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\phi_y u^\psi}{J} - \frac{\psi_y u^\phi}{J} \right) \right] \\
& + \frac{\psi_x}{J} \left\{ \psi_y \frac{\partial}{\partial \psi} \left[\varepsilon \psi_y \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{\phi_y u^\psi}{J} - \frac{\psi_y u^\phi}{J} \right) + \varepsilon \phi_y \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\phi_y u^\psi}{J} - \frac{\psi_y u^\phi}{J} \right) \right] \right. \\
& \quad \left. + \phi_y \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\varepsilon \psi_y \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{\phi_y u^\psi}{J} - \frac{\psi_y u^\phi}{J} \right) + \varepsilon \phi_y \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\phi_y u^\psi}{J} - \frac{\psi_y u^\phi}{J} \right) \right] \right\} \\
& - \frac{\psi_y}{J} \left\{ \psi_x \frac{\partial}{\partial \psi} \left[\varepsilon \psi_x \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{\phi_x u^\psi}{J} - \frac{\psi_x u^\phi}{J} \right) + \varepsilon \phi_x \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\phi_x u^\psi}{J} - \frac{\psi_x u^\phi}{J} \right) \right] \right. \\
& \quad \left. + \phi_x \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\varepsilon \psi_x \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{\phi_x u^\psi}{J} - \frac{\psi_x u^\phi}{J} \right) + \varepsilon \phi_x \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\phi_x u^\psi}{J} - \frac{\psi_x u^\phi}{J} \right) \right] \right\} \\
& - \frac{\psi_y}{J} \left\{ \psi_y \frac{\partial}{\partial \psi} \left[\varepsilon \psi_y \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{\phi_x u^\psi}{J} - \frac{\psi_x u^\phi}{J} \right) + \varepsilon \phi_y \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\phi_x u^\psi}{J} - \frac{\psi_x u^\phi}{J} \right) \right] \right. \\
& \quad \left. + \phi_y \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\varepsilon \psi_y \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{\phi_x u^\psi}{J} - \frac{\psi_x u^\phi}{J} \right) + \varepsilon \phi_y \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\phi_x u^\psi}{J} - \frac{\psi_x u^\phi}{J} \right) \right] \right\} \quad (4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
< \phi \text{ 方向} > & \phi_x \left\{ \frac{\partial}{\partial \psi} \left[\frac{1}{J^2} (\phi_y u^\psi - \psi_y u^\phi) u^\psi \right] + \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\frac{1}{J^2} (\phi_y u^\psi - \psi_y u^\phi) u^\phi \right] \right\} \\
& + \phi_y \left\{ \frac{\partial}{\partial \psi} \left[\frac{1}{J^2} (\psi_x u^\phi - \phi_x u^\psi) u^\psi \right] + \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\frac{1}{J^2} (\psi_x u^\phi - \phi_x u^\psi) u^\phi \right] \right\} \\
& = -\frac{g}{J} \left[(\phi_x^2 + \phi_y^2) \frac{\partial H}{\partial \phi} + (\psi_x \phi_x + \psi_y \phi_y) \frac{\partial H}{\partial \psi} \right] \\
& - \frac{gn^2}{J^2 h^{4/3}} u^\phi \sqrt{(\phi_y u^\psi - \psi_y u^\phi)^2 + (\psi_x u^\phi - \phi_x u^\psi)^2} \\
& + \frac{\phi_x}{J} \left\{ \psi_x \frac{\partial}{\partial \psi} \left[\varepsilon \psi_x \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{\phi_y u^\psi}{J} - \frac{\psi_y u^\phi}{J} \right) + \varepsilon \phi_x \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\phi_y u^\psi}{J} - \frac{\psi_y u^\phi}{J} \right) \right] \right. \\
& \quad \left. + \phi_x \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\varepsilon \psi_x \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{\phi_y u^\psi}{J} - \frac{\psi_y u^\phi}{J} \right) + \varepsilon \phi_x \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\phi_y u^\psi}{J} - \frac{\psi_y u^\phi}{J} \right) \right] \right\} \\
& + \frac{\phi_x}{J} \left\{ \psi_y \frac{\partial}{\partial \psi} \left[\varepsilon \psi_y \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{\phi_y u^\psi}{J} - \frac{\psi_y u^\phi}{J} \right) + \varepsilon \phi_y \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\phi_y u^\psi}{J} - \frac{\psi_y u^\phi}{J} \right) \right] \right. \\
& \quad \left. + \phi_y \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\varepsilon \psi_y \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{\phi_y u^\psi}{J} - \frac{\psi_y u^\phi}{J} \right) + \varepsilon \phi_y \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\phi_y u^\psi}{J} - \frac{\psi_y u^\phi}{J} \right) \right] \right\} \\
& - \frac{\phi_y}{J} \left\{ \psi_x \frac{\partial}{\partial \psi} \left[\varepsilon \psi_x \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{\phi_x u^\psi}{J} - \frac{\psi_x u^\phi}{J} \right) + \varepsilon \phi_x \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\phi_x u^\psi}{J} - \frac{\psi_x u^\phi}{J} \right) \right] \right. \\
& \quad \left. + \phi_x \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\varepsilon \psi_x \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{\phi_x u^\psi}{J} - \frac{\psi_x u^\phi}{J} \right) + \varepsilon \phi_x \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\phi_x u^\psi}{J} - \frac{\psi_x u^\phi}{J} \right) \right] \right\} \\
& - \frac{\phi_y}{J} \left\{ \psi_y \frac{\partial}{\partial \psi} \left[\varepsilon \psi_y \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{\phi_x u^\psi}{J} - \frac{\psi_x u^\phi}{J} \right) + \varepsilon \phi_y \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\phi_x u^\psi}{J} - \frac{\psi_x u^\phi}{J} \right) \right] \right. \\
& \quad \left. + \phi_y \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\varepsilon \psi_y \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{\phi_x u^\psi}{J} - \frac{\psi_x u^\phi}{J} \right) + \varepsilon \phi_y \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\phi_x u^\psi}{J} - \frac{\psi_x u^\phi}{J} \right) \right] \right\} \quad (5)
\end{aligned}$$

$$< \text{連続の式} > \quad \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{hu^\psi}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{hu^\phi}{J} \right) = 0 \quad (6)$$

ただし、 x, y は直線直交座標軸、 ψ, ϕ は一般座標軸、 g は重力加速度、 H は水位、 h は水深、 J はヤコビアン、 n はマニングの粗度係数、 $\varepsilon (= 1/6\kappa u_* h)$ 渦度粘性係数、 $\kappa (= 0.4)$ はカルマン定数、 u^ψ は x 軸方向の流速成分、 u^ψ は y 軸方向の流速成分、 τ_x, τ_y は x 軸、 y 軸方向の河床せん断力、 u^ψ は ψ 軸方向の反変成分、 u^ϕ は ϕ 軸方向の反変成分である。

1.3 直線直交座標と一般座標における流速成分の関係

(4) ~ (6) 式中の u^ψ, u^ϕ と直線直交座標系の u^x, u^y は以下に示す関係で表される。

$$\begin{aligned} u^\psi &= u^x \psi_x + u^y \psi_y & u^x &= \frac{1}{J} (\phi_y u^\psi - \psi_y u^\phi) \\ u^\phi &= u^x \phi_x + u^y \phi_y & u^y &= \frac{1}{J} (\phi_x u^\phi - \phi_z u^\psi) \end{aligned}$$

ここで、 $\psi_x, \psi_y, \phi_x, \phi_y$ は一般座標系における座標の歪度を表す関数であり以下に示す。

$$\psi_x = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \psi_y = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \phi_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad \phi_y = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

$$J = \phi_y \psi_x - \psi_y \phi_x$$

2. 河床変動計算の基礎式

河床変動計算の基礎式は縦断方向の流砂量式として Meyer-Peter-Müller の式 (7 式)、横断方向には長谷川の式 (8 式) を用いる。ここで、(7) 式中の r 及び $(\partial \eta / \partial n)$ は流線の曲率と直角方向の河床勾配であり、それぞれ (9) 式と (10) 式によって求める。さらに一般座標系の ψ 方向の流砂量及び ϕ 方向の流砂量を (11), (12) 式で、河床高を (13) 式の連続の式より求める。従来のモデル¹⁾ では (8) 式中の r は流路の曲率半径を用いたが、ここではより正確に 2 次流の影響を反映させるため、(9) 式によって求まる水深平均流の流線の曲率半径を用いているのが特徴である。

$$\text{＜ 流線方向の流砂量式 ＞} \quad q_{B_s} = 8(\tau_* - \tau_{*c})^{1.5} \sqrt{sgd^3} \quad (7)$$

$$\text{＜ 流線に直交する方向の流砂量式 ＞} \quad q_{B_n} = q_{B_s} \left(N_* \frac{h}{r} - \sqrt{\frac{\tau_{*c}}{\mu_s \mu_k \tau_*}} \frac{\partial \eta}{\partial n} \right) \quad (8)$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{V^3} \left[u^\psi \left(u^x \frac{\partial u^y}{\partial \psi} - u^y \frac{\partial u^x}{\partial \psi} \right) + u^\phi \left(u^x \frac{\partial u^y}{\partial \phi} - u^y \frac{\partial u^x}{\partial \phi} \right) \right] \quad (9)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial n} = \frac{1}{V} \left[\frac{\partial \eta}{\partial \psi} (\psi_y u^x - \psi_x u^y) + \frac{\partial \eta}{\partial \phi} (\phi_y u^x - \phi_x u^y) \right] \quad (10)$$

$$\text{＜ } \psi \text{ 方向の流砂量式 ＞} \quad q^\psi = \frac{1}{V} \left[(\psi_x u^x + \psi_y u^y) q_{B_s} + (\psi_y u^x - \psi_x u^y) q_{B_n} \right] \quad (11)$$

$$\text{＜ } \phi \text{ 方向の流砂量式 ＞} \quad q^\phi = \frac{1}{V} \left[(\phi_x u^x + \phi_y u^y) q_{B_s} + (\phi_y u^x - \phi_x u^y) q_{B_n} \right] \quad (12)$$

$$\text{＜ 流砂の連続式 ＞} \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{J}{1-\lambda} \left\{ \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{q^\psi}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{q^\phi}{J} \right) \right\} = 0 \quad (13)$$

ただし、 $V = \sqrt{(u^x)^2 + (u^y)^2}$ 、 τ_* : は無次元有効せん断力、 τ_{*c} は無次元限界せん断力 (岩垣の式で求める)、 $N_*(=7)$ は定数、 λ は空隙率、 s は河床材料の水中比重、 d は河床材料の粒径、 μ_s 及び μ_k は河床材料の静止及び動摩擦係数、 η は河床高、 n は流線と直角方向の座標軸である。

3. 格子点の違いによる計算結果

計算法については基礎式の項が多くなっているため複雑に見えるが、従来から用いられている 2 次元浅水流モデルと同様であり差分化の方法などは参考文献にくわしくのべられているのでここではふれない。

一般座標系の特徴として格子点の配置をある程度自由にとることができるが、計算を差分法で行なうため格子点間隔の違いなどによって計算結果に多少の違いが出る。そこで、同一の水路条件で格子点の配置を変えた河床変動計算を行ない比較検討した。

計算条件は板倉ら²⁾ による急流急縮を含む移動床実験データを用い、流量が 20.6ℓ、河床勾配が 1/330、粗度係数が 0.027 河床材料の粒径が 0.94mm で、通水時間は 135 分である。

以下に水路形状と格子点の配置を示す。図-2 が流下方向の格子点に対し横断方向を直角に配置したケースでケース 1 とする。また、図-3 がやや斜めに配置したケースでケース 2 とする。

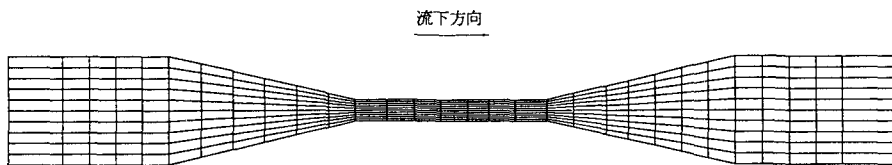


図-2 ケース1の計算格子点

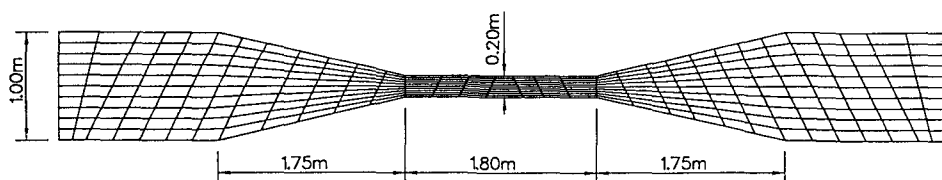


図-3 ケース2の計算格子点

実験は100cmの水路幅から20cmの水路幅に急縮し、下流ではもとの水路幅に急拡するもので、河床を平坦に形成した後に通水し、時間の経過とともに水路幅が狭い区間で深掘れが生じるものである。

図-4及び図-5はケース1とケース2の河床変動前(初期河床)の流速ベクトルを表しており両者の対応はよくとれている。

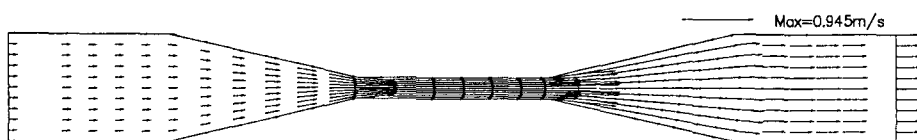


図-4 ケース1のベクトル図

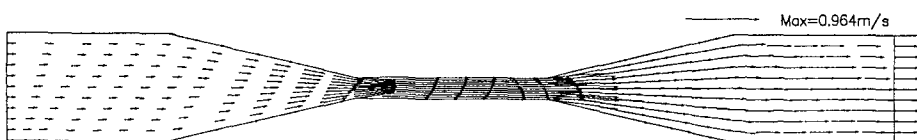


図-5 ケース2のベクトル図

流れ及び河床変動の計算は、実験と同じ条件で初期河床を横断方向に水平、縦断方向に一定勾配として開始し、135分後の河床形状を計算した。流れの計算にはマンシングの粗度係数0.027を用いた。

実験値と計算結果を比較するために河床高をコンター図で表したのが図-6～図-8である。

図-6は実験値を表した図であるが水路幅が狭まる位置の側壁部から深掘れが始まりいちばん水路幅が狭まった所で最も深く掘れている。図-7及び図-8はそれぞれケース1、ケース2の計算結果を表したものである。

計算結果を見ると深掘れの形状はケース1、ケース2ともによく表しているように思われる。しかし計算値のコンター図をケース1とケース2で比較して見るとケース1が左右対称なのに対し、ケース2は少し歪んだ形になっている、とりわけ河道幅の最も狭まる側壁の折れ点でその傾向が強く表われている。これは格子点の配置がいちばん不均一な位置であることが起因しているように思われる。

一般座標系の基礎式は格子点の配置について制約をあまりもたないが差分法による数値計算においては極端に不均一な格子点の配置は計算結果の精度に影響するので注意が必要である。

凡例 (m)

ABOVE	0.200
0.185 - 0.200	
0.170 - 0.185	
0.155 - 0.170	
0.140 - 0.155	
0.125 - 0.140	
0.110 - 0.125	
0.095 - 0.110	
0.080 - 0.095	
0.065 - 0.080	
0.050 - 0.065	
BELOW	0.050



図-6 実験値の河床高コンター図



図-7 ケース1の河床高コンター図



図-8 ケース2の河床高コンター図

実験値と計算値の河床高を水路中心での縦断面図で比較したのが図-9である。実測値の河床高と計算結果を見ると最深河床付近では違いが大きく、他の河床低下区間では1.0 ~ 2.0cm程度の誤差である。実験値にもバラツキがみられるため計算結果の評価は一概に言えないが、河床変動の再現計算としては概ね良好な結果が得られていると思われる。

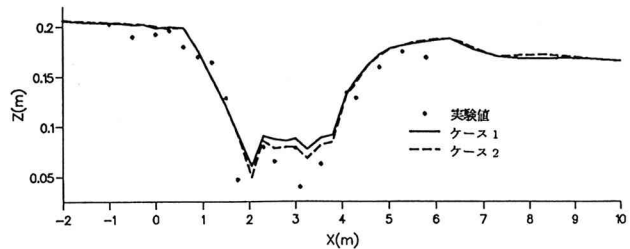


図-9 河床縦断面図

また、ケース1とケース2では最深河床の位置で若干の違いが見られるが、ほぼ同一の

計算結果が得られている。これは格子点の配置が水路の中心では両ケースともほぼ一致しており、同一地点では周りの格子点の配置に違いがあっても、流れの計算が河床変動の経過時間を通して同一の結果が得られていることを示していると考えられる。

4. 実河川の河道模型と計算例

ここでは、実際の河道形状での計算例として、低水路内に高水敷が張り出し、その下流には引込護岸が施工され、対岸には根固めが布設されている河道の模型実験の計算を行う。

図-10が計算に用いた格子点で、縦断方向は高水敷の張り出し、及び引込護岸の形状に添って配置し横断方向はいびつにならない程度に直線で配置した。

実験は流量が70.8ℓ、河床勾配が1/200、河床材料粒径1.7mmで、12時間通水している。図-11は通水後の初期河床からの移動量をコンター図で示したものである。河床変動の計算も実験と全く同じ条件で行なった。図-12が計算の結果であるが、実験では右岸よりに掘れながら根固めの前面で深掘れが生じているのに対し、計算では深掘れ位置が根固めの前面とそれよりやや上流の右岸側に生じており、適合度があまり良いとはいえないが、右岸側が掘れる傾向や下流引込護岸付近の堆積傾向など河床変動の全体的傾向は表われている。

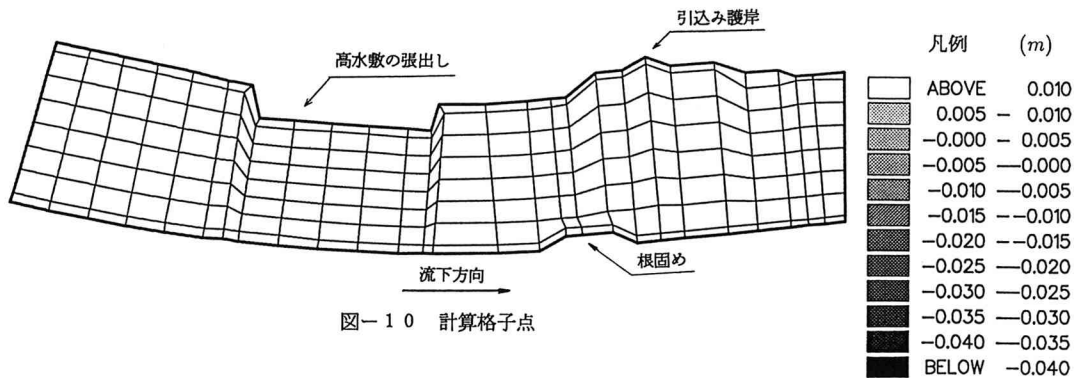


図-10 計算格子点

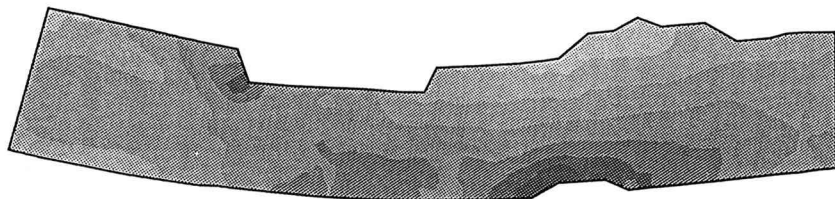


図-11 実験の河床コンター図



図-12 計算の河床コンター図

おわりに

本文は従来から用いられている2次元浅水流モデルの基礎式を一般座標系で表した場合の基礎式を用いて複雑な河道形状にも適用できるようにし、さらに移動床計算にも適用出来ることを示した。これによって、今後増えると思われる引込護岸の検討や、構造物周辺の流れの検討など、その適用範囲の拡大が期待出来る。しかし、本文の中でも述べているように、格子点をどのように取っても結果の精度に影響がないわけではなく、計算を行なう上では十分検討してデータを作成する必要がある。今後はいろいろな条件で計算を行ないモデルの検証を行なっていく必要がある。今後、さらに研究を進め数値計算モデルの精度向上をめざしたい。なお、一般座標系の基礎式の誘導に際しては北海道大学工学部山田正先生より御助言を受けた。ここに記し謝意を表す。

参考文献

- 1) 清水康之、板倉忠興: 河川における2次元流れと河床変動の計算、北海道開発局土木試験所報告大第85号、1986.
- 2) 岸力、板倉忠興、森明巨、黒木幹男: 河川の機能に関する基礎的研究、1988.
- 3) 畑敏夫: 一般座標を用いた2次元流れと河床変動の計算、開土研月報(予定)