

II-19

重ね合わせの原理による開放境界スキーム

北海道大学工学部 学生員 久連山 秀 樹
北海道大学工学部 正 員 浜 中 建一郎

1. はじめに

流れの数値解析において、計算機のメモリーの節約のために設ける人工的な仮想境界は、波動場の計算の場合には、そこを波が自由に通過する必要性から開放境界と呼ばれ、種々のスキームが提案されている¹⁾。それらの一つとして、Smith²⁾の提案による重ね合わせの原理を用いた方法があげられる。これは、逆位相の反射波を生じさせる二種類の境界条件を与え、別々に計算を進め、最後に二つの結果を重ね合わせ、開放境界からの反射波を消すという方法である。しかし、この方法では、一つの開放境界に対し二面の計算領域を確保しておく必要があり、複数の開放境界がある場合には、計算機のメモリーの確保に問題が生じてくる。これに対し、日野³⁾、日野・仲座⁴⁾は一時間ステップ計算を進める毎にこの原理を適用し、瞬時に開放境界上の通過波の水位を求める方法を提案し、その簡易法として仮想固体壁の境界条件を与え、その結果の1/2を通過波の水位とする方法の計算スキームを与えている。著者等^{5)・6)}はこれまで、この日野・仲座の簡易法について、具体的な誤差評価と、その誤差によって生ずる人工的反射波の反射率を調べてきた。それによると、この誤差や反射率は、一般的には未知である開放境界に対する波の入射角に強く依存し、しかも、場合によってはそれが無視し得ない大きさになることが分かった。

このことから、本研究では、日野・仲座の本来の原理である、二種の反射条件のもとで求めた結果を重ね合わせて反射波を消す方法をLeap-frog法に適用し、具体的な計算スキームを提案し、その誤差評価、及び反射率を調べることを目的とする。

2. 重ね合わせ法の原理

通過波は、長波の波動解より

$$\eta = a \sin(lx + my - \omega t), \quad M = ac \frac{1}{k} \sin(lx + my - \omega t), \quad N = ac \frac{m}{k} \sin(lx + my - \omega t) \quad (1)$$

ここで、 η は水位、 M 、 N は x, y 方向の流量、 $k=(l, m)$ は波数ベクトル、 $c=\sqrt{gH}$ は波速、 ω は角振動数である。反射条件(1)として、 $x=0$ の境界上で全ての y と t において、 $M=0$ となるような反射波は、

$${}_R\eta(1) = a \sin(-lx + my - \omega t), \quad {}_RM(1) = -ac \frac{1}{k} \sin(-lx + my - \omega t), \quad {}_RN(1) = ac \frac{m}{k} \sin(-lx + my - \omega t) \text{ となる。}$$

反射条件(2)として、 $x=0$ の境界上で全ての y と t において、 $\eta=0$ となるような反射波は、

$${}_R\eta(2) = -a \sin(-lx + my - \omega t), \quad {}_RM(2) = ac \frac{1}{k} \sin(-lx + my - \omega t), \quad {}_RN(2) = -ac \frac{m}{k} \sin(-lx + my - \omega t) \text{ となる。}$$

通過波の水位 η と、反射条件(1)と反射条件(2)による反射波とを加えると、二つの反射波は互いに消し合い、通過波のみが残る。このことは、二つの反射波が十分に発達し定常波動場になったとき成立する。

それに対し日野等の原理は、ある時点まで境界上で通過波が求まっているとし、次の時点での通過波を求めるのに、上の二つの反射条件を適用した二つの結果をたし合わせ、瞬時に二つの反射波を消去するというものである。しかしながら、具体的な差分スキームは示されていない。特に、leap-frog法では、水位の計算時点と流量の計算時点がずれているため、二つの反射条件のもとでの水位(あるいは流量)を同時に求め、

たし合わすことができない。そこで本研究では、leap-frog法に対する日野等の原理の応用として、次節で述べるスキームを考えた。

3. 重ね合わせによる開放スキーム

図1で $x=(i+1)\Delta s$ が開放境界である。 $n+1$ 時点の流量 M で重ねあわせができる様にスキームを考える。反射条件(1)の $M=0$ は $n-1$ 時点で適用し、反射条件(2)は n 時点で適用する。

二次元伝播における連続式は、差分化すると次の様になる。

$$\frac{\eta_{i,j}^{n+1} - \eta_{i,j}^{n-1}}{\Delta t} = \frac{M_{i-1,j}^n - M_{i+1,j}^n + N_{i,j-1}^n - N_{i,j+1}^n}{\Delta s} \quad (2)$$

ここで、 n は時間ステップ、 i, j は x, y 方向の空間ステップを表す。

○反射条件(1)で $n+1$ 時点の流量 $M(1)$ を求める。

空間ステップ $(i-1, j)$ 、時間ステップ (n) の水位は(2)式より、

$$\eta_{i-1,j}^n = \frac{\Delta t}{\Delta s} (M_{i-2,j}^{n-1} - M_{i,j}^{n-1} + N_{i-1,j-1}^{n-1} - N_{i-1,j+1}^{n-1}) + \eta_{i-1,j}^{n-2} \quad (3)$$

次に、空間ステップ $(i+1, j)$ 、時間ステップ (n) の水位を求める時、反射条件(1)の $M=0$ を $x=i+1$ の境界上に適用するため、

$$M_{i+2,j}^{n-1} = -M_{i,j}^{n-1} \quad \text{とすると(2)式より}$$

$$\eta_{i+1,j}^n = \frac{\Delta t}{\Delta s} (2M_{i,j}^{n-1} - N_{i+1,j-1}^{n-1} - N_{i+1,j+1}^{n-1}) + \eta_{i+1,j}^{n-2} \quad (4)$$

(3)式と(4)式を、線形化した流量を求める以下の差分式に代入する。

$$M(1)_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{2} gH \frac{\Delta t}{\Delta s} (\eta_{i-1,j}^n - \eta_{i+1,j}^n) + M_{i,j}^{n-1} \quad (5)$$

○反射条件(2)で $n+1$ 時点の流量 $M(2)$ を求める。

$\eta=0$ の反射条件(2)を n 時点に適用すると、

$$M(2)_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{2} gH \frac{\Delta t}{\Delta s} \eta_{i-1,j}^n + M_{i,j}^{n-1} \quad (6)$$

○重ね合わせ

上で求めた二つの流量を重ね合わせ、記号 $\sim$ によって差分スキームによる値を表すと、

$$\tilde{M}_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{2} (M(1)_{i,j}^{n+1} + M(2)_{i,j}^{n+1}) \quad (7)$$

以上がleap-frog法に対する著者等の提案する開放スキームである。

4. 誤差評価

この節では、前節で与えた開放スキームの誤差を評価し、あわせてその誤差によるみかけの反射率を求める。前節で与えたスキーム(3)～(7)の通過波に対する水位及び流量に長波の解(1)を代入する。例えば、

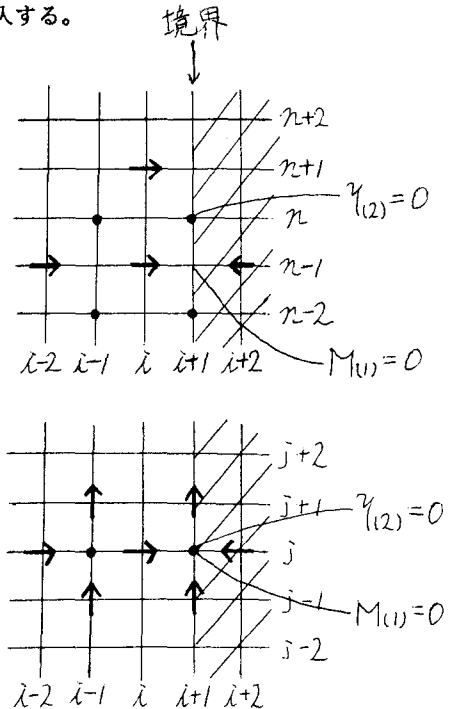


図-1 解放境界の差分スキーム

$$M_{i-2,j}^{n-1} = ac \frac{1}{k} \sin(\theta - (2l\Delta s - \omega \Delta t))$$

$$M_{i,j}^{n-1} = ac \frac{1}{k} \sin(\theta + \omega \Delta t)$$

$$N_{i-1,j-1}^{n-1} = ac \frac{m}{k} \sin(\theta - (l\Delta s + m\Delta s - \omega \Delta t)) \quad (8)$$

$$N_{i-1,j+1}^{n-1} = ac \frac{m}{k} \sin(\theta - (l\Delta s - m\Delta s - \omega \Delta t))$$

$$\eta_{i-1,j}^{n-2} = a \sin(\theta - (l\Delta s - 2\omega \Delta t))$$

$$\text{ただし、} \theta = l\Delta s + m\Delta s - \omega n\Delta t$$

各々の三角関数を θ の回りでテイラー展開し、まとめると次の様になる。

$$\widehat{M}_{i,j}^{n+1} = cA \sin \theta + cB \cos \theta \quad (9)$$

$$\text{ここで、} A = \frac{1}{4} (P_1 + P_2 + P_3) + a \frac{1}{k}, \quad B = \frac{1}{4} (P_4 + P_5 + P_6) + a \gamma \frac{1}{k}$$

$$P_1 = -2a \frac{1}{k} (\beta^2 - 2\beta \gamma^2 \frac{1}{k} + 2\gamma^2 \frac{1}{k^2}), \quad P_2 = 2a \frac{m}{k} (\beta \gamma^2 \frac{m}{k} - 3\gamma^2 \frac{1}{k^2}), \quad P_3 = a (\beta - 2\beta \gamma^2 + 6\gamma^2 \frac{1}{k})$$

$$P_4 = -2a \frac{1}{k} (\beta^2 \gamma + 2\beta \gamma \frac{1}{k} + 2\gamma^3 \frac{1}{k^2}), \quad P_5 = -2a \frac{m}{k} (\beta \gamma \frac{m}{k} + 3\gamma^3 \frac{1}{k^2}), \quad P_6 = a (2\beta \gamma + 3\gamma (2\gamma^2 - 1) \frac{1}{k})$$

$$\text{ただし、} \frac{\Delta t}{\Delta s} = \frac{\beta}{c}, \quad \omega \Delta t = \gamma \text{ である。}$$

したがって、スキームによって求めた値と、真値との誤差は、

$$\begin{aligned} \text{誤差 : } Er = \widehat{M}_{i,j}^{n+1} - M_{i,j}^{n+1} &= \frac{1}{4} gc (P_1 + P_2 + P_3) \sin \theta + (\frac{1}{4} gc (P_4 + P_5 + P_6) + 2ac \gamma \frac{1}{k}) \cos \theta \\ &= ((\frac{1}{4} gc (P_1 + P_2 + P_3))^2 + (\frac{1}{4} gc (P_4 + P_5 + P_6) + 2ac \gamma \frac{1}{k})^2)^{\frac{1}{2}} \sin(\psi + \theta) \\ &= \Delta \text{amp} \sin(\psi + \theta) \end{aligned} \quad (10)$$

よって、誤差と真値の振幅の比Eは、

$$E = \frac{\Delta \text{amp}}{ac \frac{1}{k}} \quad (11)$$

Eの入射角による変化表したのが図2-(a), 図3-(a)である。尚、以下に図示する計算例での β の値は、計算領域内部での安定条件を満たす様に与え、 γ の値は、0.125で Δt が波の周期の1/50程度である。

次に上で求めた誤差による見かけの反射率を求める。

見かけの反射率をRとすると、(9)式からスキームによって求まる $n+1$ での反射波のx方向の流量は、

$$R \widehat{M}_{i,j}^{n+1} = RcA' \sin \theta' + RcB' \cos \theta'$$

ここで、 A', B' は、 A, B における l を $l' = -l$ に置き換えたもの、 $\theta' = l' \Delta s + m \Delta s + \omega n \Delta t + \sigma$

一方、長波の解(1)から求まる $n+1$ での通過波、反射波のx方向の流量は、

$${}_I M_{i,j}^{n+1} = a c \frac{1}{k} (\sin \theta - \omega \Delta t \cos \theta)$$

$${}_R M_{i,j}^{n+1} = R a c \frac{1}{k} (\sin \theta' - \omega \Delta t \cos \theta')$$

これらの通過波、反射波が定常状態であるとき、 $x=i\Delta s$ 上の全ての j と n に対して以下の式が成り立たなければならない。

$${}_I M_{i,j}^{n+1} + {}_R M_{i,j}^{n+1} = {}_I \tilde{M}_{i,j}^{n+1} + {}_R \tilde{M}_{i,j}^{n+1}$$

上式から、見かけの反射率は、

$$R = \left(\frac{(a \frac{1}{k} - A)^2 + (-a \frac{1}{k} \gamma - B)^2}{(A' - a \frac{1}{k})^2 + (B' + a \frac{1}{k} \gamma)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (10)$$

この反射率 R の、入射角 δ による変化を表したのが図2-(b), 図3-(b)である。

尚、比較のため著者等^{5), 6)}が先に提案したSCHEME I-1～II-2までの反射率 R と E の、入射角による変化を表したのが図4～図7である。

SCHEME I-1からSCHEME II-2までの E は次の通り。

$$\text{SCHEME I-1の場合 : } E = \left(\frac{1}{4} (\beta \frac{1}{k})^2 + (-\frac{1}{2} \gamma (\frac{1}{k})^2 - 2 \gamma (\frac{B}{k})^2 + 2 \gamma)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{SCHEME I-2の場合 : } E = \left(\frac{1}{4} (\beta \frac{1}{k} - 1)^2 + (-\frac{1}{2} \gamma (\frac{1}{k})^2 + \frac{3}{2} \gamma - 2 \gamma (\frac{B}{k})^2)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{SCHEME II-1の場合 : } E = \left(\frac{1}{4} (\beta \frac{1}{k} + \beta \frac{B}{k} - 1)^2 + \gamma^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{SCHEME II-2の場合 : } E = \left(\frac{1}{4} (\beta \frac{1}{k} - 1)^2 + \gamma^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

5. 結果および考察

今回新たに提案した開放スキームに対する図-2, 図-3と、前回調べた簡易法に対する図-4～図-7を比較すると、今回のスキームは全体にわたって誤差による見かけの反射率は小さくなっている。更に、その反射率の入射角への依存性は、平行入射近傍を除きかなり少なくなっている。平行入射の時の誤差は内部に伝播しづらいことを考えると、今回のスキームはかなり有効なものと言えるであろう。又、今回は流量に対して重ね合わせの原理を用いたが、水位に対して用いる方法も考えられると思うので、今後検討を続けたい。

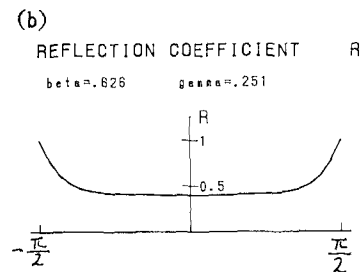
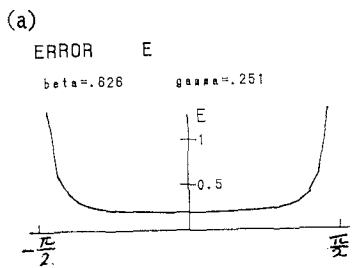


図-2

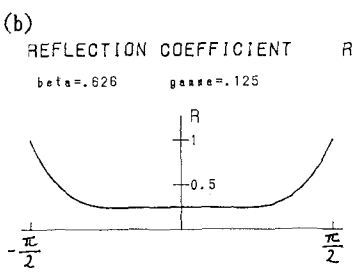
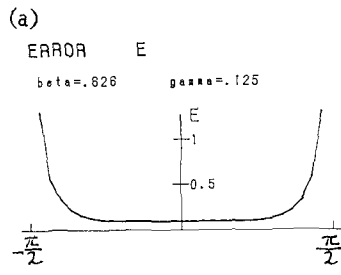


図-3

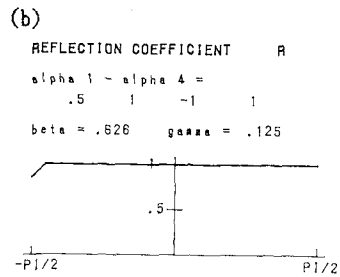
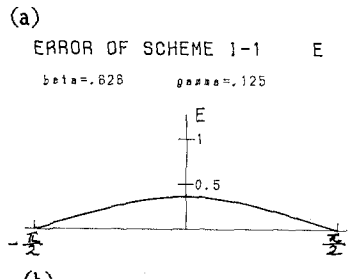


図-4

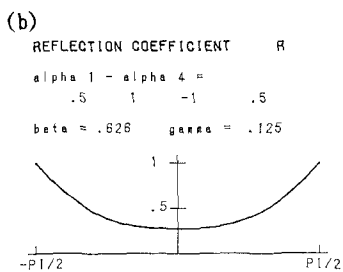
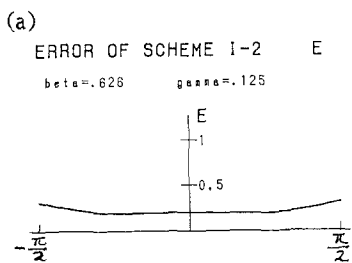


図-5

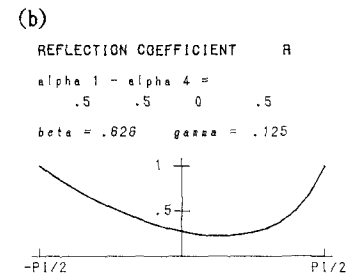
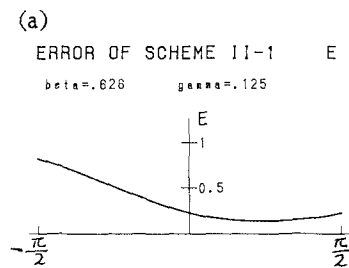


図-6

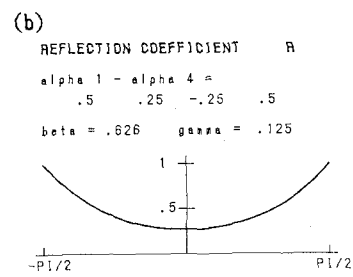
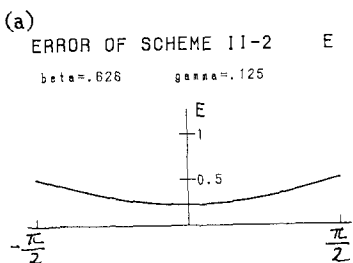


図-7

誤差の振幅比(a)と誤差の反射率(b)

参 考 文 献

- 1) 日野 幹雄 (1988) : 解説-波の無反射透過境界の数値スキームについて、東工大 土木工学科研究報告 No.39, 1-5.
- 2) Smith, W. D. (1974) : A nonreflecting plane boundary for wave propagation problems, J. Comp. Phys, 15, 492-503.
- 3) 日野 幹雄、仲座 栄三 (1987) : 開放境界における波の無反射透過条件の極めて簡単な計算スキームの提案、東工大 土木工学科研究報告 No.38, 31-38.
- 4) 日野 幹雄 (1988) : 数値波動解析における新しい無反射境界スキームの平面二次元問題への適用, 第35回海岸工学講演会論文集, 262-266.
- 5) 寺島 貴志、古屋 温美、浜中 建一郎 (1990) : 長波の数値解析における開放境界スキームの誤差について、土木学会第45回年次学術講演会
- 6) 浜中 建一郎 (1990) : 開放境界からの反射率と誤差の伝播について、土木学会第45回年次学術講演会