Ⅱ－１

地球規模の潮汐の数値計算のための基礎方程式について

北海道大学工学部　　　　神　田　尚　樹
北海道大学工学部　正　員　　浜　中　建一郎

１．はじめに

潮汐は海洋における種々の現象の中で最も古くから調べられてきた現象のひとつであり、海岸工学の上でも最も基本的な問題のひとつでもある。実際沿岸域に於ける潮汐波や潮汐流の数値計算は海岸構造物の設計や海岸保全を考える際、しばしば行われている。その際、多くの場合問題となるのは、外洋上に設けた人工的な仮想境界でどの様な入射波を与えるかと言うことと、いわゆる解放境界の問題であり、現在でも十分に満足できる手法はまだないと考えられる。また、沿岸流域での潮汐の数値計算は自由波としての長波近似がなされるが、現実の潮汐波は、起潮力によって励起される強制波と大陸間で無限に繰り返された反射波が重なって準定常状態に達したものであり、単純な自由波としての長波ではなく、広い海域を対象とする数値計算ではその違いが無視し得なくなると考えれる。しかしながら、これらの問題は地球全域を計算領域とすることにより解消される。実際これまでも大型計算機を用いた地球規模の数値計算はいくつか報告されてる。例えば、Schwiderski(1978)によるものがあげられる。。一方、最近の計算機の発達は、研究室内で通常使用しているパソコン程度の計算機でも地球規模の数値計算を可能としているものと思われ、もし可能であれば、同時に地球規模の現象の理解に大きく寄与するものと思われる。又、最近の地球環境の問題によって、土木工学あるいは海岸工学に於いても地球規模の現象の理解が余儀なくされているものと考えられる。

このことから著者らは手始めに手元にある海岸関係のテキストや手には入り得る論文を調べてみたのだが問題が古い割には、すぐに使える形で起潮力も含めた運動方程式の記述が見つからなかった。従って、本研究では、地球規模の潮汐の数値計算のための理解し易い基礎方程式を導くことを目的とする。始めに、地球と月の重心を結ぶ軸を中心とする極座標で記述された起潮力を地球の回転軸を中心とする極座標に変換し、起潮力を含めたナビアｰストークスの式を導く。次に浅水流近似のもとに水深方向に積分し数値計算のための基礎方程式を導く。

２．起潮力の座標変換

地球表面上の任意の点Ｐにおける月による起潮力の水平成分 f_h および鉛直成分 f_v は、

$$f_h = \frac{3KMR}{2D^3} \sin 2\theta \tag{1}$$

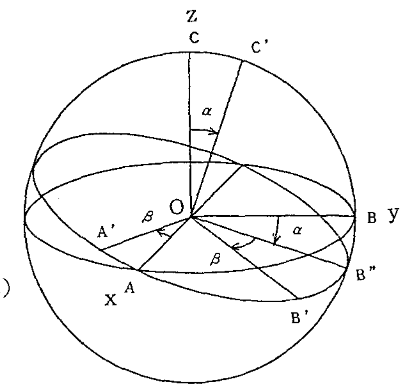
$$f_v = \frac{3KMR}{D^3} \left(\cos^2\theta - \frac{1}{3}\right) \tag{2}$$

で与えられる。ここで、Ｋは万有引力定数、Ｍは月の質量、Ｒは地球の平均半径、θ は地球の中心Ｏと月の中心を結んだ直線とＯＰのなす角度を表す。また起潮力ポテンシャル Ω は次式のようになる。

Basic Equation for Numerical Integration of Global Tide
by Naoki KANDA and Kenichiro HAMANAKA

$$\Omega = \frac{3KMR^2}{2D^3}\left(\cos^2\theta - \frac{1}{3}\right) \tag{3}$$

式（1），（2），（3）は月の公転面と地球の自転軸が直交しているときのもである。しかし、実際には月の公転面と地球の自転軸は直交しておらず、角度α（＝23.4°）傾いている。また、地球に固定した座標上でのある月の位置から角度β回転した時の月の位置を考える。そのために、地球表面の位置ベクトルの変換を行う。ある球座標上の単位ベクトル$\vec{i}'$，$\vec{j}'$，$\vec{k}'$とα、β傾いた球座標上の単位ベクトル$\vec{i}$，$\vec{j}$，$\vec{k}$の関係を求めると次のようになる。



図－1

$$\begin{aligned}\vec{i} &= \cos\beta\,\vec{i}' - \cos\alpha\sin\beta\,\vec{j}' - \sin\alpha\sin\beta\,\vec{k}'\\ \vec{j} &= \sin\beta\,\vec{i}' + \cos\alpha\cos\beta\,\vec{j}' + \sin\alpha\cos\beta\,\vec{k}'\\ \vec{k} &= \quad - \cos\alpha\,\vec{j}' + \cos\alpha\,\vec{k}'\end{aligned} \tag{4}$$

地球表面上の球座標における位置ベクトル$\vec{r}$（R、ϕ、ϕ）をα，β傾いた球座標での位置ベクトル$\vec{r}$（R，ϕ'，ϕ'）へ変換する。

$$\vec{r} = R\sin\phi\cos\phi\,\vec{i} + R\sin\phi\sin\phi\,\vec{j} + R\cos\phi\,\vec{k} \tag{5}$$

（4）を代入すると、

$$\vec{r} = r_x\vec{i}' + r_y\vec{j}' + r_z\vec{k}' \tag{6}$$

$$\begin{aligned}r_x &= R\,(\sin\phi\cos\phi\cos\beta + \sin\phi\sin\phi\sin\beta)\\ r_y &= R\,(-\sin\phi\cos\phi\cos\alpha\sin\beta + \sin\phi\sin\phi\cos\alpha\cos\beta - \cos\phi\sin\alpha)\\ r_z &= R\,(\sin\phi\cos\phi\sin\alpha\sin\beta + \sin\phi\sin\phi\sin\alpha\cos\beta + \cos\phi\cos\alpha)\end{aligned}$$

よって、位置ベクトル$\vec{r}$（R，ϕ'，ϕ'）のϕ'とϕ'は次のようにϕとϕで表せる。

$$\cos\phi' = \frac{r_z}{R}, \quad \tan\phi' = \frac{r_y}{r_x} \tag{7}$$

次に、起潮力のα，β傾いた座標への変換を行う。まず、θの関数で表された起潮力ポテンシャル（3）を余緯度ϕ'，経度ϕ'で表す。θとϕ'，ϕ'の関係は

$$\cos\theta = \sin\phi'\sin\phi' \tag{8}$$

で表せ、起潮力ポテンシャルは次式のように書ける。

$$\Omega = -\frac{3KMR^2}{2D^3}\left(\sin^2\phi'\sin^2\phi' - \frac{1}{3}\right) \tag{9}$$

（9）式を偏微分してR，ϕ'，ϕ'方向の起潮力を求める。

$$\begin{aligned}f_R &= 2A\sin^2\phi'\sin^2\phi'\\ f_{\phi'} &= -A\sin\phi'\cos\phi'\sin^2\phi'\end{aligned} \tag{10}$$

$$f_{\phi'} = -A\sin^2\phi' \ \sin\phi' \ \cos\phi'$$

$$A = \frac{3KMR}{2D^3}$$

(10) 式をを用いて起潮力の直交座標成分を求める。

$$f_{x'} = f_R \sin\phi' \ \cos\phi' + f_{\phi'}\cos\phi' \ \cos\phi' - f_{\phi'}\sin\phi'$$

$$f_{y'} = f_R \sin\phi' \ \sin\phi' + f_{\phi'}\cos\phi' \ \sin\phi' + f_{\phi'}\cos\phi' \tag{11}$$

$$f_{y'} = f_R c\ os\phi' - f_{\phi'}\sin\phi'$$

(4)，(11) 式を用いてα，β傾いた直交座標成分を求める。

$$f_x = f_{x'}\cos\beta + f_{y'}\sin\beta$$

$$f_y = f_{x'}\cos\alpha\sin\beta + f_{y'}\cos\alpha\cos\beta - f_{z'}\sin\alpha \tag{12}$$

$$f_z = f_{x'}\sin\alpha\sin\beta + f_{y'}\sin\alpha\cos\beta + f_{z'}\cos\alpha$$

(12) 式を用いてR，ϕ，ϕ方向成分を求める。

$$f_R = \ f_x\sin\phi\cos\phi + f_y\sin\phi\sin\phi + f_z\cos\phi$$

$$f_\phi = \ f_x\cos\phi\cos\phi + f_y\cos\phi\sin\phi - f_z\sin\phi \tag{13}$$

$$f_\phi = -f_x\sin\phi + f_y\cos\phi$$

3．ナビエ-ストークス方程式および連続式の積分

地球表面上を運動している物体に働くコリオリ力$\vec{f}_C$は

$$\vec{f}_C = -2\vec{\Omega}\times\vec{u} \tag{14}$$

であり、ここで$\vec{\Omega}$は地球の角速度ベクトル、$\vec{u}$は物体の速度ベクトルである。$\vec{\Omega}$，$\vec{u}$の地球表面上での直交座標成分

$$\vec{\Omega} = (-\Omega\sin\phi,\ 0,\ \Omega\cos\phi) \qquad 、\vec{u} = (u,\ v,\ w) \tag{15}$$

を用いてコリオリ力を求める。

$$\vec{f}_C = 2\Omega v\cos\phi\,\vec{i} - 2\Omega\,(w\sin\phi + u\cos\phi)\,\vec{j} + 2\Omega v\sin\phi\,\vec{K} \tag{16}$$

ここで、Ωは地球の自転角速度で、7.3×10^{-5}／secである。

(13)，(16) 式の起潮力、コリオリ力を球座標のナビエーストークス方程式へ代入すると、

$$\frac{u}{t} + \frac{u}{R}\ \frac{u}{\phi} + \frac{v}{R\sin\phi}\ \frac{u}{\phi} + w\ \frac{u}{r} + \frac{uw}{R} - \frac{v^2\cot\phi}{R}$$

$$= 2\Omega v\cos\phi + f_\phi - \frac{1}{\rho R}\ \frac{p}{\phi} + \nu\ [\ \frac{1}{R^2\sin\phi}\ \frac{}{\phi}\ (\sin\phi\ \frac{u}{\phi}) + \frac{1}{R^2\sin^2\phi}\ \frac{{}^2u}{\phi^2}$$

$$+ \frac{1}{R^2}\ \frac{}{r}\ (R^2\ \frac{u}{r}) - \frac{2\ \cos\phi}{R^2\sin^2\phi}\ \frac{u}{\phi} + \frac{2}{R^2}\ \frac{w}{\phi} - \frac{u}{R^2\sin^2\phi}\ ] \tag{17}$$

$$= -2\Omega\,(w\sin\phi + u\cos\phi) + f\ \frac{}{\phi} - \frac{1}{\rho R\sin\phi}\ \frac{p}{\phi} + \nu\ \Big[\frac{1}{R^2\sin\phi}\ \frac{}{\phi}\ (\sin\phi\ \frac{v}{\phi})$$

$$+ \frac{1}{R^2\sin^2\phi}\ \frac{{}^2 v}{\phi^2} + \frac{1}{R^2}\ \frac{}{r}\ (R^2\ \frac{v}{r}) + \frac{2}{R^2\sin\phi}\ \frac{w}{\phi}$$

$$+ \frac{2\ \cos\phi}{R^2\ \sin^2\phi}\ \frac{u}{\phi} - \frac{v}{R^2\ \sin^2\phi}\Big] \tag{18}$$

となり、流速成分u，v，wはそれぞれ、南向き、東向き、鉛直上向きを正としている。また、球座標の連続の式は、次のようになる。

$$\frac{1}{R}\ \frac{u}{\phi} + \frac{1}{R\sin\phi}\ \frac{v}{\phi} + \frac{w}{r} + \frac{2w}{R} + \frac{u\cot\phi}{R} = 0 \tag{19}$$

（17）、（18）式のu，vを鉛直方向の平均流速U，V、それからのずれu'，v'、および流量M，Nでおきかえると次式の様になる。

$$u = U + u' \qquad 、v = V + v'$$

$$\int_{-h}^{\zeta} u'\ dr = 0 \qquad 、\int_{-h}^{\zeta} v'\ dr = 0 \tag{20}$$

$$M = \int_{-h}^{\zeta} u\,dr = (\zeta + h)\ U \qquad 、N = \int_{-h}^{\zeta} v\,dr\ (\zeta + h)\ V$$

まず、（17）式の左辺を海底から海面まで鉛直方向に積分する。

$$\int_{-h}^{\zeta} \Big(\frac{v}{t} + \frac{u}{R}\ \frac{v}{\phi} + \frac{1}{R\sin\phi}\ \frac{v}{\phi} + w\ \frac{v}{r} + \frac{uv\cot\phi}{R} + \frac{vw}{R}\Big)\ dr$$

$$= \frac{M}{t} + \frac{}{\phi}\int_{-h}^{\zeta}\frac{u^2}{R}\,dr + \frac{}{\phi}\int_{-h}^{\zeta}\frac{uv}{R\sin\phi}\,dr - u_s\Big(\frac{\zeta}{t} + \frac{u_s}{R}\ \frac{\zeta}{\phi} + \frac{v_s}{R\sin\phi}\ \frac{\zeta}{\phi}$$

$$- w_s\Big) - u_b\Big(\frac{u_b}{R}\ \frac{h}{\phi} + \frac{v_b}{R\sin\phi}\ \frac{h}{\phi} + w_b\Big) + \frac{\cot\phi}{R}\int_{-h}^{\zeta}(u^2 - v^2)\ dr \tag{21}$$

ここで、添字s，bはそれぞれ海面、海底での値を示す。u，vを平均流速U、Vで表すと、

$$\int_{-h}^{\zeta} u^2\,dr = U^2\ (\zeta + h) + \int_{-h}^{\zeta} u^2\,dr$$

$$\int_{-h}^{\zeta} v^2\,dr = V^2\ (\zeta + h) + \int_{-h}^{\zeta} v^2\,dr \tag{22}$$

$$\int_{-h}^{\zeta} uv\ dr = UV\ (\zeta + h) + \int_{-h}^{\zeta} uv\,dr$$

となり、右辺第二項は第一項に比べて十分小さいので省略できる。海面および海底を表す式は

$$\zeta\ (\phi、\phi、t) - z = 0$$

$$h\ (\phi、\phi) - z = 0 \tag{23}$$

で表せ、（23）式を全微分すると

$$\frac{\zeta}{t} + \frac{u_s}{R}\ \frac{\zeta}{\phi} + \frac{v_s}{R\sin\phi}\ \frac{\zeta}{\phi} - w_s = 0$$

$$\frac{u_b}{R}\ \frac{h}{\phi} + \frac{v_b}{R\sin\phi}\ \frac{h}{\phi} - w_b = 0 \tag{24}$$

次に（17）式の右辺の積分を考える。

$$\int_{-h}^{\zeta} 2\Omega v\cos\phi\, dr = 2\Omega\cos\phi \int_{-h}^{\zeta} v\, dr = 2\Omega N\cos\phi、\int_{-h}^{\zeta} f_{\phi}\, dr = (\zeta+h)\, f_{\phi} \tag{25}$$

摩擦項の積分において、水平混合項は他の項に比べて小さいのでここでは無視するものとする。

$$\int_{-h}^{\zeta} \frac{\nu}{R^2}\frac{}{r}\left(R^2\frac{u}{r}\right) dr = \nu\left[\frac{u}{r}\right]_{r=\zeta} - \nu\left[\frac{u}{r}\right]_{r=-h} \tag{26}$$

(26) 式の右辺第一項は風によるストレスを表し、今風の効果は考えていないので、これは省略できる。第二項は海底摩擦を示し、潮流の場合γ^2を海底摩擦係数とすると

$$\begin{aligned}\left[\nu\frac{u}{r}\right]_{r=-h} &= \gamma^2 U\,(U^2+V^2)^{0.5} = \frac{\gamma^2(U^2+V^2)^{0.5}}{\zeta+h}M\\ \left[\nu\frac{v}{r}\right]_{r=-h} &= \gamma^2 V\,(U^2+V^2)^{0.5} = \frac{\gamma^2(U^2+V^2)^{0.5}}{\zeta+h}N\end{aligned} \tag{27}$$

となることが観測で確かめられている。よって、以上をまとめると (17) 式の積分は

$$\begin{aligned}&\frac{M}{t} + \frac{}{\phi}\left(\frac{\zeta+h}{R}U^2\right) + \frac{}{\phi}\left(\frac{\zeta+h}{R\sin\phi}UV\right) + \frac{\cot\phi}{R}(U^2+V^2)\\ &\quad = 2\Omega N\cos\phi + (\zeta+h)\, f_{\phi} - \frac{G}{R}(\zeta+h)\frac{\zeta}{\phi}\\ &\quad\quad - \frac{\gamma^2(U^2+V^2)^{0.5}}{\zeta+h}M - \frac{M}{R^2\sin^2\phi}\end{aligned} \tag{28}$$

となる。同様にして (18) 、(19) 式の積分形は次式になる。

$$\begin{aligned}&\frac{N}{t} + \frac{}{\phi}\left(\frac{\zeta+h}{R}UV\right) + \frac{}{\phi}\left(\frac{\zeta+h}{R\sin\phi}V^2\right) + \frac{2UV\cot\phi}{R}\\ &\quad = -2\Omega M\cos\phi + (\zeta+h)\, f_{\phi} - \frac{G}{R\sin\phi}(\zeta+h)\frac{\zeta}{\phi}\\ &\quad\quad - \frac{\gamma^2(U^2+V^2)^{0.5}}{\zeta+h}N - \frac{N}{R^2\sin^2\phi}\end{aligned} \tag{29}$$

$$\frac{\zeta}{t} + \frac{1}{R}\frac{M}{\phi} + \frac{1}{R\sin\phi}\frac{N}{\phi} + \frac{u\cot\phi}{R} = 0 \tag{30}$$

4. あとがき

前節までで述べたように今回は地球規模の潮汐の数値計算のための基礎方程式を導いたにとどまったが、今後、これを適当に差分化し、実際の潮汐の数値計算を実行していきたい。

参考文献

1）彦坂　繁雄：海洋物理Ⅲ、東海大学出版会、1971

2）Schwiderski, E. W. : On Charting Global Ocean Tides, Reviews of Geophysics and Physics, Vol. 18 No. 1, P. 243-268, Feb. 1980

3) Schwiderski, E.W. : Ocean Tides, Part I : Global Ocean Tidal Equations, J. Mar. Geod., in press 1979
4) Pedlosky, J. : Geophysical Fluid Dynamics, Springer-Verlat, 1979
5) Landau, L.D. and Lifshitz, E.M. : Fluid Mechanics, Pergamon Press, 1987
6) 鈴木　香緒里：オホーツク海の潮汐の数値実験、北海道大学理学部修士論文、1985