

I - 38

入射せん断波を受ける埋設管周辺部の応力分布

室蘭工業大学工学部 正員 松岡健一
 室蘭工業大学工学部 正員 岸 徳光
 室蘭工業大学工学部 正員 菅田紀之
 日本大学生産工学部 正員 能町純雄

1. まえがき

地震時のパイプラインの被害としては、1989年10月のロマブリエタ地震でのサンフランシスコにおけるガス、電気、水道関係の被害が記憶に新しいが、この種の構造の地震時挙動を明らかにすることは、大きな規模の地震の予想される我国にとっても重要な問題である。

この種の構造のモデルとして弾性体中に埋設される円筒が考えられる。円孔や円筒を有する弾性体中を伝播する弾性波の応答問題は、Pao¹⁾や Mowと McCabe²⁾ がP波について、また、Mowと Mente³⁾はS波が入射する場合の解析を行っており、その他にも研究がなされているが、これらの多くは2次元問題として取り扱っているもので、弾性波が円孔や円筒の軸と角度をもって入射するような3次元問題はあまり取り扱われていない。著者らは、これまで弾性体中にある円筒が軸方向と角度をもって入射する弾性波を受ける時の応答問題を解析し、主として弾性体と円筒の境界面の変位や応力の応答倍率などについて検討している。^{4), 5)}

しかし、円筒や弾性体内部の応力分布については、あまり検討を行っていないので、ここでは、この点に注目し、入射角や、波長を2、3変化させた時の円筒及びその周辺の応力分布を検討するものである。

2. 基礎方程式

円孔を有する弾性体や、円筒を伝播する弾性波の基本解は既示している⁴⁾が、ここには改めて結果のみ示す。

図-1のように円孔または円筒軸方向にz軸、半径方向をr、円周方向をθ軸にとり、波動の伝播方向をz軸とψの角度を持つ方向とし、定常波動伝播を仮定すれば、変位、応力は次のように仮定できる。

$$f = f \exp \left[i \omega \left(t - \frac{z \sin \psi}{V} \right) \right] \quad (1)$$

ここで、ω：波動の角速度、V：波動の伝播速度である。式(1)を考慮して、三次元波動方程式をFourier-Hankel変換を用いて解けば、円筒に対する変位解は次のように示される。

$$u = \sum_{m=1}^{\infty} C_m (A_{mr} + B_{mr}) \cos \theta \exp \left[i \omega \left(t - \frac{z \sin \psi}{V} \right) \right] \quad (2)$$

$$v = \sum_{m=1}^{\infty} (A_{mr} + B_{mr}) \sin \theta \exp \left[i \omega \left(t - \frac{z \sin \psi}{V} \right) \right] \quad (3)$$

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} C_m W_{mr} \cos \theta \exp \left[i \omega \left(t - \frac{z \sin \psi}{V} \right) \right] \quad (4)$$

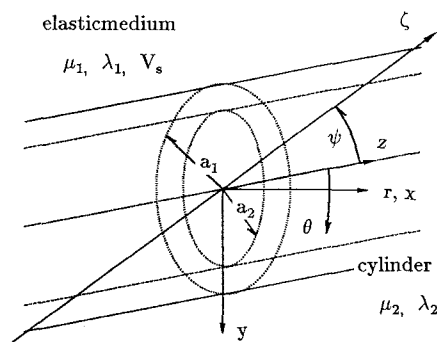


図-1 座標系

ここで、 $C_0 = 1/2 \pi$ 、 $C_m = 1/\pi$ ($m \neq 0$) である。式中の A_{mr} 、 B_{mr} 、 W_{mr} は、 μ 、 λ をLameの定数、 ρ を円筒の密度、 a_1 、 a_2 を円筒の外径及び内径とし $N = \omega \sin \psi / V$ 、 $N_\mu^2 = N^2 - \rho \omega^2 / \mu$ 、 $N_\alpha^2 = N^2 - \rho \omega^2 / (2 \mu + \lambda)$ とすれば、

Stress Distribution Around a Cylinder Embedded in an Elastic Medium Excited by Shear Waves
 by Kenichi MATSUOKA, Norimitsu KISHI, Noriyuki SUGATA and Sumio NOMACHI

$$\begin{aligned} A_{mk} = \sum_{k=1}^2 & \left[\frac{\chi_{mp}^{(k)}(N_{\mu}r)}{N_{s\mu}} \left\{ \frac{\alpha_{mk}}{2\mu} + (m+1)A_{mk} + (m-1)B_{mk} - \frac{iNE_{mk}}{2} \right\} \right. \\ & \left. + \left(\frac{\mu N^2}{\rho\omega^2} \right) \left\{ \frac{\chi_{mp}^{(k)}(N_{\mu}r)}{N_{\mu}} - \frac{N_{\alpha}\chi_{mp}^{(k)}(N_{\alpha}r)}{N^2} \right\} \left\{ \frac{\beta_{mk}}{2\mu} + (m+1)A_{mk} - (m-1)B_{mk} + iNE_{mk} \right\} \right] \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} B_{mk} = \sum_{k=1}^2 & \left[-\frac{\chi_{ms}^{(k)}(N_{\mu}r)}{N_{\mu}} \left\{ \frac{\alpha_{mk}}{2\mu} + (m+1)A_{mk} + (m-1)B_{mk} + \frac{iNE_{mk}}{2} \right\} \right. \\ & \left. + \left(\frac{\mu N^2}{\rho\omega^2} \right) \left\{ \frac{\chi_{ms}^{(k)}(N_{\mu}r)}{N_{\mu}} - \frac{N_{\alpha}\chi_{ms}^{(k)}(N_{\alpha}r)}{N_{\alpha}^2} \right\} \left\{ \frac{\beta_{mk}}{2\mu} + (m+1)A_{mk} - (m-1)B_{mk} + iNE_{mk} \right\} \right] \end{aligned} \quad (6)$$

$$W_{mr} = \sum_{k=1}^2 \left[G_m^{(k)}(N_{\alpha}r)E_{mk} - i \left(\frac{2\mu N}{\rho\omega^2} \right) \{ G_m^{(k)}(N_{\alpha}r) - G_m^{(k)}(N_{\mu}r) \} \left\{ \frac{\beta_{mk}}{2\mu} + (m+1)A_{mk} - (m-1)B_{mk} + iNE_{mk} \right\} \right] \quad (7)$$

また、式中の関数 G_m , χ_{mp} , χ_{ms} は Hankel 変換の逆変換より得られる関数で I , K を変形第一種及び第二種のベッセル関数として

$$\begin{aligned} G_m^{(k)}(Nr) &= \frac{R_{m,m}^{(k)}(Nr)}{R_{m,m}^{(k)}(Na_k)}, \quad \chi_{mp}^{(k)}(Nr) = \frac{R_{m+1,m}^{(k)}(Nr)}{R_{m,m}^{(k)}(Na_k)}, \quad \chi_{ms}^{(k)}(Nr) = \frac{R_{m-1,m}^{(k)}(Nr)}{R_{m,m}^{(k)}(Na_k)} \\ R_{j,m}^{(k)}(Nr) &= I_j(Nr)K_m(Na_{k-1}) - (-1)^{j+m}I_m(Na_{k-1})K_j(Nr); \quad j=m-1, m, m+1; \quad a_0=a_2 \end{aligned}$$

と表される。さらに、式中の α , β , A , B , E は円筒の内外面の変位及び応力で与えられる積分定数である。

式(5)～(7)は、円筒に対する変位式であるが、円孔を有する無限体の場合は、 $a_1 = \infty$ となるので、 $k=2$ のもののみを考慮すれば良く、また円柱の場合は、 $a_2 = 0$ となるので、 $k=1$ のもののみを考慮することで与えられる。この時、それぞれの関数は、
円孔を有する無限体に対して

$$G_m(Nr) = \frac{K_m(Nr)}{K_m(Na_2)}, \quad \chi_{mp} = -\frac{K_{m+1}(Nr)}{K_m(Na_2)}, \quad \chi_{ms} = -\frac{K_{m-1}(Nr)}{K_m(Na_2)}$$

円柱に対して、

$$G_m(Nr) = \frac{I_m(Nr)}{I_m(Na_1)}, \quad \chi_{mp} = \frac{I_{m+1}(Nr)}{I_m(Na_1)}, \quad \chi_{ms} = \frac{I_{m-1}(Nr)}{I_m(Na_1)}$$

となる。

3. 入射波

入射波としては種々考えられるが、ここでは過渡的な挙動も検討できる Ricker wavelet を取り上げ、波動はせん断波とする。波動の進行方向を z 軸と ψ の角度とし、SH 波を仮定すれば入射 Ricker wavelet による、 r , θ , z 方向の変位は

$$u^{(0)} = u_0 A_0 \left(t - \frac{z'}{V_s} \right) \cos\theta \cos\psi \quad (8) \quad v^{(0)} = -u_0 A_0 \left(t - \frac{z'}{V_s} \right) \sin\theta \cos\psi \quad (9) \quad w^{(0)} = u_0 A_0 \left(t - \frac{z'}{V_s} \right) \sin\psi \quad (10)$$

ただし、 $z' = zw\psi - r\cos\theta\sin\psi$ であり V_s は弾性体のせん断波の速度である。また、

$$A_0 \left(t - \frac{z'}{V_s} \right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\pi^2 \tau'^2 - \frac{1}{2} \right) \exp(-\pi^2 \tau'^2), \quad \tau' = \left(t - \frac{z'}{V_s} \right) / t_p \quad (11)$$

である。ここで、 t_p は、 A_0 の時間に関する Fourier 変換が、最大となるときの周期に対応する。 A_0 の時間に関する

Fourier変換を A_0 とすれば、

$$A_0(\omega, r, \theta, z) = \int_{-\infty}^{\infty} A_0(t-z'/V_s) e^{-i\omega t} dt = \frac{t_p}{2} \xi^2 \exp[-\xi^2 - i\omega(z \cos \psi - r \cos \psi \sin \theta)/V_s] \quad (12)$$

となる。ただし $\xi = t_p \omega / 2\pi$ であり、この逆変換は、

$$\begin{aligned} A_0(t-z'/V_s) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A_0(\omega, r, \theta, z) e^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{t_p}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 \exp[-\xi^2 + i\omega\{t - (z \cos \psi - r \cos \psi \sin \theta)/V_s\}] d\omega \\ &= \frac{t_p}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 e^{-\xi^2} \exp(i \omega r \cos \psi \sin \theta) \\ &\quad \times \exp[i \omega (t - z \cos \psi)/V_s] d\omega \end{aligned} \quad (13)$$

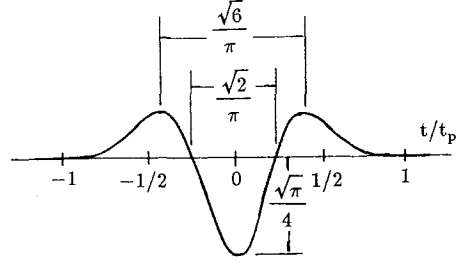


図-2 Ricker wavelet の波形

上式より、Ricker waveletによる応答問題は、角速度 ω 、振幅 $t_p \xi^2 e^{-\xi^2}/4\pi$ の定常波動応答を重ね合わせることで得られることがわかる。

4. 境界条件

入射波を受ける弾性体中の埋設管の動的応答は、上で求めた円孔を有する弾性体及び円筒の変位解を入射波動の存在のもとで、円筒円外面の境界条件を満たすように重ね合わせて解析することができる。

まず、式(5)、(6)から次の条件を満足しなければならない。

$$A_{m1}^{(1)} = A_{mr}^{(1)}|_{r=a_1/a_1} \quad (14) \quad B_{m1}^{(1)} = B_{mr}^{(1)}|_{r=a_1/a_1} \quad (15)$$

$$A_{mk}^{(2)} = A_{mr}^{(2)}|_{r=a_k/a_k} \quad (16) \quad B_{mk}^{(2)} = B_{mr}^{(2)}|_{r=a_k/a_k} \quad (17)$$

さらに、円筒の内外面では、

i) 円筒の外面($r=a_1$)で変位及び応力が連続として

$$u^{(0)} + u^{(1)}|_{r=a_1} = u^{(2)}|_{r=a_1} \quad (18) \quad v^{(0)} + v^{(1)}|_{r=a_1} = v^{(2)}|_{r=a_1} \quad (19)$$

$$w^{(0)} + w^{(1)}|_{r=a_1} = w^{(2)}|_{r=a_1} \quad (20) \quad \sigma_r^{(0)} + \sigma_r^{(1)}|_{r=a_1} = \sigma_r^{(2)}|_{r=a_1} \quad (21)$$

$$\tau_{r\theta}^{(0)} + \tau_{r\theta}^{(1)}|_{r=a_1} = \tau_{r\theta}^{(2)}|_{r=a_1} \quad (22) \quad \tau_{rz}^{(0)} + \tau_{rz}^{(1)}|_{r=a_1} = \tau_{rz}^{(2)}|_{r=a_1} \quad (23)$$

ii) 円筒の内面($r=a_2$)は中空として

$$\sigma_r^{(2)}|_{r=a_2} = 0 \quad (24) \quad \tau_{r\theta}^{(2)}|_{r=a_2} = 0 \quad (25) \quad \tau_{rz}^{(2)}|_{r=a_2} = 0 \quad (26)$$

5. 数値解析及び考察

数値計算は、円筒の円外径比(a_2/a_1)、弾性体と円筒の密度比 (ρ_2/ρ_1)、弾性係数比(E_2/E_1)、波長、入射角などを種々変化させて行った。ここでは、 $a_2/a_1=0.9$ 、 $\rho_2/\rho_1=1.0$ 、 $E_2/E_1=1000$ 、ポアソン比 $\nu_1=\nu_2=0.25$ と固定し、入射波の波長に關係する $t_p V_b/a_1$ を $\pi, 2\pi, 5\pi$ (ただし $V_b=\sqrt{E/\rho}$)、入射角を 30° と 45° としたときの結果のみを示す。

図-3は、 $t_p V_b/a_1=2\pi$ で入射角 45° の時の半径方向変位の周方向の変化を z/a_1 が -10.0 から 10.0 まで断面について示したものである。変形は $\theta=0^\circ, 180^\circ$ に対して対称であるので半円部のみ示した。また、図は z の大きな方が、波動の進行方向である。図-2に示すように入射波のみかけ上の波長は、 $\sqrt{6} t_p V_b/\pi$ で与えられるので、このときの

入射波はみかけの波長が $2\sqrt{6}a_1 \approx 4.9a_1$ となり、 $2\pi a_1$ より大きな範囲では変位はほとんど生じない波動である。従って、 $z/a_1 = -10.0$ では、波動は通過しており変位もほとんど生じていない。 z が大きくなるに従い $\theta = 180^\circ$ 側で変位が現れ、次第に $\theta = 0^\circ$ 側へ移っている様子がわかる。 $z/a_1 = -4.0$ 位から $\theta = 0^\circ$ 側にも変位が起きているが、これは反射波の影響と思われる。円筒部はかなり剛なため図に示されるような変位は現れていない。

図-4~7には、周方向応力の周方向分布を $z/a_1 = -5.0 \sim 3.0$ の6断面について、円筒部、弾性体部別々に示した。図-4、5は入射角 30° 図-6、7は 45° のものである。

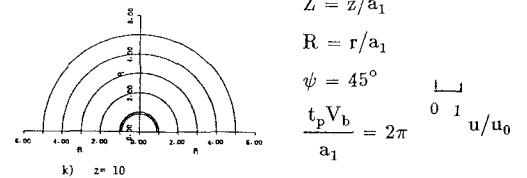
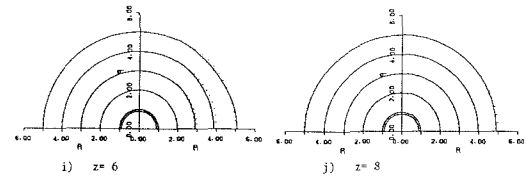
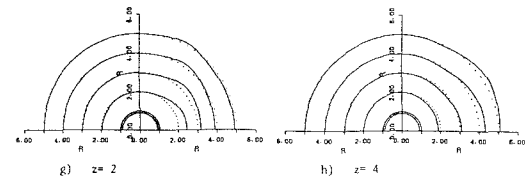
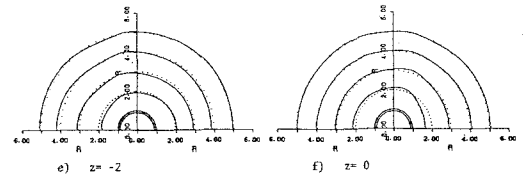
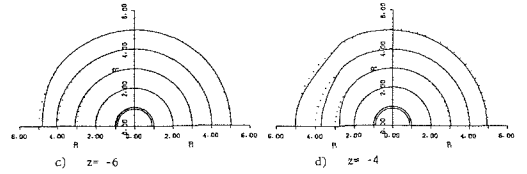
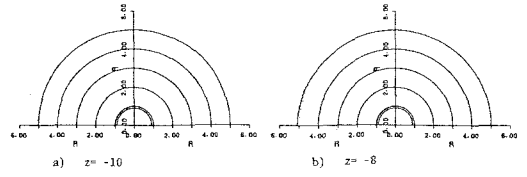
図-4は円筒部の応力分布であるが、 $t_p V_b / a_1 = \pi$ のときは、この図では $z/a_1 = -1.0, 0.0, 1.0$ の断面にしか応力は生ぜず、フープストレスが卓越しているようである。しかし、 t_p が大きくなるに従い応力の生ずる範囲も広がり、断面の曲げが大きくなっている。 $t_p V_b / a_1 = 5\pi$ では、円筒を扁平にするような曲げが卓越し最大曲げ応力は $z/a_1 = \pm 3.0$ 付近で大きくなっている。しかし、いずれの場合も最大応力の生ずる断面は、 $\theta = 0^\circ$ 又は $\theta = 180^\circ$ が多く、 $t_p a_1 / V_b = 5\pi$ で、 $z/a_1 = -3.0, -1.0$ のときのみ $\theta = \pm 90^\circ$ の断面で大きくなっているようである。

図-5には同じ条件の弾性体部の応力分布を示した。弾性体部では円筒部とは異なり、 t_p の小さい方で大きな応力を生じており、最大応力を生ずる断面も $\theta = \pm 90^\circ$ 付近に集中している。これは、波長の短い波動に対しては円筒が剛体のように作用し、波動の伝播が拘束されるため、円筒部の変形は少なく、応力もあまり大きくならないが、その反面弾性体部では波動の乱れが生じ、そのため大きな応力を生ずるものと思われる。

これに対し、波長が長いときは、円筒も弾性体と同じように変形するため、円筒部には大きな応力が生じ、逆に弾性体部には大きな応力が生じないこととなっている。

図-6は入射角 $\psi = 45^\circ$ のときの円筒部の応力である

が、入射角 $\psi = 30^\circ$ の場合と異なり、波長の短いときから円筒部にも大きな応力が生じている。波長が短いときは、波動の前方では、 $\theta \approx \pm 45^\circ$ で大きな応力となり、波動の後方では $\theta \approx 135^\circ$ で大きな応力となっている。このときも波長が短い場合、断面方向の曲げ成分はそれほど大きくはないが波長が大きくなると曲げ成分が大きくなり、また応力の生ずる範囲も大きくなっている。



$$Z = z/a_1$$

$$R = r/a_1$$

$$\psi = 45^\circ$$

$$\frac{t_p V_b}{a_1} = 2\pi$$

$$\frac{1}{0 \ 1} u/u_0$$

図-3 半径方向変位の周方向分布

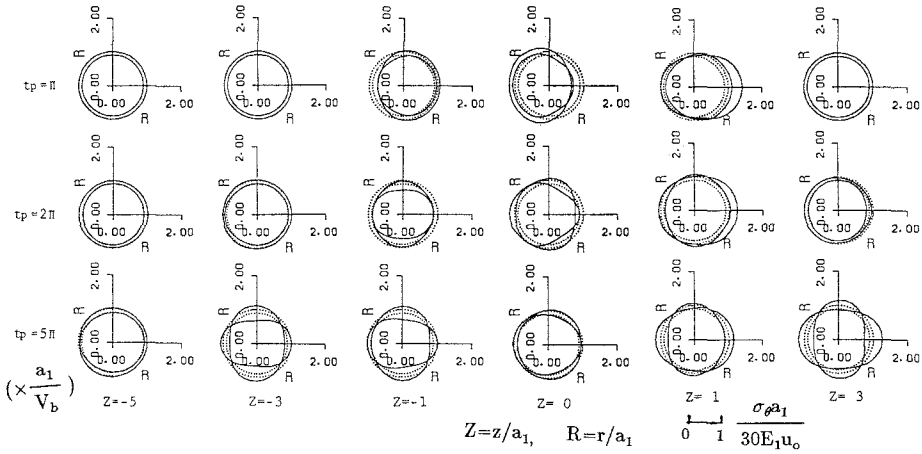


図-4 周方向応力の周方向分布(円筒部、 $\psi=30^\circ$)

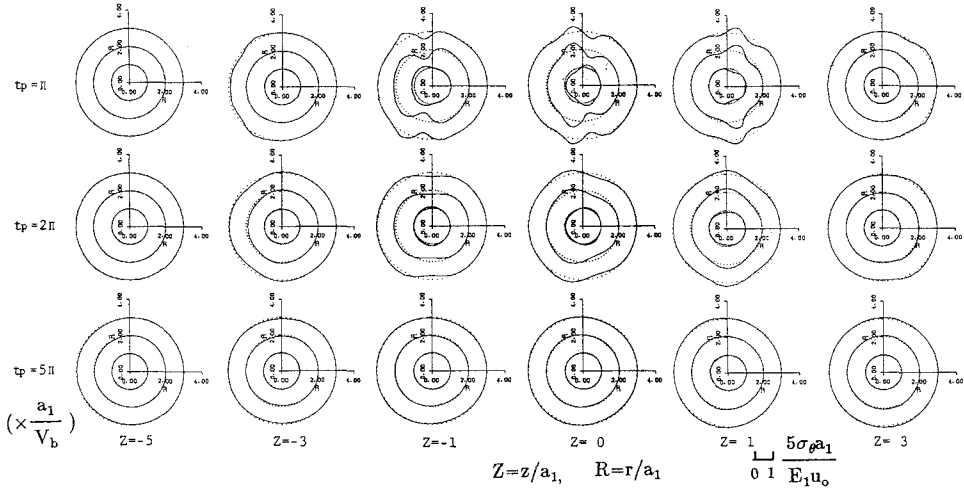


図-5 周方向応力の周方向分布(弾性体部、 $\psi=30^\circ$)

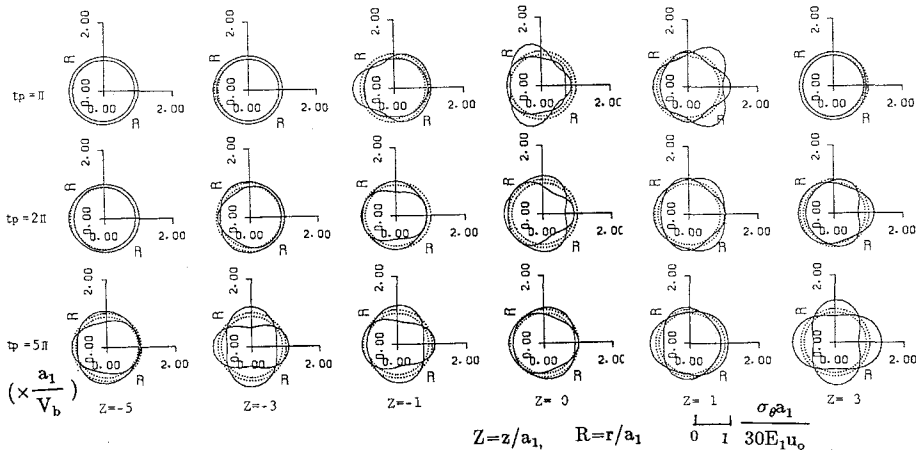


図-6 周方向応力の周方向分布(円筒部、 $\psi=45^\circ$)

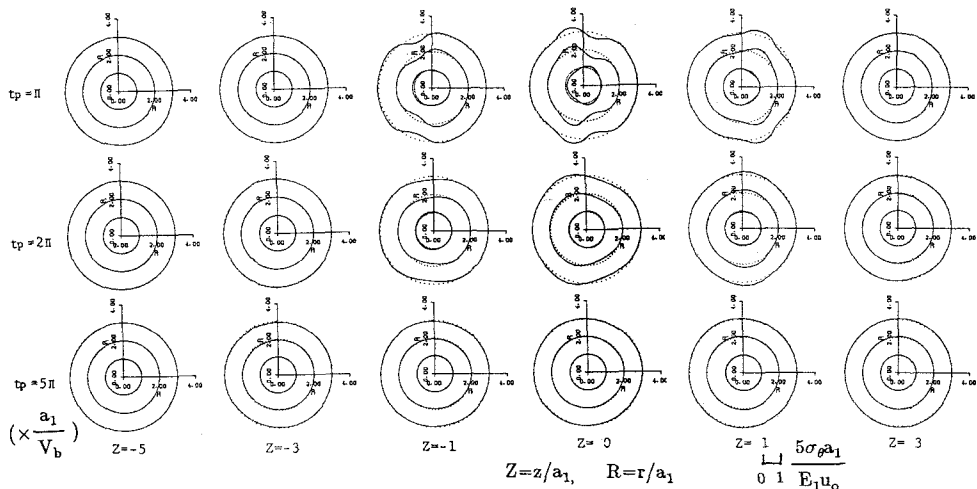


図-7 周方向応力の周方向分布(弾性体部、 $\psi=45^\circ$)

図-7は同様、弾性体部の応力である。弾性体部の応力は入射角 $\psi=30^\circ$ の場合とそれほど大きな差はなく、やはり波長が短いとき大きな応力を示しており、入射角の変化の影響は少ないようである。

6. まとめ

埋設管の波動応答を検討するため、せん断波のRicker wavelet が入射する場合の応答解析を行った。解析例は十分でなく、より多くの解析を必要とするが、本解析結果から、入射せん断波による埋設管の応力は、入射角や波長に大きく影響されることが明かとなったが特に、

- 1). 入射角が 30° の時には、円筒部では波長が長い波動に対して断面方向に大きな曲げが生ずる。
- 2). 入射角が 45° の時には、円筒部では波長によらず大きな応力を発生しているが、波長が短いときは局部的に大きな応力が生じ、波長が長いときは、断面方向に大きな曲げを生じている。
- 3). 弾性体部では入射角によりあまり大きな差はないが、波長の短いときに大きな応力を生じている。

ことがわかった。より詳しい検討のためには、さらに入射角や弾性定数比、波長を変化させた解析を行う必要があり、現在実施中である。

参 考 文 献

- 1) Pao, Y. H. : Dynamical Stress Concentration in an Elastic Plate, J. Appl. Mech., Vol.29, pp.299~315, 1962.
- 2) Mow, C. C. and McCabe, W. L. : Dynamic Stresses in an Elastic Cylinder, Proc. A. S. C. E., Vol.89, No.EM3, pp.21~41, 1962.
- 3) Mow, C. C. and Mente, L. J. : Dynamic Stresses and Displacements Around Cylindrical Discontinuities Due to Plane Harmonic Shear Waves, J. Appl. Mech., Vol.30, pp.598~604, 1963.
- 4) 松岡健一, 能町純雄, 岸徳光 : 入射せん断波を受ける弾性体中にある厚肉円筒の動的応答, 構造工学論文集, Vol.31A, pp.465~472, 1985
- 5) 松岡健一, 岸徳光, 吉田紘一, 能町純雄 : 斜め入射せん断波を受ける埋設管の過度的応答解析, 構造工学論文集, Vol.34A, pp.847~854, 1988