

等方性長円筒の非軸対称定常熱応力

北見工業大学 正員 奥村 勇

1. 緒 言

3次元弾性問題は、古くから、多くの研究者によって取扱われて来たが、これに極めて近いテーマとして熱弾性問題（熱応力問題）がある。等方性体の熱応力問題については、Goodier の熱弾性変位ポテンシャルを用いて、多くの問題が解かれており¹⁻³⁾、最近では、異方性体の熱応力問題に関する研究も幾つか見受けられる様になった⁴⁻⁶⁾。

熱応力問題の場合には、温度場の境界条件次第で難度が著しく異なり、例えば、熱放散の境界条件を持つ場合には、定常状態或は非定常状態を問わずに、難しい熱応力問題になる様である。等方性体及び最近の異方性体に関する熱応力問題は、長い歴史の中で、広汎な研究がなされて来たが、3次元弾性問題としても取扱いが複雑な長円筒或は短円筒の非軸対称熱応力問題は、定常状態及び非定常状態共にあまり研究されていない様である。

本研究は、著者が提案した3次元弾性問題の解⁷⁾とGoodier の熱弾性変位ポテンシャルを用いて、内面に非軸対称温度が課せられた等方性長円筒の定常熱応力を解析するものである。温度場の境界条件は、3次的に厳密に満足されており、応力場の境界条件は、長円筒の特性を利用して、一つが合応力によって満足されている。

2. 温度場

定常状態の熱伝導の方程式は、Laplace の方程式となるので、その解は、 T を温度変化とすれば、次式となる。

$$T = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \cos m \theta \cos \beta_n z [S_{mn}^{(1)} I_m(\beta_n r) + S_{mn}^{(2)} K_m(\beta_n r)] + \sum_{n=1}^{\infty} \cos m \theta (S_{m0}^{(1)} r^m + S_{m0}^{(2)} r^{-m}) \quad (1)$$

ここで、 $S_{mn}^{(1)}, \dots, S_{m0}^{(2)}$ は、境界条件から定められる未定定数であり β_n は、次式で表される助変数である。

$$\beta_n = \frac{n\pi}{h} \quad (n=1, 2, \dots) \quad (2)$$

図-1に示した長円筒の温度場は、 z に関して偶とし、境界条件は両端面を断熱として、次式を考える。

$$z = \pm h \text{ において、 } \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \quad (3 \cdot a)$$

$$r = a \text{ において、 } T = g(\theta, z) \quad (3 \cdot b)$$

$$r = b \text{ において、 } T = 0 \quad (3 \cdot c)$$

ここで、

$$g(\theta, z) = \begin{cases} T_0 \cos \theta & [|z| < d \text{ かつ } 0 \leq \theta \leq 2\pi] \\ 0 & [|z| > d \text{ かつ } 0 \leq \theta \leq 2\pi] \end{cases} \quad (4)$$

ここで、 T_0 は基準温度である。長円筒の内面の温度分布 $g(\theta, z)$ が

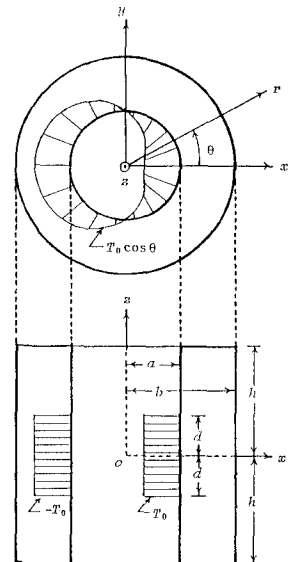


Fig.1 Coordinate system.

Axially Asymmetric, Stationary Thermal Stresses in a Long Hollow Cylinder

By Isamu A. OKUMURA

式(4)の様に与えられた時には、式(1)の変形 Bessel 関数の次数 m 及び r のべき指数 m は、1と固定できる。式(4)を Fourier 級数に展開すると、次式となる。

$$g(\theta, z) = f_0^* \cos \theta + \cos \theta \sum_{n=1}^{\infty} f_n^* \cos \beta_n z \quad (5)$$

ここで、

$$f_0^* = T_0 \left(\frac{d}{h} \right), \quad f_n^* = \frac{2T_0}{n\pi} \sin \beta_n d \quad (6 \cdot a, b)$$

式(3・a)の境界条件は、自明に満足されるので、式(5)を用いて、式(3・b)及び式(3・c)の境界条件を式(1)に課すると、温度変化 T は、次式の様に定められる。

$$T = \cos \theta \sum_{n=1}^{\infty} f_n \cos \beta_n z [K_1(\beta_n b) I_1(\beta_n r) - I_1(\beta_n b) K_1(\beta_n r)] + f_0 \cos \theta \left(\frac{r}{a} - \frac{b^2}{ar} \right) \quad (7)$$

ここで、

$$f_n = \frac{f_n^*}{I_1(\beta_n a) K_1(\beta_n b) - I_1(\beta_n b) K_1(\beta_n a)}, \quad f_0 = \frac{f_0^* a^2}{a^2 - b^2} \quad (8 \cdot a, b)$$

3. 変位場及び応力場

変位成分を u_r , u_θ 及び u_z で表し、Goodier の熱弾性変位ポテンシャルを付加すると、著者の提案による3次元弾性問題の解⁷⁾は、次式となる。

$$2Gu_r = \frac{\partial}{\partial r} \left[\phi_0 + r \frac{\partial \phi_1}{\partial r} + z \frac{\partial \phi_3}{\partial z} - 4(1-\nu) \phi_1 \right] + \frac{2}{r} \frac{\partial \psi_3}{\partial \theta} + \frac{\partial \chi}{\partial r} \quad (9 \cdot a)$$

$$2Gu_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\phi_0 + r \frac{\partial \phi_1}{\partial r} + z \frac{\partial \phi_3}{\partial z} - 4(1-\nu) \phi_1 \right] - 2 \frac{\partial \psi_3}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} \quad (9 \cdot b)$$

$$2Gu_z = \frac{\partial}{\partial z} \left[\phi_0 + r \frac{\partial \phi_1}{\partial r} + z \frac{\partial \phi_3}{\partial z} - 4(1-\nu) \phi_3 \right] + \frac{\partial \chi}{\partial z} \quad (9 \cdot c)$$

ここで、

$$\nabla^2 \phi_0 = 0, \quad \nabla^2 \phi_1 = 0, \quad \nabla^2 \phi_3 = 0, \quad \nabla^2 \psi_3 = 0, \quad \nabla^2 \chi = \alpha ET / (1-\nu) \quad (10 \cdot a \sim e)$$

また、 G 及び ν は、それぞれ、せん断弾性係数及びポアソン比を表す。式(10・e)の χ が、Goodier の熱弾性変位ポテンシャルと呼ばれるものであり、 α 及び E は、それぞれ、線膨張係数及び弾性係数である。式(10・e)の右辺に式(7)を代入して、 χ を求めると、次式となる。

$$\chi = \frac{\alpha E}{4(1-\nu)} \cos \theta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{\beta_n} \cos \beta_n z \{ K_1(\beta_n b) r [I_0(\beta_n r) + I_2(\beta_n r)] + I_1(\beta_n b) r [K_0(\beta_n r) + K_2(\beta_n r)] \} + \frac{\alpha E f_0}{8\alpha(1-\nu)} \cos \theta r \left(r^2 - 4b^2 \ln \frac{r}{a} \right) \quad (11)$$

また、他の変位ポテンシャルは、すべて、調和関数であり、次式となる。

$$\phi_0 = \cos \theta \sum_{n=1}^{\infty} \cos \beta_n z [D_n^{(1)} I_1(\beta_n r) + D_n^{(2)} K_1(\beta_n r)],$$

$$\phi_1 = \cos \theta \sum_{n=1}^{\infty} \cos \beta_n z [F_n^{(1)} I_1(\beta_n r) + F_n^{(2)} K_1(\beta_n r)],$$

$$\psi_3 = \sin \theta \sum_{n=1}^{\infty} \cos \beta_n z [E_n^{(1)} I_1(\beta_n r) + E_n^{(2)} K_1(\beta_n r)], \quad \phi_3 = 0 \quad (12 \cdot a \sim d)$$

$$\phi_{0,0} = \frac{D_0}{r} \cos \theta - F_0 \cos \theta \left(\frac{r^3}{2} - 2rz^2 \right), \quad \phi_{1,0} = F_0 \cos \theta \left(\frac{r^3}{2} - 2rz^2 \right),$$

$$\psi_{3,0} = 2(1-\nu)F_0 \sin\theta \left(\frac{r^3}{2} - 2rz^2 \right) \quad (13 \cdot a \sim c)$$

ここで、 $D_n^{(1)}, \dots, F_0$ は、応力場の境界条件より定められる未定定数である。円柱座標 (r, θ, z) におけるひずみ成分及び熱を考慮した Hooke の法則は、次式となる。

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right), \\ \varepsilon_{zr} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right), \quad \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) \quad (14 \cdot a \sim f) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= 2G \left(\varepsilon_{rr} + \frac{\nu}{1-2\nu} e \right) - \frac{\alpha ET}{1-2\nu}, \quad \sigma_{\theta\theta} = 2G \left(\varepsilon_{\theta\theta} + \frac{\nu}{1-2\nu} e \right) - \frac{\alpha ET}{1-2\nu}, \\ \sigma_{zz} &= 2G \left(\varepsilon_{zz} + \frac{\nu}{1-2\nu} e \right) - \frac{\alpha ET}{1-2\nu}, \quad \sigma_{rz} = 2G \varepsilon_{rz}, \quad \sigma_{zr} = 2G \varepsilon_{zr}, \quad \sigma_{r\theta} = 2G \varepsilon_{r\theta} \quad (15 \cdot a \sim f) \end{aligned}$$

式(9・a～c)に式(11)から式(13・a～c)の変位ポテンシャルを代入して変位成分を求め、式(14・a～f)からひずみ成分を求めて式(15・a～f)を用いると、応力成分の表現が得られる。例えば、せん断応力 σ_{zr} は、次の様に表される。

$$\begin{aligned} \sigma_{zr} &= -\cos\theta \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^2 \sin\beta_n z \left\{ D_n^{(1)} \left[\frac{I_1(\beta_n r)}{\beta_n r} + I_2(\beta_n r) \right] + F_n^{(1)} \left[I_1(\beta_n r) \left(\beta_n r - \frac{1-2\nu}{\beta_n r} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2(1-\nu) I_2(\beta_n r) \right] + E_n^{(1)} \frac{I_1(\beta_n r)}{\beta_n r} + D_n^{(2)} \left[\frac{K_1(\beta_n r)}{\beta_n r} - K_2(\beta_n r) \right] \right. \\ &\quad \left. + F_n^{(2)} \left[K_1(\beta_n r) \left(\beta_n r - \frac{1-2\nu}{\beta_n r} \right) + 2(1-\nu) K_2(\beta_n r) \right] + E_n^{(2)} \frac{K_1(\beta_n r)}{\beta_n r} \right\} \\ &\quad - \frac{\alpha E}{2(1-\nu)} \cos\theta \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin\beta_n z \left[K_1(\beta_n b) I_1(\beta_n r) \left(\beta_n r + \frac{1}{\beta_n r} \right) - I_1(\beta_n b) K_1(\beta_n r) \right. \\ &\quad \left. \cdot \left(\beta_n r + \frac{1}{\beta_n r} \right) \right] \quad (16) \end{aligned}$$

応力場の境界条件は、長円筒の内、外側面及び両端面を自由とし、次式を考える。

$$z = \pm h \text{において、} \sigma_{zr} = 0, \quad \sigma_{z\theta} = 0, \quad T_{zz} = 0 \quad (17 \cdot a \sim c)$$

$$r = a \text{において、} \sigma_{rr} = 0, \quad \sigma_{r\theta} = 0, \quad \sigma_{rz} = 0 \quad (18 \cdot a \sim c)$$

$$r = b \text{において、} \sigma_{rr} = 0, \quad \sigma_{r\theta} = 0, \quad \sigma_{rz} = 0 \quad (19 \cdot a \sim c)$$

ここで、

$$T_{zz} = \int_0^{2\pi} \int_a^b \sigma_{zz} r dr d\theta \quad (20)$$

式(17・a～c)の境界条件は、自明に満足されるので、式(18・c)及び式(19・c)の境界条件を式(16)に課すると、未定定数の間に次の関係を得る。

$$\begin{aligned} E_n^{(1)} &= D_n^{(1)} e_n^{(2)} + D_n^{(2)} \frac{K_1(\beta_n a)}{I_1(\beta_n b)} e_n^{(2)} + F_n^{(1)} e_n^{(3)} + F_n^{(2)} \frac{K_1(\beta_n a)}{I_1(\beta_n b)} e_n^{(4)} - \frac{\alpha E}{2(1-\nu)} \\ &\quad \cdot \frac{f_n}{\beta_n^2} K_1(\beta_n b) [(\beta_n a)^2 + 1] \quad (21 \cdot a) \end{aligned}$$

$$E_n^{(2)} = D_n^{(1)} \frac{I_1(\beta_n b)}{K_1(\beta_n a)} h_n^{(1)} + D_n^{(2)} h_n^{(2)} + F_n^{(1)} \frac{I_1(\beta_n b)}{K_1(\beta_n a)} h_n^{(3)} + F_n^{(2)} h_n^{(4)} + \frac{\alpha E}{2(1-\nu)}$$

$$\cdot \frac{f_n}{\beta_n^2} I_1(\beta_n b) [(\beta_n a)^2 + 1] \dots\dots\dots (21 \cdot b)$$

ここで、例えば、

$$e_n^{(1)} = \frac{1}{\Delta_n} \left\{ \frac{K_1(\beta_n b)}{K_1(\beta_n a)} \left[\frac{I_1(\beta_n a)}{I_1(\beta_n b)} + \beta_n a \frac{I_2(\beta_n a)}{I_1(\beta_n b)} \right] - 1 - \beta_n b \frac{I_2(\beta_n b)}{I_1(\beta_n b)} \right\} \dots\dots\dots (22 \cdot a)$$

$$h_n^{(1)} = -\frac{1}{\Delta_n} \left\{ \frac{I_1(\beta_n a)}{I_1(\beta_n b)} + \beta_n a \frac{I_2(\beta_n a)}{I_1(\beta_n b)} - \frac{I_1(\beta_n a)}{I_1(\beta_n b)} \left[1 + \beta_n b \frac{I_2(\beta_n b)}{I_1(\beta_n b)} \right] \right\} \dots\dots\dots (22 \cdot b)$$

$$\Delta_n = 1 - \frac{I_1(\beta_n a) K_1(\beta_n b)}{I_1(\beta_n b) K_1(\beta_n a)} \dots\dots\dots (22 \cdot c)$$

式(21・a, b) の関係を用いると、最初に得られた変位及び応力成分の式から未定定数 $E_n^{(1)}$ 及び $E_n^{(2)}$ を消去した式を作ることができる。一例として、境界条件に直接関係した σ_{rr} 及び $\sigma_{r\theta}$ についてそれを示せば次のとおりである。

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} = & \cos \theta \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^2 \cos \beta_n z \left\{ D_n^{(1)} \left[I_1(\beta_n r) - \frac{I_2(\beta_n r)}{\beta_n r} (1 - 2e_n^{(1)}) - I_1(\beta_n b) \frac{2h_n^{(1)}}{\beta_n r} \right. \right. \\ & \cdot \left. \frac{K_2(\beta_n r)}{K_1(\beta_n a)} \right] + F_n^{(1)} \left[I_2(\beta_n r) \left(\beta_n r + \frac{5 - 4\nu + 2e_n^{(3)}}{\beta_n r} \right) - 2(1 - \nu) I_1(\beta_n r) - I_1(\beta_n b) \right. \\ & \cdot \left. \frac{2h_n^{(3)}}{\beta_n r} \frac{K_2(\beta_n r)}{K_1(\beta_n a)} \right] + D_n^{(2)} \left[K_1(\beta_n r) + \frac{K_2(\beta_n r)}{\beta_n r} (1 - 2h_n^{(2)}) + K_1(\beta_n a) \frac{2e_n^{(2)}}{\beta_n r} \right. \\ & \cdot \left. \frac{I_2(\beta_n r)}{I_1(\beta_n b)} \right] - F_n^{(2)} \left[K_2(\beta_n r) \left(\beta_n r + \frac{5 - 4\nu + 2h_n^{(4)}}{\beta_n r} \right) + 2(1 - \nu) K_1(\beta_n r) - K_1(\beta_n a) \right. \\ & \cdot \left. \frac{2e_n^{(4)}}{\beta_n r} \frac{I_2(\beta_n r)}{I_1(\beta_n b)} \right] \left. \right\} + \frac{\alpha E}{2(1 - \nu)} \cos \theta \sum_{n=1}^{\infty} f_n \cos \beta_n z \left[\beta_n r - \frac{1 + 2(\beta_n a)^2}{\beta_n r} \right] [K_1(\beta_n b) \\ & \cdot I_2(\beta_n r) + I_1(\beta_n b) K_2(\beta_n r)] - \frac{\alpha E f_0}{4a(1 - \nu)} \cos \theta \left(r - \frac{2b^2}{r} \right) - 2 \cos \theta \left(F_0 r - \frac{D_0}{r^3} \right) \dots\dots\dots (23) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{r\theta} = & -\sin \theta \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^2 \cos \beta_n z \left\{ D_n^{(1)} \left[\frac{I_2(\beta_n r)}{\beta_n r} (1 - 2e_n^{(1)}) + e_n^{(1)} I_1(\beta_n r) + I_1(\beta_n b) h_n^{(1)} \right. \right. \\ & \cdot \left. \left\{ \frac{2}{\beta_n r} \frac{K_2(\beta_n r)}{K_1(\beta_n a)} + \frac{K_1(\beta_n r)}{K_1(\beta_n a)} \right\} \right] - F_n^{(1)} \left[\frac{I_2(\beta_n r)}{\beta_n r} (5 - 4\nu + 2e_n^{(3)}) - I_1(\beta_n r) \right. \\ & \cdot (1 + e_n^{(3)}) - I_1(\beta_n b) h_n^{(3)} \left\{ \frac{2}{\beta_n r} \frac{K_2(\beta_n r)}{K_1(\beta_n a)} + \frac{K_1(\beta_n r)}{K_1(\beta_n a)} \right\} \left. \right] - D_n^{(2)} \left[\frac{K_2(\beta_n r)}{\beta_n r} (1 - 2h_n^{(2)}) \right. \\ & - h_n^{(2)} K_1(\beta_n r) + K_1(\beta_n a) e_n^{(2)} \left\{ \frac{2}{\beta_n r} \frac{I_2(\beta_n r)}{I_1(\beta_n b)} - \frac{I_1(\beta_n r)}{I_1(\beta_n b)} \right\} \left. \right] + F_n^{(2)} \left[\frac{K_2(\beta_n r)}{\beta_n r} \right. \\ & \cdot (5 - 4\nu + 2h_n^{(4)}) + K_1(\beta_n r) (1 + h_n^{(4)}) - K_1(\beta_n a) e_n^{(4)} \left\{ \frac{2}{\beta_n r} \frac{I_2(\beta_n r)}{I_1(\beta_n b)} - \frac{I_1(\beta_n r)}{I_1(\beta_n b)} \right\} \left. \right] \left. \right\} \\ & + \frac{\alpha E}{2(1 - \nu)} \sin \theta \sum_{n=1}^{\infty} f_n \cos \beta_n z \left\{ K_1(\beta_n b) \left[(\beta_n a)^2 I_1(\beta_n r) - \frac{I_2(\beta_n r)}{\beta_n r} \right. \right. \\ & \cdot \left. \left. \{ 1 + 2(\beta_n a)^2 \} \right] - I_1(\beta_n b) \left[(\beta_n a)^2 K_1(\beta_n r) + \frac{K_2(\beta_n r)}{\beta_n r} \{ 1 + 2(\beta_n a)^2 \} \right] \right\} \\ & - \frac{\alpha E f_0}{4a(1 - \nu)} \sin \theta \left(r - \frac{2b^2}{r} \right) - 2 \sin \theta \left(F_0 r - \frac{D_0}{r^3} \right) \dots\dots\dots (24) \end{aligned}$$

境界条件(18・c) 及び(19・c) は、式(21・a) 及び式(21・b) によりすでに満足されているので
 残りの境界条件、即ち、式(18・a, b) 及び式(19・a, b) を式(23) 及び式(24) に課すると、
 未定数 $\overline{D}_n^{(1)}$, $\overline{F}_n^{(1)}$, $\overline{D}_n^{(2)}$ 及び $\overline{F}_n^{(2)}$ に関する4元連立1次方程式が次の様に得られる。

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \overline{D}_n^{(1)} \\ \overline{D}_n^{(2)} \\ \overline{F}_n^{(1)} \\ \overline{F}_n^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \end{Bmatrix} \quad \text{----- (25)}$$

ここで、 $\overline{D}_n^{(1)}$, ..., $\overline{F}_n^{(2)}$ は、新しい未定数である。

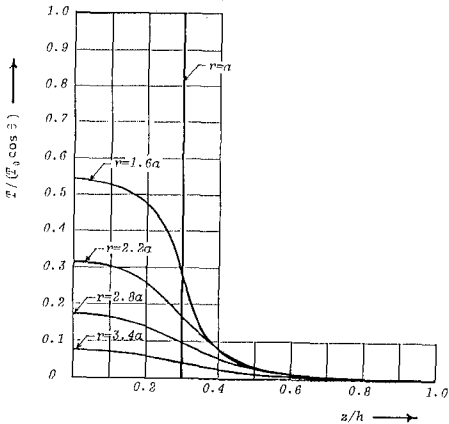


Fig.2 Distribution of T .

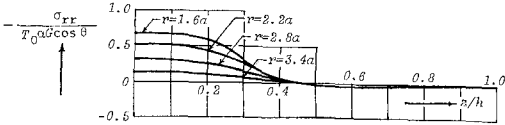


Fig.3 Distribution of σ_{rr} .

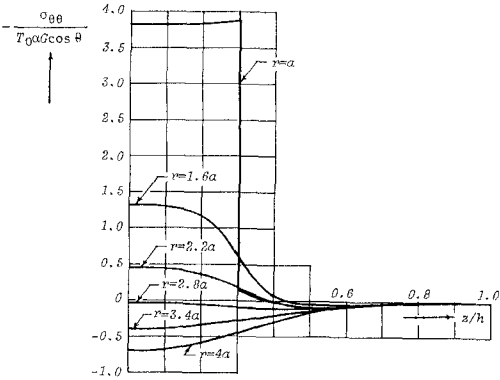


Fig.4 Distribution of $\sigma_{\theta\theta}$.

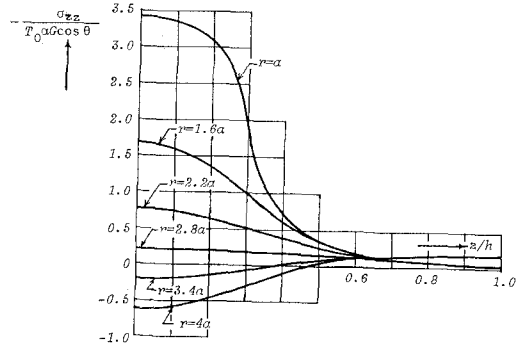


Fig.5 Distribution of σ_{zz} .

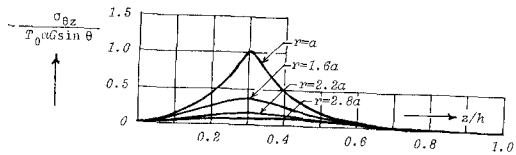


Fig.6 Distribution of $\sigma_{\theta z}$.

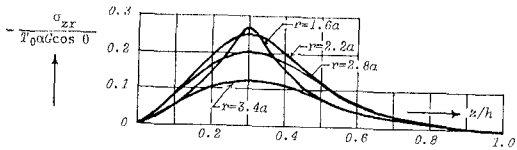


Fig.7 Distribution of σ_{zr} .

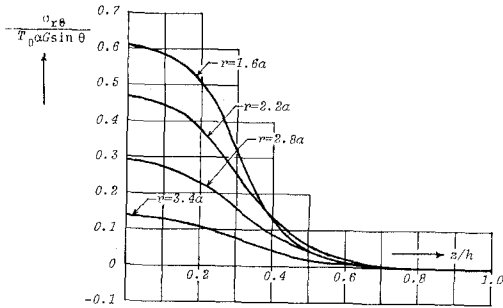


Fig.8 Distribution of $\sigma_{r\theta}$.

4. 計算結果

数値計算は、 $b/a=4.0$ 及び $b/h=0.5$ の長円筒が、ポアソン比 $\nu=0.33$ 及び温度分布幅 $d/h=0.3$ を持つ場合について行った。級数 n の項数は、最初の36項を用いた。図-2に温度 T の分布を示した。 z/h が大きくなるにつれ、すみやかに減衰している。 $z/h=1.0$ では、温度勾配が0と規定されているが、 T も極めて小さな値を示している。図-3に垂直応力 σ_{rr} の分布を示した。図-4及び図-5に示す $\sigma_{\theta\theta}$ 及び σ_{zz} に較べると、値が相当に小さくなっている。図-4に垂直応力 $\sigma_{\theta\theta}$ の分布を示した。表面温度の分布境界、即ち、 $z/h=0.3$ では、値が不連続になっている。6つの応力成分中、値の最も大きな応力成分である。図-5に垂直応力 σ_{zz} の分布を示した。表面温度の分布境界で不連続にはならず、値が急激に変化しているだけである。 $z/h=1.0$ では、境界条件を合応力で規定しているため、小さな値が残っている。図-6にせん断応力 σ_{rz} の分布を示した。円筒内面における値は、表面温度の分布境界で最大値を示している。3つのせん断応力中、値の最も大きな応力成分であり、図-3の σ_{rr} と同程度の大きさを示している。図-7にせん断応力 $\sigma_{\theta z}$ の分布を示した。円筒内面近くでは、表面温度の分布境界で最大値を示し、円筒外面に近づくにつれ、 z/h が大きき方向に最大値を示す位置が移っている。6つの応力成分中、値の最も小さな応力成分である。図-8にせん断応力 $\sigma_{r\theta}$ の分布を示した。図-6の σ_{zz} に較べると、半分程に小さな値となっている。

5. 結 語

内面に非軸対称温度が課せられた等方性長円筒の定常熱応力を解析した。温度場の境界条件が同じであっても、短円筒の場合には、応力場に関する境界条件の一つが異なり、極めて複雑になるが、本研究で取扱った長円筒の場合には、両端面における境界条件の一つを合応力で規定したため、比較的容易にしかも厳密に解析できた。長円筒の高さ方向に部分的な温度が課せられた場合でも、 $\sigma_{\theta\theta}$ だけがその分布境界で不連続になり、 σ_{zz} は急激な変化を示すだけであるという解析結果は、興味あることと思われる。本論文では、等方性長円筒の簡単な熱応力問題を取扱ったが、異方性体（例えば、横等方性体）の熱弾性変位ポテンシャルが見出されれば、異方性長円筒或は短円筒の同種の問題が解析できるとと思われる。表面温度が課せられた場合のみならず、円筒の側面で熱放散がある場合の熱応力問題は、興味あるテーマと思われる。

参考文献

- 1) 野田直剛・竹内洋一郎：非軸対称加熱を受ける有限円柱の非定常熱応力，日本機械学会論文集（A編），第46巻403号，pp. 319~328，1980。
- 2) 菅野良弘・木元順一：変厚中空円板の非軸対称非定常熱応力の解析解，日本機械学会論文集（A編），第53巻494号，pp. 1927~1932，1987。
- 3) 松永泰弘・入交 裕・野田直剛：円環状き裂を有する無限体の非定常熱応力，日本機械学会論文集（A編），第53巻496号，pp. 2307~2312，1987。
- 4) 菅野良弘・中西隆則：任意の表面熱発生を有する異方性有限円筒の非定常熱応力，日本機械学会論文集（A編）第46巻410号，pp. 1110~1120，1980。
- 5) Noda, N.: Transient thermal stress problem in a transversely isotropic finite circular cylinder under three-dimensional temperature field, J. Therm. Stresses, Vol. 6, No. 1, pp. 57-71, 1983.
- 6) Misra, J. C. and Achari, R. M.: On axisymmetric thermal stresses in an anisotropic hollow cylinder, J. Therm. Stresses, Vol. 3, No. 4, pp. 509-520, 1980.
- 7) Okumura, I. A. and Onaka, T.: An expression for solutions to three-dimensional elasticity problems in cylindrical and spherical coordinates, Structural Eng. /Earthquake Eng., Vol. 3, No. 2, pp. 353S~362S, 1986.