

II-3 砂 漣 上 の 振 動 流

パシフィックコンサルタンツ(株) 正員 寺島 貴 志
 北海道大学工学部 正員 浜中 建一郎
 北見工業大学 正員 佐藤 幸 雄

1. はじめに

砂漣上の振動流の挙動は砂漣のその後の発達過程に密接な関係を有しているのみならず、流体力学としても、砂漣上に発生するSteady Streamingや交互に発生する剥離、又その後の乱流への移行等興味深い多くの現象を有している。Hara and Mei¹⁾ は有限振幅性を持つ砂漣上の微小振幅的な振動流とその逆の場合に対し、摂動法を用いた解析法により、砂漣上のSteady Streamingによって生ずる定常循環流の解析を行った。この場合、剥離の生じない層流状態が仮定されているが、砂漣の振幅や、振動流の振幅がさらに大きくなると、砂漣のクレストの前後に周期的に剥離が生ずることが予想される。Longuet-Higgins²⁾ はシャープなクレストを有する砂漣を設定し、そのクレスト頂部から常に剥離が生ずるとの仮定のもとに、非粘性渦糸郡モデルを用いて砂漣上の振動流の解析を行った。しかしながら、この場合でも剥離を伴った流れの場合全体が表現されてはいない。一方、Caponi等³⁾ は水面波上の定常空気流に対し、一部数値計算を用いた解析を行い、水面波の風下側に出来る剥離渦の発生の表現を試みた。

本研究では、このCaponi等³⁾ の方法を振動流に拡張し、剥離を伴った砂漣上の振動流の挙動特に剥離渦の上方への拡散の様子を調べることを目的とする。始めにHara and Mei¹⁾ と同様に砂漣表面に沿った座標系となる様な等角写像を行い、渦度方程式を導く。次に定常な振動流状態を仮定し、流れ関数と渦度を、水平方向には砂漣の波長を基本周期とするフーリエ級数に、時間的には振動流の周期を基本周期とするフーリエ級数に展開する。これ等を基礎方程式に代入することにより、垂直方向の非線形常微分方程式に帰着する。これを、底面境界層近傍ではメッシュが密となる様な適当な差分化を行うことにより、各フーリエ係数を数値計算的に求めるものである。

次節以後、その定式化を具体的に述べ、最後に第一段階として最も簡単化させた場合の計算例を示す。

2. 基礎方程式と等角写像

基礎方程式として、次式のNavier-Stokesの式から出発する。

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla \Omega + \nu \Delta \vec{v} \quad (1)$$

ここで $\vec{v}$ は流速ベクトル、 p は圧力、 Ω は外力ポテンシャル、 ρ は水の密度、 ν は動粘性係数である。

(1) 式の両辺の回転を求めると、

$$\frac{\partial}{\partial t} (\text{rot } \vec{v}) = \text{rot } (\vec{v} \times \text{rot } \vec{v}) + \nu \Delta (\text{rot } \vec{v}) \quad (2)$$

Oscillating flow over a wavy bed

by Takashi Terashima, Ken-ichiro Hamanaka and Yukio Sato

今、流れは垂直2次元流とし、 x を水平軸、 y を垂直方向き軸とし、 u, v を各々 x, y 方向の流速とすると、流れ関数 φ と渦度 ω は

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (3)$$

$$\omega = \text{rot} \vec{v} = -\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right) \quad (4)$$

と表わされ、(2) 式は以下の様になる。

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} - \nu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (5)$$

次に以下の様な等角写像を用いた座標変換を行う。

$$\left. \begin{aligned} x &= \xi - ae^{-k\eta} \sin k\xi \\ y &= \eta + ae^{-k\eta} \cos k\xi \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

ここで、 a は砂漣の振幅、 k は砂漣の波長を表わす。従って、 $\eta = 0$ は砂漣表面に沿った ξ 軸を表わす。この (ξ, η) 平面に基礎方程式 (4), (5) 式を変換し、さらに有次元量を表わすために全変量に記号“'”を付して表わすと、

$$\left. \begin{aligned} J\omega'_{\xi} + \varphi'_{\eta}\omega'_{\xi} - \varphi'_{\xi}\omega'_{\eta} - \nu'(\omega'_{\xi\xi} + \omega'_{\eta\eta}) &= 0 \\ J\omega' &= -(\varphi'_{\xi\xi} + \varphi'_{\eta\eta}) \\ J &= 1 - 2a'k'e^{-k'\eta} \cos k'\xi' + (a'k')^2 e^{-2k'\eta} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

さらに境界条件として、 $\eta' = 0$ で

$$\varphi' = \varphi'_{\xi} = \varphi'_{\eta} = 0 \quad (8)$$

$\eta' = \infty$ で

$$\varphi'_{\xi} = 0, \quad \varphi'_{\eta} = \sigma' A' \cos \sigma' t' \quad (9)$$

次に全ての変量を k' と σ' を用いて無次元化すると

$$\xi = k'\xi', \quad \eta = k'\eta', \quad t = \sigma't'$$

$$\varphi = \frac{k'}{\sigma'} \varphi', \quad \omega = \frac{\omega'}{\sigma'}, \quad \nu = \frac{k'^2}{\sigma'} \nu'$$

となり、(7), (8), (9) 式は

$$\left. \begin{aligned} J\omega_{\xi} + \varphi_{\eta}\omega_{\xi} - \varphi_{\xi}\omega_{\eta} - \nu(\omega_{\xi\xi} + \omega_{\eta\eta}) &= 0 \\ J\omega &= -(\varphi_{\xi\xi} + \varphi_{\eta\eta}) \\ J &= 1 - 2\epsilon e^{-\eta} \cos \xi + \epsilon^2 e^{-2\eta} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$\eta = 0 \text{ で } \quad \varphi = \varphi_\xi = \varphi_\eta = 0 \quad (11)$$

$$\eta = \infty \text{ で } \quad \varphi_\xi = 0, \quad \varphi_\eta = \alpha \cos t \quad (12)$$

$$\text{ここで } \varepsilon = k'a', \quad \alpha = k'A'$$

次に、流れ関数と渦度を ξ 軸と t 軸各々に沿ってFourier級数に展開すると、

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \sum_m \sum_n f_{m,n} e^{i(m\xi + \eta t)} \\ \omega &= \sum_m \sum_n g_{m,n} e^{i(m\xi + \eta t)} \\ J &= h_0 + h_1 (e^{i\xi} + e^{-i\xi}) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

$$\text{ここで } f_{-m,-n} = \overline{f_{m,n}}, \quad g_{-m,-n} = \overline{g_{m,n}}, \quad h_0 = 1 + \varepsilon^2 e^{-2\eta}, \quad h_1 = -\varepsilon e^{-\eta}$$

ただし、記号“ $\sim$ ”は共役複素数を示す。

(13) 式を (10) 式に代入し、各周波数毎にまとめると、

$$\begin{aligned} inh_0 g_{m,n} + inh_1 (g_{m-1,n} + g_{m+1,n}) + \sum_p \sum_q \left[ipf'_{m-p,n-q} g_{p,q} - i(m-p)f_{m-p,n-q} g'_{m,n} \right] \\ - \nu (g''_{m,n} - m^2 g_{m,n}) = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

$$h_0 g_{m,n} + h_1 (g_{m-1,n} + g_{m+1,n}) + (f''_{m,n} - m^2 f_{m,n}) = 0 \quad (15)$$

となる。さらに境界条件 (11) 式、(12) 式は

$$\left. \begin{aligned} f_{m,n}(0) &= f'_{m,n}(0) = 0 \\ f_{m,n}(\infty) &= 0 \quad \text{ただし } m \neq 0 \\ f'_{0,1}(\infty) &= f'_{0,-1}(\infty) = \frac{\alpha}{2} \\ f'_{m,n}(\infty) &= 0 \quad \text{ただし } m \neq 0, m \neq \pm 1 \\ g_{m,n}(\infty) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

ここで (14), (15), (16) 式中の記号“ $'$ ”は η 軸に関する微分で表わす。

この様にして、基礎方程式はFourier係数に関する η 軸上の非線形常微分方程式に帰着する。これらの方程式はCaponi等³⁾と同様に差分化し、例えばNewton法により数値的に解くこととする。

底面境界近傍では流速は急激に変化するため、底面近傍では差分メッシュを細かくする必要がある。ここでは

$$\eta = \eta_\tau \frac{e^{b\zeta} - 1}{e^b - 1} \quad (17)$$

で変換される ζ 軸で等分割に差分化する。ただし $b > 1$ 。この変換では $0 \leq \eta \leq \eta_\tau$ が $0 \leq \zeta \leq 1$ に対応し、 b

の値が大きい方が境界近傍を細かく分割する。(17) 式から

$$\frac{d\zeta}{d\eta} = \frac{e^b - 1}{b\eta_T} e^{-b\zeta} \equiv \zeta_1$$

$$\frac{d^2\zeta}{d\eta^2} = -b\zeta_1^2 \equiv \zeta_2$$

とし、さらに中央差分をとり

$$f_{m,n}(\zeta) = f_{m,n}(j\Delta\zeta) = f_{m,n}^{(j)}$$

の様に記すと、(14), (15) 式は最終的に以下の様に表わされる。

$$\begin{aligned} inh_0 g_{m,n}^{(j)} + inh_1 (g_{m-1,n}^{(j)} + g_{m+1,n}^{(j)}) + \sum_p \sum_q \frac{\zeta_1}{2\Delta\zeta} \left\{ ip (f_{m-p,n-q}^{(j+1)} - f_{m-p,n-q}^{(j-1)}) g_{p,q}^{(j)} - (m-p) f_{m-p,n-q}^{(j)} (g_{m,n}^{(j+1)} - g_{m,n}^{(j-1)}) \right\} \\ - \nu \frac{\zeta_1^2}{(\Delta\zeta)^2} (g_{m,n}^{(j+1)} - 2g_{m,n}^{(j)} + g_{m,n}^{(j-1)}) + \frac{\zeta_2}{2\Delta\zeta} (g_{m,n}^{(j+1)} - g_{m,n}^{(j-1)}) - m^2 g_{m,n}^{(j)} \Big\} = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

$$h_0 g_{m,n}^{(j)} + h_1 (g_{m-1,n}^{(j)} + g_{m+1,n}^{(j)}) + \frac{\zeta_1^2}{(\Delta\zeta)^2} (f_{m,n}^{(j+1)} - 2f_{m,n}^{(j)} + f_{m,n}^{(j-1)}) + \frac{\zeta_2}{2\Delta\zeta} (f_{m,n}^{(j+1)} - f_{m,n}^{(j-1)}) - m^2 f_{m,n}^{(j)} = 0 \quad (19)$$

境界条件は (16) の第3式だけが以下の様になる

$$f'_{0,1} = f'_{0,-1} = \frac{\alpha}{2\zeta_1} \quad \text{ただし} \quad \zeta=1$$

3. 簡単な計算例

この節では、この方法の基本的な性質を調べるため、最も簡単な計算条件のもとでの計算例を示す。底面は平坦とし、水平方向の Fourier 係数は全て零とする。時間軸上の Fourier 係数は基本周期成分以外を全て零とする。従って求める係数は (18), (19) 式中の $f_{0,1}$ と $g_{0,1}$ だけである。これ等は複素数であるから実部と虚部に分離し、

$$f_{0,1} = f_R + if_I, \quad g_{0,1} = g_R + ig_I \text{ とする。}$$

図1から図4は $\eta_T = 10$ とし、 ζ の分割数 N と η 軸の歪度 b を種々変えて求めた f_R , f_I , g_R , g_I の値である。縦軸は ζ の値である。なお、振動流の振幅は単位量1をとっている。また、図中の Fourier 係数の値も無次元量である。図中○印が今回の方法で求めた値で、細い実践が解析解である。全体的に見て解析解の値と良く一致している様であるが、流れ関数の実部の上部 (f_R の $\zeta = 1$ 近傍) と渦度の虚部の 底面近傍 (g_I の $\zeta = 0$ 近傍) にまだ有意な差異が見られる。前節で述べた様に、歪み度 b の値が大きな程、底面近傍をより強く引き伸ばすことになるが、計算機の有効桁の制約からより小さな値が分割数 N の上限となる。図1から図4は $b = 2, 3, 4, 5$ とし、各々の b について N を最大とした時の例である。 b を大きくした方が底面での渦度は解析解に近付き、 N を大きくした方が上部での流れ関数の値は解析解に近付く様である。なお、この計算例はパソコンベーシックの単精度によるものであるが、倍精度、倍々精度の計算を実行すればより精度が上がる事が期待される。

現在のところ、最も簡単な例を示しただけであるが、この結果から、まえがきに述べた砂漣上の剥離を伴った振動流の計算に対する可能性が確かめられたと思われる。

参考文献

- 1) Hara, T. and Mei, C.C. : Oscillating flow over periodic ripples, J. Fluid Mech., vol. 211, pp.183 – 209, 1990
- 2) Longuet – Higgins, M.S. : Oscillating flow over steep sand ripples, J. Fluid Mech., vol. 107, pp.1 – 35, 1981
- 3) Caponi, E.A.etal : Calculations of laminar viscous flow over a moving wavy surface, J. Fluid Mech., vol.124, pp.347 – 362, 1982

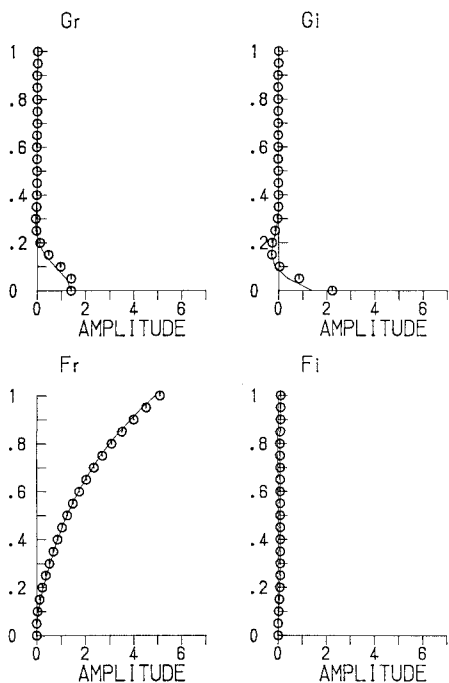


図1 渦度 (上) と流れ関数 (下) の実部 (左) と虚部 (右) $b=2$, $N=20$

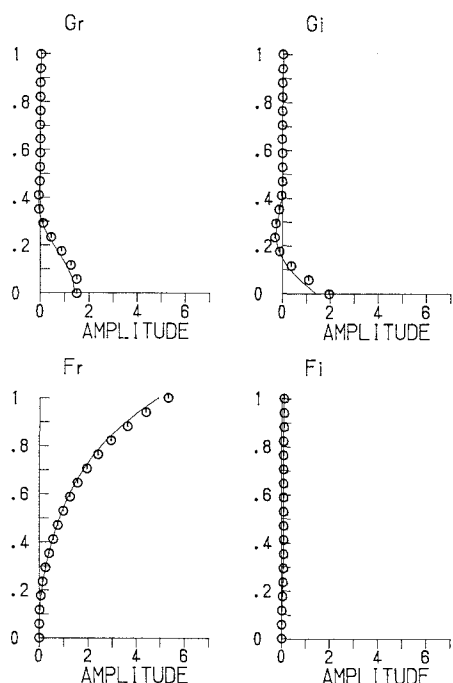


図2 渦度 (上) と流れ関数 (下) の実部 (左) と虚部 (右) $b=3$, $N=17$

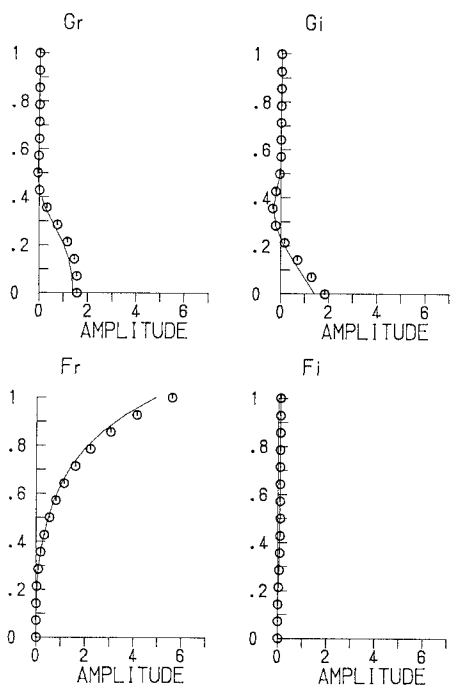


図3 渦度 (上) と流れ関数 (下) の実部 (左) と虚部 (右) $b=4$, $N=20$

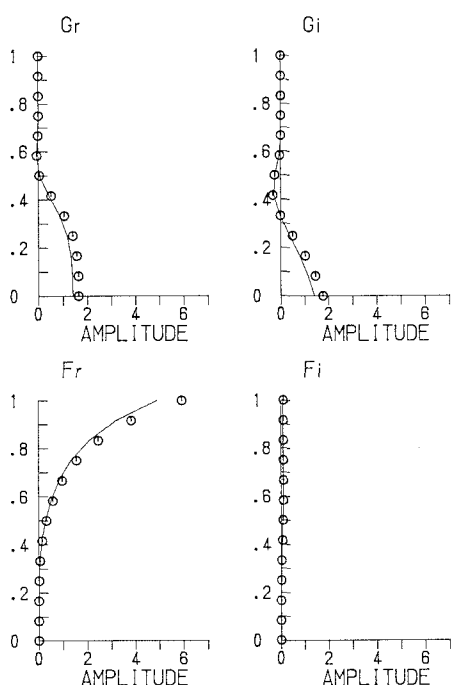


図4 渦度 (上) と流れ関数 (下) の実部 (左) と虚部 (右) $b=5$, $N=12$