

I - 39

厚板理論による長方形厚板の解析と薄板理論の適用性

北見工業大学大学院 学生員 渡辺 午一

北見工業大学 正 員 奥村 勇

1. 緒言

板厚が比較的大きい厚板に関する研究は、Love¹⁾、Reissner²⁾及びMindlin³⁾に見られる様に、薄板の曲げ理論を補正することから始まり、現在では、Lo⁴⁾に見られる高次理論と呼ばれる解法にまで発展している。その後、多くの研究者によって、これらの解法の改良が試みられ、奥村⁵⁾、奥村・本多及び芳村⁶⁾がLove理論の一改良理論を提案し、扇形厚板を解析している。Loveの解法は、平面応力解と一般化平面応力解及び特殊解の3つの解より構成されており、いずれの解もつり合い方程式及び適合条件を厳密に満足している。しかしながら、Love理論には、特殊解が与えられた荷重条件を満足するようにつり合い方程式及び適合条件より直接導出する事が難しく、また、曲げに関する境界条件が2つしか規定できないという短所がある。

本研究では、荷重条件を満たす特殊解に3次元弾性解の一部を用い、曲げに関する境界条件も通常の厚板理論に見られるように3つ規定できるようにLove理論を改良している。この改良されたLoveの理論により、板の上面中央に部分分布荷重を受ける長方形厚板の曲げを解析し、その結果と薄板理論による結果とを比較して、長方形厚板の応力特性並びに薄板理論の適用性を吟味する。長方形厚板の境界条件は、相対する2辺が単純支持、他の2辺が固定、単純支持或いは自由の場合が考えられている。

2. 特殊解

Loveの理論によれば、板の上・下面における荷重条件を満たすために、特殊解が必要になる。この特殊解として、一般化されたBoussinesqの解を用いる。長方形厚板の座標系を図-1に示したように取り、変位成分を u 、 v 、 w 及び応力成分を σ_{xx} 、 $\dots$ 、 σ_{zx} と表すと、その解は、次の様に表される。

$$2Gu = \text{grad}(\phi_0 + r \cdot \lambda) - 4(1-\nu)\lambda + 2\text{rot} \mathfrak{Q} \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 $u=(u,v,w)$ 、 $r=(x,y,z)$ 、 $\lambda=(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$;

$$\mathfrak{Q}=(\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \mathfrak{Q}_3) \quad \dots\dots\dots (2 \cdot a \sim d)$$

$$\nabla^2 \phi_0 = 0, \quad \nabla^2 \lambda = 0, \quad \nabla^2 \mathfrak{Q} = 0;$$

$$\nabla^2 \equiv \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2 + \partial^2 / \partial z^2 \quad \dots\dots\dots (3 \cdot a \sim d)$$

また、 G 及び ν は、それぞれ、せん断弾性係数及びポアソン比を表す。式(3・a～d)より変位ポテンシャルを求めれば次式を得る。

$$\phi_0 = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \cos \alpha_r x \cos \beta_s y (C_{rs}^{(1)} \cosh n_{rs} z + \overline{C_{rs}^{(1)}} \sinh n_{rs} z) \quad (4 \cdot a)$$

$$\lambda_3 = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \cos \alpha_r x \cos \beta_s y (C_{rs}^{(2)} \sinh n_{rs} z + \overline{C_{rs}^{(2)}} \cosh n_{rs} z) \quad (4 \cdot b)$$

$$\mathfrak{Q}_3 = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \sin \alpha_r x \sin \beta_s y (C_{rs}^{(3)} \cosh n_{rs} z + \overline{C_{rs}^{(3)}} \sinh n_{rs} z) + \sin \lambda_k z \sum_{k=1}^{\infty} E_k^{(1)} \sin \alpha_r x \sinh m_{kr} y \quad \dots\dots\dots (4 \cdot c)$$

ここで、 $\alpha_r = r\pi/a$ ($r=1, 3, \dots$)、 $\beta_s = s\pi/b$ ($s=1, 3, \dots$)、 $\lambda_k = k\pi/h$ ($k=1$);

$$n_{rs} = \sqrt{\alpha_r^2 + \beta_s^2}, \quad m_{kr} = \sqrt{\alpha_r^2 + \lambda_k^2} \quad \dots\dots\dots (5 \cdot a \sim e)$$

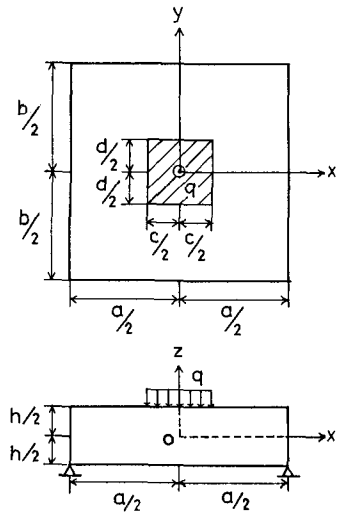


図-1 長方形厚板の座標系

また、 $C_{rs}^{(1)} \sim C_{rs}^{(3)}$ は、荷重条件によって、 $E_r^{(1)}$ は、境界条件によって定められる未定定数である。
式(1)に含まれる他の変位ポテンシャルは、ここでは不要である。式(4・a～c)を式(1)に代入すると、変位成分の表現が得られる。その変位成分からひずみ成分を求め、Hookeの法則を用いると、応力成分の表現がそれぞれ得られる。一例として、垂直応力 σ_{zz} 及びせん断応力 σ_{zx} , σ_{yz} について示せば、次の通りである。

$$\sigma_{zz} = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} n_{rs} \cos \alpha_r X \cos \beta_s Y \left\{ \left[n_{rs} C_{rs}^{(1)} - 2(1-\nu) C_{rs}^{(2)} \right] \cosh n_{rs} Z + \left[n_{rs} \overline{C_{rs}^{(1)}} - 2(1-\nu) \overline{C_{rs}^{(2)}} \right] \cdot \sinh n_{rs} Z + C_{rs}^{(2)} n_{rs} Z \sinh n_{rs} Z + \overline{C_{rs}^{(2)}} n_{rs} Z \cosh n_{rs} Z \right\} \quad \cdots \cdots (6)$$

$$\sigma_{zx} = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \sin \alpha_r X \cos \beta_s Y \left\{ \left[\beta_s n_{rs} C_{rs}^{(3)} - \alpha_r n_{rs} C_{rs}^{(1)} + (1-2\nu) \alpha_r C_{rs}^{(2)} \right] \sinh n_{rs} Z + \left[\beta_s n_{rs} \overline{C_{rs}^{(3)}} - \alpha_r n_{rs} \overline{C_{rs}^{(1)}} + (1-2\nu) \alpha_r \overline{C_{rs}^{(2)}} \right] \cosh n_{rs} Z - C_{rs}^{(2)} \alpha_r n_{rs} Z \cosh n_{rs} Z - \overline{C_{rs}^{(2)}} \alpha_r \cdot n_{rs} Z \sinh n_{rs} Z \right\} + \lambda_k \cos \lambda_k Z \sum_{r=1}^{\infty} E_r^{(1)} m_{kr} \sin \alpha_r X \cosh m_{kr} Y \quad \cdots \cdots (7)$$

$$\sigma_{yz} = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \cos \alpha_r X \sin \beta_s Y \left\{ \left[-\alpha_r n_{rs} C_{rs}^{(3)} - \beta_s n_{rs} C_{rs}^{(1)} + (1-2\nu) \beta_s C_{rs}^{(2)} \right] \sinh n_{rs} Z + \left[-\alpha_r n_{rs} \overline{C_{rs}^{(3)}} - \beta_s n_{rs} \overline{C_{rs}^{(1)}} + (1-2\nu) \beta_s \overline{C_{rs}^{(2)}} \right] \cosh n_{rs} Z - C_{rs}^{(2)} \beta_s n_{rs} Z \cosh n_{rs} Z - \overline{C_{rs}^{(2)}} \beta_s \cdot n_{rs} Z \sinh n_{rs} Z \right\} - \lambda_k \cos \lambda_k Z \sum_{r=1}^{\infty} E_r^{(1)} \alpha_r \cos \alpha_r X \sinh m_{kr} Y \quad \cdots \cdots (8)$$

3. 同次解

特殊解のみでは、板の周辺の境界条件を満足できないので、同次解が必要になる。その同次解として、平面応力解・一般化平面応力解を用いる。解の形式は、文献(1)に詳述されているので、ここでは、具体的な表現について述べる。

(1)平面応力解 図-1に示した長方形厚板が $x=0, y=0$ に関して対称な荷重を受けているとすると、変位成分は、次の様になる。

$$u = \frac{1}{E} \sum_{r=1}^{\infty} \alpha_r \sin \alpha_r X \left[(1+\nu) P_r^{(1)} \cosh \alpha_r Y + P_r^{(3)} \left\{ [2-\nu(\alpha_r Z)^2] \cosh \alpha_r Y + (1+\nu) \alpha_r Y \sinh \alpha_r Y \right\} \right] \quad \cdots \cdots (9\cdot a)$$

$$v = - \frac{1}{E} \sum_{r=1}^{\infty} \alpha_r \cos \alpha_r X \left[(1+\nu) P_r^{(1)} \sinh \alpha_r Y - P_r^{(3)} \left\{ [1-\nu+\nu(\alpha_r Z)^2] \sinh \alpha_r Y - (1+\nu) \alpha_r Y \cosh \alpha_r Y \right\} \right] \quad \cdots \cdots (9\cdot b)$$

$$w = - \frac{2\nu}{E} Z \sum_{r=1}^{\infty} \alpha_r^2 \cos \alpha_r X \cosh \alpha_r Y P_r^{(3)} \quad \cdots \cdots (9\cdot c)$$

(2)一般化平面応力解 一般化平面応力解の変位成分は、次の様になる。

$$u = \frac{1+\nu}{E} Z \sum_{r=1}^{\infty} \alpha_r \sin \alpha_r X \left\{ Q_r^{(1)} \cosh \alpha_r Y + Q_r^{(3)} \left\{ \alpha_r Y \sinh \alpha_r Y - \frac{2-\nu}{3(1-\nu)} (\alpha_r Z)^2 \cosh \alpha_r Y \right\} \right\} \quad \cdots \cdots (10\cdot a)$$

$$v = - \frac{1+\nu}{E} Z \sum_{r=1}^{\infty} \alpha_r \cos \alpha_r X \left\{ Q_r^{(1)} \sinh \alpha_r Y + Q_r^{(3)} \left\{ \alpha_r Y \cosh \alpha_r Y + \left[1 - \frac{2-\nu}{3(1-\nu)} (\alpha_r Z)^2 \right] \sinh \alpha_r Y \right\} \right\} \quad \cdots \cdots (10\cdot b)$$

$$w = \frac{1+\nu}{E} \sum_{r=1}^{\infty} \cos \alpha_r X \left\{ Q_r^{(1)} \cosh \alpha_r Y + Q_r^{(3)} \left\{ \alpha_r Y \sinh \alpha_r Y - \frac{(\alpha_r h)^2}{2(1-\nu)} \left(1 - 2\nu \left(\frac{Z}{h} \right)^2 \right) \cosh \alpha_r Y \right\} \right\} \quad \cdots \cdots (10\cdot c)$$

ここで、 $P_r^{(1)}$, $P_r^{(3)}$, $Q_r^{(1)}$, $Q_r^{(3)}$ は、境界条件によって定められる未定定数である。

4. 荷重条件

図-1に示した場合の荷重条件は、次の通りである。

$$\left. \begin{aligned} z = h/2 \text{ において } \sigma_{zx} = 0, \sigma_{zy} = 0, \sigma_{zz} = -p(x, y) \\ z = -h/2 \text{ において } \sigma_{zx} = 0, \sigma_{zy} = 0, \sigma_{zz} = 0 \end{aligned} \right\} \quad \cdots \cdots (11\cdot a \sim f)$$

$$\text{ここで、} p(x, y) = \begin{cases} q & [|x| < c/2 \text{ かつ } |y| < d/2] \\ 0 & [\text{上記以外の領域}] \end{cases} \quad \cdots \cdots (12)$$

式(11・a～f)の荷重条件より、特殊解に含まれる未定定数は、次の様に定められる。

$$\left. \begin{aligned} C_{rs}^{(1)} &= -(g_{rs}/n_{rs}^2)\Omega_{rs}(\xi_{rs}\coth\xi_{rs}-1+2\nu), \quad C_{rs}^{(2)} = (g_{rs}/n_{rs})\Omega_{rs}, \quad C_{rs}^{(3)} = 0 \\ \overline{C}_{rs}^{(1)} &= -(g_{rs}/n_{rs}^2)\Gamma_{rs}(\xi_{rs}\tanh\xi_{rs}-1+2\nu), \quad \overline{C}_{rs}^{(2)} = (g_{rs}/n_{rs})\Gamma_{rs}, \quad \overline{C}_{rs}^{(3)} = 0 \end{aligned} \right\} \cdots (13\cdot a \sim f)$$

ここで、 $\Omega_{rs} = \sinh\xi_{rs} / [2(\sinh\xi_{rs}\cosh\xi_{rs} + \xi_{rs})]$
 $\Gamma_{rs} = \cosh\xi_{rs} / [2(\sinh\xi_{rs}\cosh\xi_{rs} - \xi_{rs})]$, $\xi_{rs} = n_{rs}h/2$
 $g_{rs} = (16q/\pi^2)\sin[r\pi c/(2a)] \sin[s\pi d/(2b)] / (rs)$ $\left. \vphantom{\begin{aligned} C_{rs}^{(1)} \\ \overline{C}_{rs}^{(1)} \end{aligned}} \right\} \cdots \cdots \cdots (14\cdot a \sim d)$

5. 境界条件

境界条件として、 $x=\pm a/2$ の2辺が単純支持、 $y=\pm b/2$ の2辺が①単純支持、②固定及び③自由の場合を考えると次の通りである。

$$x=\pm a/2 \text{において } v=0, T_{xx}=0, w=0, M_x=0, \partial v/\partial z=0 \cdots \cdots (15\cdot a \sim e)$$

$$y=\pm b/2 \text{において ①単純支持の場合: } u=0, T_{yy}=0, w=0, M_y=0, \partial u/\partial z=0 \cdots \cdots (16\cdot a \sim e)$$

$$\text{②固定の場合: } u_0=0, v_0=0, w_0=0, (\partial u/\partial z)_{z=0}=0, (\partial v/\partial z)_{z=0}=0 \cdots (17\cdot a \sim e)$$

$$\text{③自由の場合: } T_{yy}=0, S_{yx}=0, Q_y=0, M_y=0, M_{yx}=0 \cdots \cdots (18\cdot a \sim e)$$

式(15・a～e)の境界条件は、助変数 α_r を持った三角関数の性質により、自明に満足されている。

式(16・a～e)、式(17・a～e)及び式(18・a～e)の境界条件より、同次解と特殊解とを結合して、それぞれの未定定数 $P_r^{(1)}$ 、 $P_r^{(3)}$ 、 $Q_r^{(1)}$ 、 $Q_r^{(3)}$ 及び $E_r^{(1)}$ が求められる。一例をあげると、 $y=\pm b/2$ の2辺が固定の場合には、未定定数は、次の様に定められる。

$$\left. \begin{aligned} P_r^{(1)} &= \frac{1}{\Delta_1} \left(\frac{2}{1+\nu} + \xi_r \tanh\xi_r \right) \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{(s-1)/2} \beta_s \frac{g_{rs}}{n_{rs}^2} \Omega_{rs}(\xi_{rs}\coth\xi_{rs}-1+2\nu) \\ P_r^{(3)} &= -\frac{1}{\Delta_1} \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{(s-1)/2} \beta_s \frac{g_{rs}}{n_{rs}^2} \Omega_{rs}(\xi_{rs}\coth\xi_{rs}-1+2\nu) \end{aligned} \right\} \cdots \cdots (19\cdot a, b)$$

$$\left. \begin{aligned} Q_r^{(1)} &= -\frac{1}{\Delta_2} \left[\xi_r \tanh\xi_r - \frac{(\alpha_r h)^2}{2(1-\nu)} \right] \sum_{s=1}^{\infty} \Pi_{rs}, \quad Q_r^{(3)} = \frac{1}{\Delta_2} \sum_{s=1}^{\infty} \Pi_{rs} \\ E_r^{(1)} &= -\frac{\alpha_r (\alpha_r h)^2 \cosh\xi_r}{4(1-\nu) m_{kr} \lambda_k \cosh\eta_{kr} \Delta_2} \sum_{s=1}^{\infty} \Pi_{rs} \end{aligned} \right\} \cdots \cdots (20\cdot a \sim c)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} \xi_r &= \frac{\alpha_r b}{2}, \quad \eta_{kr} = \frac{m_{kr} b}{2}, \quad \Delta_1 = \alpha_r \left(\frac{3-\nu}{1+\nu} \sinh\xi_r - \frac{\xi_r}{\cosh\xi_r} \right) \\ \Delta_2 &= \alpha_r \left\{ \frac{(\alpha_r h)^2}{2(1-\nu)} \left[\sinh\xi_r - \frac{\alpha_r \tanh\eta_{kr} \cosh\xi_r}{m_{kr}} \right] + \frac{\xi_r}{\cosh\xi_r} + \sinh\xi_r \right\} \\ \Pi_{rs} &= (-1)^{(s-1)/2} \beta_s \frac{g_{rs}}{n_{rs}} \Gamma_{rs}(\xi_{rs}\tanh\xi_{rs}-2+2\nu) \end{aligned} \right\} \cdots \cdots (21\cdot a \sim e)$$

以上により、特殊解及び同次解に含まれていた未定定数がすべて決定され、長方形厚板の曲げが厳密な級数解により解析されたことになる。

6. 数値計算結果

(1) 2辺が固定の場合の計算結果 計算例として、 $b/a=1.0$, $c/a=d/b=0.3$, $\nu=0.3$ の長方形厚板が種々の板厚比 $e=h/a$ を持った場合について計算した。級数の項数は、 r, s 共に最初の54項を用いた。図-2から図-5は、 $y=\pm b/2$ の2辺が固定の場合の計算結果である。図-2には、 $e=1/4$, $x=0$ における y 方向の断面力の分布を

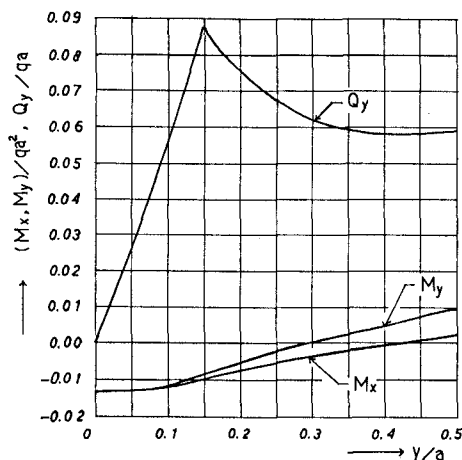


図-2 断面力の分布
($x=0, e=1/4$)

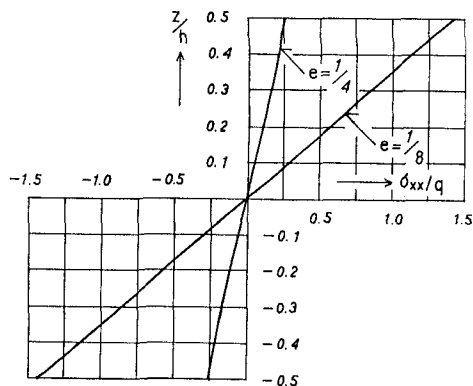


図-3 σ_{xx} の板厚方向における分布
($x=0, y=0.5b$)

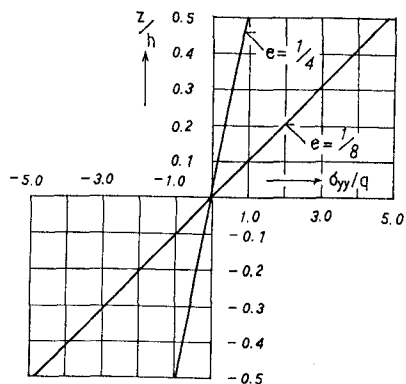


図-4 σ_{yy} の板厚方向における分布
($x=0, y=0.5b$)

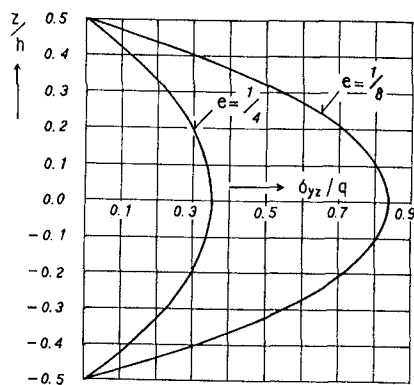


図-5 σ_{yz} の板厚方向における分布
($x=0, y=0.5b$)

示した。せん断力 Q_y は、 $y=0.15b$ の部分荷重の分布境界を境にして急激に変化し、曲げモーメントは、ゆるやかに変化する。図-3 及び図-4 には、 $x=0, y=0.5b$ における垂直応力 σ_{xx} 及び σ_{yy} の分布を示した。 $e=1/4$ の場合は、圧縮側でわずかに凸、引張り側でわずかに凹の曲線を示すがほぼ直線分布に近い。 $e=1/8$ の場合には、 $e=1/4$ よりさらに直線分布に近づいている。また、その値は、 σ_{xx} より σ_{yy} の方が大きい。図-5

には、 $x=0, y=0.5b$ におけるせん断応力 σ_{yz} の分布を示した。 $e=1/8$ の場合においては、板の中央面に対してほぼ対称な放物線分布となり、薄板理論の解析結果と同じ傾向を示している。

(2) 薄板理論との比較 長方形板について一般的に言われている薄板理論の適用性を吟味するために、板厚

表 1 w の比較 ($x=0, z=0$)

h/a	w/w _c					
	固定		単純支持		自由	
	y=0	y=0.3b	y=0	y=0.3b	y=0	y=0.3b
1/8	1.243	1.316	1.101	1.066	1.058	1.037
1/12	1.111	1.146	1.045	1.030	1.026	1.017
1/16	1.063	1.084	1.025	1.017	1.015	1.009
1/20	1.041	1.054	1.016	1.011	1.009	1.006

表 2 M_x の比較 ($x=0$)

h/a	M _x /M _{x,c}					
	固定		単純支持		自由	
	y=0	y=0.3b	y=0	y=0.3b	y=0	y=0.3b
1/8	1.072	1.335	1.015	0.991	1.009	0.995
1/12	1.034	1.165	1.007	0.996	1.004	0.998
1/16	1.019	1.098	1.004	0.998	1.002	0.999
1/20	1.013	1.064	1.002	0.999	1.001	0.999

比、境界条件及び着目点を変えた場合の厚板理論と薄板理論との両者による計算結果を表1から表9に示した。表1には、 $x=z=0$ での $y=0, 0.3b$ におけるたわみ w の比較を示した。この表から、たわみ w に及ぼす板厚比の効果は極めて大きく、 $e=1/12$ の $y=0$

における値は、固定の場合は11.1%、単純支持の場合は4.5%、自由の場合は2.6%の相違があり、固定の場合が強く影響を受けているのがわかる。表2には、 $x=0$ での $y=0, 0.3b$ における曲げモーメント M_x の比較を示した。単純支持及び自由の場合は、共によく一致しており、固定の場合にはあまり一致せず、固定辺に近づくに従い相違が大きくなり、 $e=1/12$ でも、 $y=0.3b$ の点では、16.5%の相違が見受けられる。表3には、 $x=0$ での $y=0, 0.3b, 0.5b$ における曲げモーメント M_y の比較を示した。 M_x と同様に、単純支持及び自由の場合には、共によく一致しており、固定の場合には、 $e=1/12$ でも $y=0.5b$ の点では-5.4%の相違があり、固定辺上では、あまり一致しない。表4には、 $y=0$ での $x=0.15a, 0.3a$ におけるせん断力 Q_x の比較を示した。固定の場合には、 $x=0.15a$ の荷重の分布境界において、 $e=1/12$ で相違が0.5%と極めて小さいが $x=0.3a$ では、1.7%と固定辺に近づくにつれ相違が大きくなる。単純支持及び自由の場合は、共によく一致している。表5には、 $x=0$ での $y=0.15b, 0.3b, 0.5b$ におけるせん断力 Q_y の比較を示した。 $e=1/12$ では、 $y=0.15b$ の荷重の分布境界において、固定の場合は-1.5%、単純支持の場合は-1.1%、自由の場合は-1.2%と比較的よく一致しているが、 $y=0.5b$ の固定辺上では、-9.5%の相違があり、あまり一致していない。表6には、 $x=0, z=-0.5h$ での $y=0, 0.3b$ における垂直応力 σ_{xx} の比較を示した。 $y=0$ では、 $e=1/12$ で固定の場合は3.8%、単純支持の場合には1.0%、自由の場合は0.6

%の相違があり、固定の場合の方が違いが大きくなっている。 $y=0.3b$ では、 $e=1/12$ で固定の場合が18.3%と大きいのに反して、単純支持の場合0.3%、自由の場合0.2%と極めて小さくなっている。表7には、 $x=0, z=-0.5h$ での $y=0, 0.3b, 0.5b$ における垂直応力 σ_{yy} の比較を示した。固定の場合には、 $y=0$ では比較的よく一致して

表3 M_y の比較 ($x=0$)

h/a	$M_y/M_{y,c}$					
	固定		単純支持		自由	
	y=0	y=0.5b	y=0	y=0.3b	y=0	y=0.3b
1/8	1.025	0.894	1.015	1.014	1.015	0.997
1/12	1.011	0.946	1.007	1.006	1.006	0.993
1/16	1.006	0.967	1.004	1.004	1.003	0.993
1/20	1.004	0.978	1.002	1.002	1.002	0.993

表4 Q_x の比較 ($y=0$)

h/a	$Q_x/Q_{x,c}$					
	固定		単純支持		自由	
	x=0.15a	x=0.3a	x=0.15a	x=0.3a	x=0.15a	x=0.3a
1/8	1.010	1.036	1.000	1.000	0.999	0.998
1/12	1.005	1.017	1.000	1.000	0.999	0.999
1/16	1.003	1.010	1.000	1.000	1.000	0.999
1/20	1.002	1.007	1.000	1.000	1.000	0.999

表5 Q_y の比較 ($x=0$)

h/a	$Q_y/Q_{y,c}$					
	固定		単純支持		自由	
	y=0.15b	y=0.5b	y=0.15b	y=0.5b	y=0.15b	y=0.3b
1/8	0.980	0.852	0.989	1.000	0.989	1.004
1/12	0.985	0.905	0.989	1.000	0.988	1.002
1/16	0.987	0.932	0.989	1.000	0.988	1.002
1/20	0.988	0.947	0.989	1.000	0.988	1.001

表6 σ_{xx} の比較 ($x=0, z=-0.5h$)

h/a	$\sigma_{xx}/\sigma_{xx,c}$					
	固定		単純支持		自由	
	y=0	y=0.3b	y=0	y=0.3b	y=0	y=0.3b
1/8	1.080	1.377	1.022	1.007	1.014	1.005
1/12	1.038	1.183	1.010	1.003	1.006	1.002
1/16	1.022	1.106	1.006	1.002	1.003	1.001
1/20	1.014	1.070	1.004	1.001	1.002	1.001

表7 σ_{yy} の比較 ($x=0, z=-0.5h$)

h/a	$\sigma_{yy}/\sigma_{yy,c}$					
	固定		単純支持		自由	
	y=0	y=0.5b	y=0	y=0.3b	y=0	y=0.3b
1/8	1.032	0.898	1.022	0.989	1.023	0.947
1/12	1.015	0.948	1.010	0.995	1.010	0.971
1/16	1.008	0.968	1.006	0.997	1.005	0.980
1/20	1.005	0.979	1.004	0.998	1.003	0.985

表8 σ_{zx} の比較 ($y=z=0$)

h/a	$\sigma_{zx}/\sigma_{zx,c}$					
	固定		単純支持		自由	
	x=0.15a	x=0.3a	x=0.15a	x=0.3a	x=0.15a	x=0.3a
1/8	0.920	1.036	0.918	1.000	0.924	0.998
1/12	0.949	1.017	0.950	1.000	0.955	0.999
1/16	0.964	1.010	0.965	1.000	0.967	0.999
1/20	0.975	1.007	0.975	1.000	0.976	0.999

表9 σ_{yz} の比較 ($x=z=0$)

h/a	$\sigma_{yz}/\sigma_{yz,c}$					
	固定		単純支持		自由	
	y=0.15b	y=0.5b	y=0.15b	y=0.5b	y=0.15b	y=0.3b
1/8	0.907	0.849	0.908	1.000	0.900	1.004
1/12	0.940	0.902	0.939	1.000	0.933	1.002
1/16	0.956	0.930	0.954	1.000	0.950	1.002
1/20	0.965	0.946	0.963	1.000	0.960	1.001

いるが、 $y=0.5b$ の固定辺上では、 $e=1/12$ で-5.2%、 $e=1/20$ でも-2.1%と相違が大きい。単純支持の場合は、よく一致しており、自由の場合には、 $y=0.3a$ の点で相違が大きく、 $e=1/12$ でも-2.9%の相違があり、周辺に近い方が相違が大きくなっている。表8には、 $y=z=0$ での $x=0.15a, 0.3a$ におけるせん断応力 σ_{xz} の比較を示した。荷重の分布境界の $x=0.15a$ の点では固定、単純支持及び自由の場合共に、相違が大きく、 $e=1/12$ では、それぞれ-5.1%、-5%及び-4.5%の相違がある。 $x=0.3a$ の点では、単純支持及び自由の場合は、極めてよく一致しているが、固定の場合は、やや相違が大きくなっている。表9には、 $x=z=0$ での $y=0.15b, 0.3b, 0.5b$ におけるせん断応力 σ_{yz} の比較を示した。 $e=1/12$ の荷重の分布境界の $y=0.15b$ では、固定の場合が-6.0%、単純支持の場合が-6.1%及び自由の場合が-6.7%の相違となり、 σ_{xz} と同様の傾向を示している。 $y=0.5b$ の点では、固定の場合が-9.8%と大きいのに反して、単純支持及び自由の場合の $y=0.3b$ においては、よく一致している。

7. 結論

改良されたLove理論により、相対する2辺が単純支持、他の2辺が単純支持、固定及び自由の場合の長方形厚板が、板の上面中央に部分分布荷重を受けた場合について解析した。その計算結果から、次の結論が導き出される。

- (1) 周辺単純支持及び2辺自由より2辺固定の場合が、薄板理論による結果と相違が大きく、着目点の違いによっても、相違の程度が変わる。
- (2) 周辺単純支持の場合は、 M_x, M_y, Q_x, Q_y は、 $e=1/8$ でも1.5%以下の違いでよく一致しているが、 $w, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}$ は、 $e=1/12$ 以上では、あまり一致しない。
- (3) 2辺自由の場合は、周辺単純支持と同様の傾向を示し、 $M_x, M_y, Q_x, Q_y, \sigma_{xz}$ は、 $e=1/8$ でも1.5%以下の違いでよく一致し、 $w, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}$ は、 $e=1/12$ 以上では、あまり一致しない。
- (4) 2辺固定の場合は、 Q_x は、 $e=1/8$ 以下でよく一致しているが、 $w, M_x, Q_y, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}$ は、 $e=1/20$ でも、あまり一致しない。
- (5) 部分分布荷重を受けた場合の薄板理論の板厚比に関する適用限界は、大約、周辺単純支持及び2辺自由では、 $e=1/12$ 以下、2辺固定では、 $e=1/20$ 以下である。
- (6) 本研究では、境界条件と板厚比に着目して薄板理論の適用性を吟味したが、他に、荷重条件、ポアソン比及び境界条件の組み合わせ方なども薄板理論の適用性に強い影響を及ぼすと考えられ、今後の検討課題と思われる。

参考文献

- 1) Love, A.E.H.: A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, Chap. XXII, 4th ed., Dover Pub., 1944.
- 2) Reissner, E.: The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates, J. Appl. Mech., Vol. 12, pp. A69~A77, 1945.
- 3) Mindlin, R.D.: Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates, J. Appl. Mech., Vol. 18, pp. 31~38, 1951.
- 4) Lo, K.H., R.M. Christensen and E.M. Wu: A high-order theory of plate deformation, J. Appl. Mech., Vol. 44, pp. 663~668, 1977.
- 5) 奥村 勇: 部分分布荷重を担うく形中等厚板の一解法について, 土木学会北海道支部論文報告集, 第37号, pp. 57~62, 1981.
- 6) 奥村勇・本多祐也・芳村仁: 一厚板理論による扇形平板の解析について, 土木学会論文報告集, 第326号, pp. 15-28, 1982.