

II-18

造波水路内重複波における側壁境界層近傍の流れ

北海道大学 工学部 学生員 根岸 聡

北海道大学 工学部 正 員 浜中 建一郎

北見工業大学工学部 正 員 佐藤 幸雄

1. はじめに

振動流中に置かれた物体の回りに出来る境界層は、時にその物体の回りの振動中に定常な循環流(Steady Streaming)を生じさせることが古くから良く知られている。その代表的な研究としては、円柱の回りの振動流中の循環流に関するSchlichting¹⁾の解析、重複波動場内にできる循環流に関するLonguet-Higgins²⁾の解析、砂漕上の振動流中に出来る循環流に関するLyne³⁾の解析等が挙げられる。これ等のうち、重複波動場内の循環流は沿岸域での海水交換や底質の移動現象に密接にかかわっており海岸工学上特に興味のもたれる現象である。

著者等は、この重複波動場内の循環流に対するLonguet-Higgins²⁾の解析を確かめるため、染料と中立浮子を用いた可視化による簡単な予備実験を試みた。それによると、Longuet-Higginsの解析の様な垂直2次元の循環流は再現されず、強い3次元の構造を持った循環流の存在が確かめられた。このことは、用いた造波水路の水深水路幅が同程度であるため、側壁に出来る境界層が底部に出来る境界層と同程度、内部の境界層に寄与しているためと考えられる。

このことを確かめるため、本研究は側壁に沿った境界層方程式を解き、境界層内の流れの3次元性及びその外縁での定常流速を調べたものである。

2. 2次元境界層方程式

ナビア ストークス及び連続の式は

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) v \quad (2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) w - g \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (4)$$

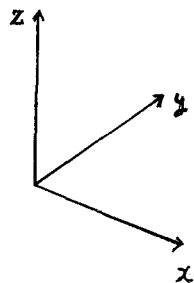
u: x方向の速度 w: z方向の速度 P: 圧力 ν : 動粘性係数 g: 重力

境界層の外側では非粘性流とみなして良いから

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + W \frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (5)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + U \frac{\partial W}{\partial x} + W \frac{\partial W}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} - g \quad (6)$$

U: 境界層外側x方向の速度 W: 境界層外側z方向の速度



Wall boundary layer of standing waves in wave flume

by Satoshi NEGISHI, Kenichiro HAMANAKA and Yukio SATO

境界層内ではほぼ $v=0$ として(2)より

$$\frac{\partial P}{\partial y}=0$$

境界層内部の圧力は外縁の圧力に等しくなる。

従って (1), (3)に(5), (6)を代入して

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = \left(\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + W \frac{\partial U}{\partial z} \right) + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (7)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = \left(\frac{\partial W}{\partial t} + U \frac{\partial W}{\partial x} + W \frac{\partial W}{\partial z} \right) + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (8)$$

となる。

3. 境界層内の定常流解

$$u = u_0 + u_1 + u_2$$

$$w = w_0 + w_1 + w_2 \quad \text{とおくと (7), (8)の線形の項だけ取り出せば}$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial t} + \nu \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} \quad (9)$$

$$\frac{\partial w_0}{\partial t} = \frac{\partial W}{\partial t} + \nu \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \quad (10)$$

さらに2次のオーダの項をまとめると

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_0}{\partial y} + w_0 \frac{\partial u_0}{\partial z} = U \frac{\partial U}{\partial x} + W \frac{\partial U}{\partial z} + \nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \quad (11)$$

$$\frac{\partial w_1}{\partial t} + u_0 \frac{\partial w_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial w_0}{\partial y} + w_0 \frac{\partial w_0}{\partial z} = U \frac{\partial W}{\partial x} + W \frac{\partial W}{\partial z} + \nu \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \quad (12)$$

と展開出来る

始めに u_0 , w_0 及び v_0 を求める

境界層外縁の流速を以下のように表す

$$U(x, t) = U_0(x) \cos \omega t \quad (13)$$

$$W(x, t) = W_0(x) \cos \omega t \quad (14)$$

境界条件は

$y=0$ で $u_0=0$, $y=\infty$ で $u_0=U_0 \cos \omega t$, $y=0$ で $w_0=0$, $y=\infty$ で $w_0=W_0 \cos \omega t$

(13)を(9)に代入する

$$u_0 = U_0 [\cos \omega t - \exp(-\eta) \cos(\omega t - \eta)] \quad (15)$$

$$\eta = \left(\frac{\omega}{2\nu} \right)^{\frac{1}{2}} y$$

同様にして

$$w_0 = W_0 [\cos \omega t - \exp(-\eta) \cos(\omega t - \eta)] \quad (16)$$

(15), (16)を次の連続の式に代入する

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0 \quad \text{境界条件は } y=0 \text{ で } v_0=0$$

$$v_0 = - \left(\frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{\partial W_0}{\partial z} \right) \left(\frac{y}{\omega} \right)^{\frac{1}{2}} [(\sqrt{2}) \eta \cos \omega t + \cos(\omega t \frac{3}{4} - \pi) + \exp(-\eta) \cos(\omega t - \eta \frac{1}{4} - \pi)] \quad (17)$$

となる。

次に u_1, w_1 の定常項を求める

(11)を整理すると

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = U \frac{\partial U}{\partial x} + W \frac{\partial U}{\partial z} - (U_0 \frac{\partial U_0}{\partial x} + V_0 \frac{\partial U_0}{\partial y} + W_0 \frac{\partial U_0}{\partial z}) \quad (18)$$

ここで

$$u_1 = A \frac{1}{\omega} [B \exp(2i\omega t) + C] \quad (19)$$

とおいて(18)の左辺に代入し、(15)(16)(17)を右辺に代入して、

定常項に関する項をまとめると

$$\begin{aligned} -\frac{A}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial \eta^2} = & (U_0 \frac{\partial U_0}{\partial x} + W_0 \frac{\partial U_0}{\partial z}) \left[-\frac{1}{2} \exp(-2\eta) + \exp(-\eta) \cos \eta \right] \\ & (U_0 \frac{\partial U_0}{\partial x} + U_0 \frac{\partial W_0}{\partial z}) \left[\frac{1}{2} \eta \exp(-\eta) (\cos \eta + \sin \eta) - \frac{1}{2} \exp(-\eta) \sin \eta \right] \end{aligned}$$

となり

境界条件 $y=0$ で $u_1=0$ を用いて解くと、 u_1 の定常項 $\bar{u}_1$ は

$$\begin{aligned} \bar{u}_1 = & \frac{1}{\omega} (U_0 \frac{\partial U_0}{\partial x} + W_0 \frac{\partial U_0}{\partial z}) \left[\frac{1}{4} \exp(-2\eta) + \exp(-\eta) \sin \eta \right] \\ & + \frac{1}{\omega} (U_0 \frac{\partial U_0}{\partial x} + U_0 \frac{\partial W_0}{\partial z}) \left[\frac{1}{2} \eta \exp(-\eta) (\sin \eta - \cos \eta) + \frac{1}{2} \exp(-\eta) \cos \eta + \exp(-\eta) \sin \eta \right] \\ & - \frac{1}{\omega} (U_0 \frac{\partial U_0}{\partial x} + W_0 \frac{\partial U_0}{\partial z}) / 4 - \frac{1}{\omega} (U_0 \frac{\partial U_0}{\partial x} + U_0 \frac{\partial W_0}{\partial z}) / 2 \end{aligned}$$

となる。同様にして

$$\begin{aligned} \bar{w}_1 = & \frac{1}{\omega} (U_0 \frac{\partial W_0}{\partial x} + W_0 \frac{\partial W_0}{\partial z}) \left[\frac{1}{4} \exp(-2\eta) + \exp(-\eta) \sin \eta \right] \\ & + \frac{1}{\omega} (W_0 \frac{\partial U_0}{\partial x} + W_0 \frac{\partial W_0}{\partial z}) \left[\frac{1}{2} \eta \exp(-\eta) (\sin \eta - \cos \eta) + \frac{1}{2} \exp(-\eta) \cos \eta + \exp(-\eta) \sin \eta \right] \\ & - \frac{1}{\omega} (U_0 \frac{\partial W_0}{\partial x} + W_0 \frac{\partial W_0}{\partial z}) / 4 - \frac{1}{\omega} (W_0 \frac{\partial U_0}{\partial x} + W_0 \frac{\partial W_0}{\partial z}) / 2 \end{aligned}$$

となる。

最後に境界層外縁($y=\infty$)での定常流側は

$$\bar{u}_1 = -\frac{1}{\omega} (U_0 \frac{\partial U_0}{\partial x} + W_0 \frac{\partial U_0}{\partial z}) / 4 - \frac{1}{\omega} (U_0 \frac{\partial U_0}{\partial x} + U_0 \frac{\partial W_0}{\partial z}) / 2 \quad (20)$$

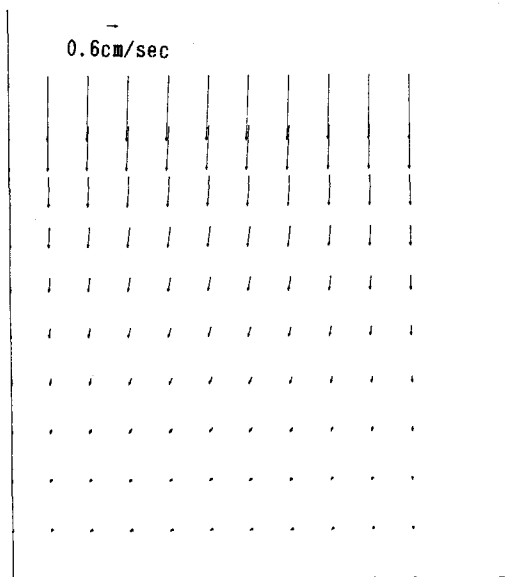
$$\bar{w}_1 = -\frac{1}{\omega} (U_0 \frac{\partial W_0}{\partial x} + W_0 \frac{\partial W_0}{\partial z}) / 4 - \frac{1}{\omega} (W_0 \frac{\partial U_0}{\partial x} + W_0 \frac{\partial W_0}{\partial z}) / 2 \quad (21)$$

4. 側壁境界層外縁の定常流速の結果及び考察

図-1～図3は実験室の造波水路で起こす規模の重複波に対する側壁境界層外縁の定常流速を(20),(21)式から求めたものである。図(1)は水深30cm,周期0.8sec,波高3.9cm 図(2)は水深25cm,周期1.0sec,波高4.0cm 図(3)は水深20cm,周期0.8sec,波高2.8cmである。これらの図で、水平流速成分はほぼ妥当値を与えていると思われるものの、鉛直成分の水面近傍の値は水面境界を通過する定常流が存在する事を意味し物理的妥当性を欠く。このことは、前節で解いた側壁境界層には水面での境界条件が考慮されてないことに起因する。しかしながら通常の境界層方程式では壁面に沿った方向の変化率を無視するため水面での境界条件を導入する事はできない。さらに固定壁である側壁の境界と自由水面の接する線上で物理的に意味のある境界条件をどう与えるかは非常に難しく今後の課題の一つと考えられる。

参考文献

- 1) Schlichting, H.: Boundary-Layer Theory, Sixth edition, McGraw-hill, 1968
- 2) Longuet-higgins, M.S.: Mass transport in water waves, Phil. Trans. roy. soc. A245(903) 535-581, 1953
- 3) Lyne, W.H.: Unsteady viscous flow over a wavy wall, J. Fluid mech., vol. 50, part 1, 33-48, 1971



腹 図-1 側壁境界層外縁の定常流速

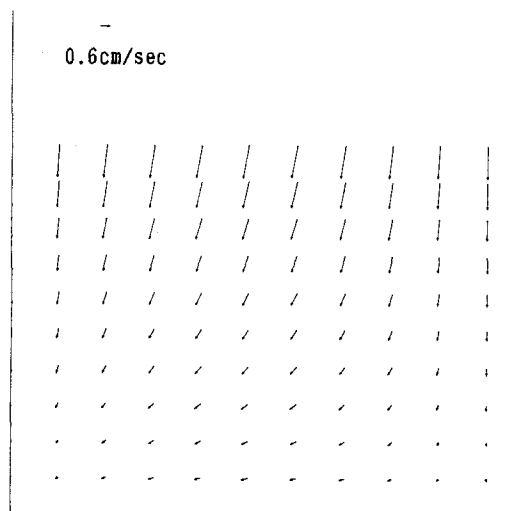


図-2 側壁境界層外縁の定常流速 節

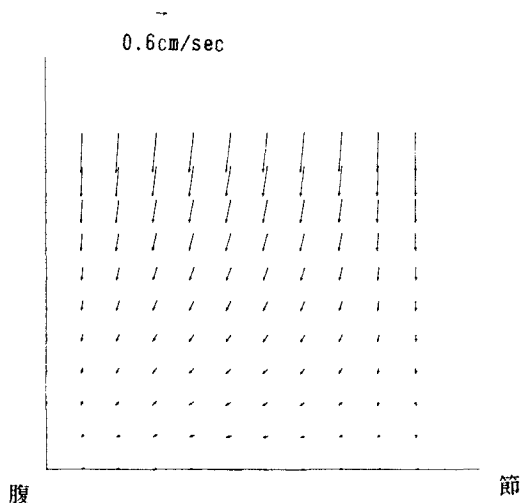


図-3 側壁境界層外縁の定常流速