

ジベルの変形を考慮した合成桁橋 の曲げ振動について

北海道大学工学部 正員 佐藤 浩一

1. まえがき

橋梁における複合構造物の代表的なものの一つに鋼桁とコンクリート床版とを頭つきスタッドジベルで一体として結合した合成桁橋がある。

合成桁はジベルの合成効果により次の3つに分類されている。(1)ジベルが完全に剛である場合が完全合成桁($K=\infty$)、(2)ジベルの弾性変形を考慮する場合が不完全合成桁($0 < K < \infty$)、(3)ジベルの合成効果が全くない場合が重ね梁($K=0$)。ここで、 K はジベルのばね定数であり、重要な定数である。不完全合成桁の静的構造特性の一つである合成作用あるいは合成効果を設計に便利な形で表示しているものに文献¹⁾と文献⁴⁾とがあるように思われる。文献⁴⁾は不完全合成板の解析を行っているが、その中で不完全合成桁の静的構造特性を求めるために α 、 β 、 γ の無次元量のパラメータを導入して整理している。これらのパラメータは完全合成桁を基準にしているので、設計に非常に便利である。

これに対して、動的解析に關しての報告はあまりないようである。

従つて、本論文は不完全合成桁の曲げ振動に關する運動方程式を D'Alembert の原理を用いて誘導し、動的解析の基本である固有振動周期を求め、さらに固有振動周期特性を求めるため文献⁴⁾と同様の手法を用いて、完全合成桁の固有振動周期を基準にして設計に便利な無次元量パラメータ α 、 β 、 γ を導入して整理したものである。ただし、静的解析の場合と動的解析の場合とで α 、 β 、 γ の定義は異なっているが、数値計算によれば数値的にはほとんど同じになることを示すものである。

2. 本論文で用いる主な記号の説明

本論文で用いる記号は次の通りである。

- A_c = 共働する版のコンクリート部の断面積 ; A_s = 版と合成された鋼桁の断面積 ;
- A_v = 鋼断面に換算した合成断面積 ; E_c = コンクリートのヤング係数 ; E_s = 鋼のヤング係数 ;
- g = 重力加速度 ; $H_{ve}(x)$ = 不完全合成桁の場合のジベルに作用する水平せん断力 ;
- I_c = コンクリート断面のその重心Cに關する断面二次モーメント ;
- I_s = 鋼桁のその重心Sに關する断面二次モーメント ;
- I_v = 鋼断面に換算した合成断面の断面二次モーメント ;
- K = ジベル1本の単位長さあたりのばね定数 ; L = スパン ; m = 振動の m 次モード ;
- $n = E_s/E_c$: 鋼とコンクリートとのヤング係数比 ; $p(x)$ = 荷重強度 ; $p(x,t)$ = 強制項 ;
- s = 版のコンクリートの重心Cと鋼桁の重心Sとの距離 ;
- s_c = 合成断面の中立軸Vと版のコンクリートの重心Cとの距離 ;
- s_s = 合成断面の中立軸Vと鋼桁の重心Sとの距離 ;
- ${}_mT_v$ = 完全合成桁の場合の固有振動周期 ;
- ${}_mT_{ve}$ = 不完全合成桁の場合の固有振動周期 ; t = 時間 ; w = 単位長さあたりの合成桁の重量 ;
- x = 左支点からの距離 (図-1 参照) ; $y_e(x) = y_{ve}(x) - y_v(x)$; $y_e(x,t) = y_{ve}(x,t) - y_v(x,t)$;

On Flexural Vibration of Composite Girder Bridges Considering Deformation of Headed Stud Connectors

by Koichi SATO

$y_v(x)$ = 完全合成桁の場合の桁の静的たわみ ; $y_v(x,t)$ = 完全合成桁の場合の桁の動的たわみ ;
 $y_{ve}(x)$ = 不完全合成桁の場合の桁の静的たわみ ; $y_{ve}(x,t)$ = 不完全合成桁の場合の桁の動的たわみ ;
 $\alpha_m = 1 - \beta_m$; β_m = 式(10)で定義されるパラメータ ; γ_m = 式(9)で定義されるパラメータ ;
 κ = 式(4)で定義されるパラメータ ; $\delta(x)$ = ジベルのずれ量 ; ω = 固有円振動数。

本論文は図-1および図-2に示すような頭つきスタッドジベルを有する合成桁を対象とする。

また、合成桁の合成断面（図-2参照）に関してはコンクリートを鋼に換算した次式を用いる。

$$\begin{aligned}
 A_v &= A_s + A_c/n; \quad s_c = A_s/A_v \times s, \quad s_s = A_c/(nA_v) \times s, \\
 I_v &= I_s + I_c/n + A_v s_c s_s = I_s + I_c/n + A_c s_c s/n = I_s + I_c/n + A_s s_s s, \\
 n &= E_s/E_c
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

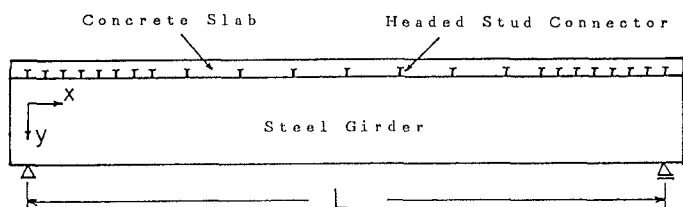


図-1 合成桁

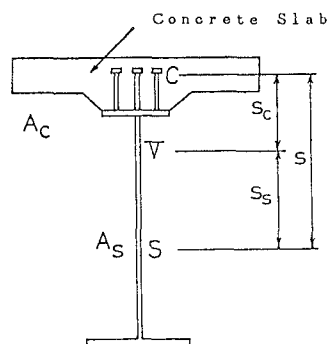


図-2 合成桁の合成断面

3. 不完全合成桁の静的解析理論

不完全合成桁のたわみに関する微分方程式は次の2個の微分方程式となる^{7), 3)}。

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d^4 y_v(x)}{dx^4} &= \frac{p(x)}{E_s I_v} \end{aligned} \right. \tag{2a}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d^4 y_e(x)}{dx^4} - \kappa^2 \frac{d^2 y_e(x)}{dx^2} &= \frac{p(x)}{E_s I_e} \end{aligned} \right. \tag{2b}$$

$$\text{ここで、} \quad y_{ve}(x) = y_v(x) + y_e(x) ; \quad I_e = \frac{nI_s + I_c}{A_c s_c s} I_v \tag{3}$$

$$\kappa^2 = \frac{nI_v}{nI_s + I_c} \frac{K n s}{E_s A_c s_c} = \frac{H}{E_s I_e}, \quad H = K \cdot \left(\frac{nI_v}{A_c s_c} \right)^2 \tag{4}$$

これらの微分方程式を境界条件のもとで解けばよい。

剛性マトリックス解法も1つの方法である³⁾。

なお、たわみ $y_v(x)$ と $y_e(x)$ はそれぞれの曲げ剛性に逆比例することは周知の事実である。たわみの比 γ の詳細については文献⁴⁾を参照されたし。

このことは後述の不完全合成桁の固有振動周期を求める場合にも利用する。

式(2a)は図-3 aに示すような完全合成桁の静的問題に帰着される。また、式(2b)は図-3 bに示すような両端で水平方向に大きさ $H = E_s I_e \cdot \kappa^2$ の一定軸方向力が作用する桁の静的問題に帰着される。

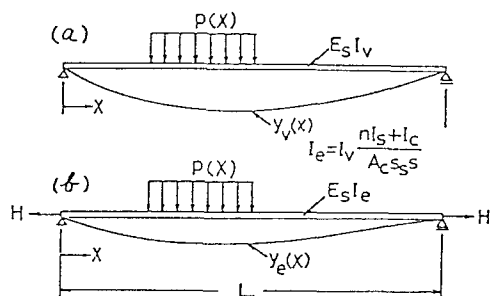


図-3 不完全合成桁と等価な桁

式(2b)は吊橋の撓度理論あるいは直線桁の曲げねじり理論と同形の微分方程式である。従って、不完全合成桁の静的解析は初等曲げ理論(式(2a))と吊橋あるいは直線桁の曲げねじり理論(式(2b))が適用できるので、剛性マトリックス解析法^{2), 3)}は有用な手法の一つであると思われる。

4. 不完全合成桁の曲げ振動に関する微分方程式の誘導と自由振動解析

不完全合成桁の曲げ振動に関する運動方程式を導くには、不完全合成桁の断面に作用する力の釣合方程式と不完全合成桁のたわみ-曲げモーメントの関係をいれればよい。 w を単位長さあたりの不完全合成桁の重量、 g を重力加速度とすれば、式(2a)、(2b)は D'Alembert の原理より、次式ようになる。

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^4 y_v(x,t)}{\partial x^4} &= \frac{p(x,t)}{E_s I_v} - \frac{w}{E_s I_v g} \frac{\partial^2 y_v(x,t)}{\partial t^2} & \dots\dots\dots (5a) \\ \frac{\partial^4 y_\theta(x,t)}{\partial x^4} - \kappa^2 \frac{\partial^2 y_\theta(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{p(x,t)}{E_s I_\theta} - \frac{w}{E_s I_\theta g} \frac{\partial^2 y_\theta(x,t)}{\partial t^2} & \dots\dots\dots (5b) \end{aligned} \right.$$

一定断面を有するスパン L の不完全合成桁の曲げ自由振動を考える。これに対する基礎微分方程式は、式(5a)、(5b)において、強制項 $p(x,t)$ を無視すると、次式によって与えられる。

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^4 y_v(x,t)}{\partial x^4} &= - \frac{w}{E_s I_v g} \frac{\partial^2 y_v(x,t)}{\partial t^2} & \dots\dots\dots (6a) \\ \frac{\partial^4 y_\theta(x,t)}{\partial x^4} - \kappa^2 \frac{\partial^2 y_\theta(x,t)}{\partial x^2} &= - \frac{w}{E_s I_\theta g} \frac{\partial^2 y_\theta(x,t)}{\partial t^2} & \dots\dots\dots (6b) \end{aligned} \right.$$

1) 両端ピン支持の場合の固有振動周期

両端でピン支持されたスパン L の不完全合成桁の自由振動を考えよう。
この場合の式(6a)、(6b)の m -次の固有円振動数を ${}_m\omega_v, {}_m\omega_\theta$ とすれば、次式で求まる^{5), 6)}。

$${}_m\omega_v = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{L}\right)^4 \frac{g \cdot E_s I_v}{w}} \quad \dots\dots (7a), \quad {}_m\omega_\theta = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{L}\right)^4 \frac{g \cdot E_s I_\theta}{w} + \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \frac{g \cdot H}{w}} \quad \dots\dots\dots (7b)$$

固有振動周期を ${}_mT_v, {}_mT_\theta$ とすれば、次式で求まる。

$${}_mT_v = \frac{2}{\pi} \left(\frac{L}{m}\right)^2 \sqrt{\frac{w}{g \cdot E_s I_v}} \quad \dots\dots\dots (8a)$$

$${}_mT_\theta = \frac{2}{\pi} \left(\frac{L}{m}\right)^2 \sqrt{\frac{w}{g \cdot E_s I_\theta} \frac{1}{1 + (\kappa L / m\pi)^2}} \quad \dots\dots\dots (8b)$$

桁の固有振動周期は曲げ剛性の平方根に逆比例する(一方、桁のたわみは曲げ剛性に逆比例する)から、次式の自乗比 γ_m を考えてみる。

$$\gamma_m = \left(\frac{{}_mT_\theta}{{}_mT_v}\right)^2 = \frac{I_v}{I_\theta} \cdot \beta_m = \frac{A_c s_c s}{n I_s + I_c} \cdot \beta_m = \frac{A_c s_c s}{n I_s + I_c} \cdot (1 - \alpha_m) \quad \dots\dots\dots (9)$$

ここで
$$\beta_m = \frac{1}{1 + (\kappa L / m\pi)^2} = 1 - \alpha_m \quad \dots\dots\dots (10)$$

である。このパラメータを導入すれば、不完全合成桁の固有振動周期 ${}_mT_v$ は次式で求まる。

$${}_mT_{v\theta} = \sqrt{{}_mT_v^2 + {}_mT_\theta^2} = {}_mT_v \sqrt{1 + ({}_mT_\theta / {}_mT_v)^2} \quad \dots\dots\dots (11)$$

具体的には

$$\begin{aligned} {}_mT_{v\theta} &= {}_mT_v \sqrt{1 + \gamma_m} = {}_mT_v \sqrt{1 + \beta_m \cdot I_{csv} / I_{cs}} \\ &= {}_mT_v \sqrt{(I_{cs} + \beta_m \cdot I_{csv}) / I_{cs}} \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{L}{m}\right)^2 \sqrt{\frac{w}{g \cdot E_s} \frac{I_{cs} + \beta_m \cdot I_{csv}}{(I_{cs} + I_{csv}) \cdot I_{cs}}} \quad \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

ここで $I_v = I_{cs} + I_{csv}; I_{cs} = I_s + I_c / n$; および $I_{csv} = A_c s_c s / n$ (13)

添字 v および ve はそれぞれ完全合成桁および不完全合成桁を表している。

式(10)によって定義される β_m は次のような意味をもっている。

$\beta_m=0$ ならば完全合成桁、即ち、 $\alpha_m=1$; $\gamma_m=0$ である。 $0<\beta_m<1$ ならば不完全合成桁、即ち、 $\alpha_m=1-\beta_m$, $\gamma_m=A_c s_c s/(nI_s+I_c)$ である。 $\beta_m=1$ ならば重ね梁、即ち、 $\alpha_m=0$, $\gamma_m=A_c s_c s/(nI_s+I_c)$ である。

また、不完全合成桁の一次固有振動周期は式(12)において $m=1$ とおけば求まる。

2) 両端ピン支持の場合のたわみ⁴⁾

比較のため文献⁴⁾で示されている静的構造特性を略記する。

桁のたわみは曲げ剛性に逆比例するから、次式のように γ を考えている。

$$\gamma = \frac{y_e}{y_v} = \frac{I_v}{I_e} \cdot \beta = \frac{A_c s_c s}{nI_s + I_c} \cdot \beta = \frac{A_c s_c s}{nI_s + I_c} \cdot (1 - \alpha) \quad \dots\dots\dots (9^*)$$

ここで
$$\beta = \frac{\text{たわみ } y_e \text{ の } I_e \text{ を除いた値}}{\text{たわみ } y_v \text{ の } I_v \text{ を除いた値}} = 1 - \alpha \quad \dots\dots\dots (10^*)$$

である。このパラメータを導入すれば、不完全合成桁のたわみ y_{ve} は次式で求まる。

$$y_{ve} = y_v + y_e = y_v \cdot (1 + y_e/y_v) = y_v \cdot (1 + \gamma) \quad \dots\dots\dots (11^*)$$

具体的には
$$y_{ve} = y_v \cdot (1 + \gamma) = y_v \cdot (1 + \beta \cdot I_{csv}/I_{cs})$$

$$= y_v \cdot (I_{cs} + \beta \cdot I_{csv})/I_{cs} \quad \dots\dots\dots (12^*)$$

ここで $I_v = I_{cs} + I_{csv}$; $I_{cs} = I_s + I_c/n$; および $I_{csv} = A_c s_c s/n$. $\dots\dots\dots (13^*)$

添字 v および ve はそれぞれ完全合成桁および不完全合成桁を表している。

式(10^{*})によって定義される β は次のような意味をもっている。

$\beta=0$ ならば完全合成桁、即ち、 $\alpha=1$; $\gamma=0$ である。 $0<\beta<1$ ならば不完全合成桁、即ち、 $\alpha=1-\beta$, $\gamma=A_c s_c s/(nI_s+I_c)$ である。 $\beta=1$ ならば重ね梁、即ち、 $\alpha=0$, $\gamma=A_c s_c s/(nI_s+I_c)$ である。

式(10)、式(10^{*})を比較してみればわかるように β , γ の定義が異なっている。

3) 数値計算例

数値計算により式(9)–(13)の実際の使い方を説明しよう。

最初に、断面諸元を与えて式(4)より κ を求め、これにスパン L を乗じて κL を求める。

二番目に、この κL を用いて、式(10)より β_m を求める。

三番目に、この β_m を用いて、 $\gamma_m = A_c s_c s \cdot \beta_m / (nI_s + I_c)$ を計算する。

最後に、この γ_m を式(12)に代入すれば、不完全合成桁の固有振動周期 ${}_m T_{ve}$ が求まる。

断面諸元は以下の通りとする(標準的な合成桁橋である)。図-1においてジベルは等間隔とする。
 $L=3000\text{cm}$, $w=15.28622\text{kgf/cm}$, $E_s=2100000\text{kgf/cm}^2$, $g=980\text{cm/sec}^2$, $I_s=1506100\text{cm}^4$,
 $I_c=196796\text{cm}^4$, $n=7$, $I_{cs}=1534213\text{cm}^4$, $A_c=5355\text{cm}^2$, $s_c=35.5\text{cm}$, $s=114.4\text{cm}$, $I_{csv}=3106809\text{cm}^4$,
 $I_v=4641022\text{cm}^4$, $K=866\text{kgf/cm}^2$ (ばね定数 K は文献⁸⁾に示されているように Push-Out Test により求める。ここでは、かなり小さい値を仮定した)。

その結果 $\kappa=0.0022933/\text{cm}$, $\kappa L=6.87987$,

$\beta_1=0.172539$, $\alpha_1=0.827461$, および $\gamma_1=0.349395$ が求まる。

また、後述の図-4を用いれば、 $\kappa L=6.87987$ であるから図より $\beta_1=0.17$, $\alpha_1=0.83$ が求まる。

従って、完全合成桁の固有振動周期 ${}_1 T_v = 0.2292\text{sec}$ ($K=\infty$ の場合)

不完全合成桁の固有振動周期 ${}_1 T_{ve} = 0.2662\text{sec}$ ($K=866\text{kgf/cm}^2$ の場合)

重ね梁の固有振動周期 ${}_1 T_0 = 0.3986\text{sec}$ ($K=0$ の場合)

このように、断面諸元、ジベルのばね定数およびスパンが与えられれば、完全合成桁の固有振動周期を基準にして $\sqrt{1+\gamma_1}$ 倍すれば求めることが出来る。

5. 不完全合成桁の固有振動周期特性（不完全合成桁の α 曲線）

断面諸元、スパン、ジベルのばね定数を与えれば、式(11)で解析可能である。しかしながら、これらの値が任意で不完全合成桁の固有振動周期特性を求めるには次のような無次元化が必要である。式(4)で与えられる κ とスパン L との積（無次元量）と式(9),(10)で与えられる α , β , γ （いずれも無次元量）との関係を求めればよい。

$m=1$ の場合の α_1 あるいは β_1 と κL （無次元量）との関係を図示すれば図-4の通りである。

図-4において、縦軸に α_1 を横軸に κL をとり、プロットしている。

次に図-4の使い方を説明しよう。

最初に、断面諸元を与えて式(4)より κ を求め、これにスパン L を乗じて κL を求める。

二番目に、この κL を用いて、 α_m を求め、 $\beta_m=1-\alpha_m$ を求める。

三番目に、この β_m を用いて、 $\gamma_m = A_c S_c S \cdot \beta_m / (n I_s + I_c)$ を計算する。

最後に、この γ_m を式(12)に代入すれば、不完全合成桁の固有振動周期 $m T_v$ が求まる。

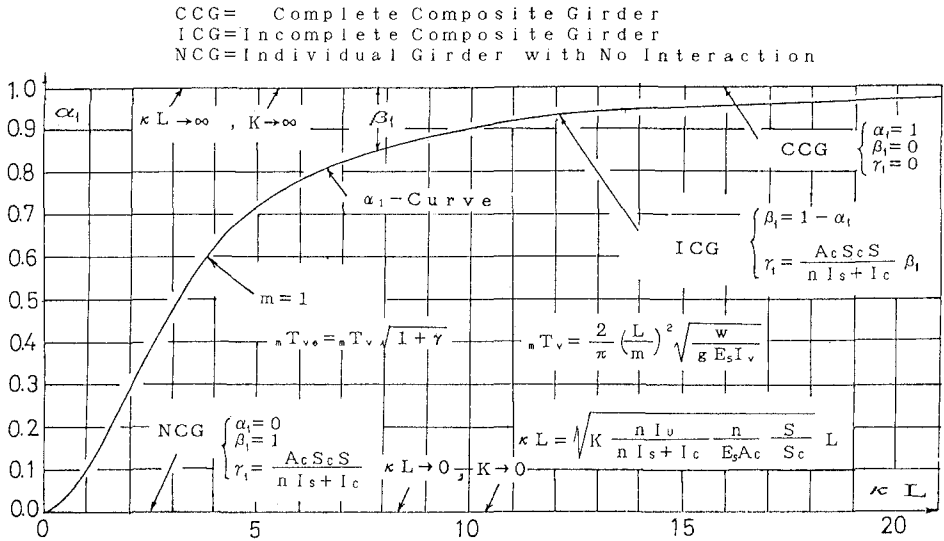


図-4 不完全合成桁の α_1 曲線（動的解析における）

図-4の α_1 曲線（本論文による）は文献⁴⁾の図-5の α 曲線（静的解析による）とほとんど重なっている。このことは本論文と文献⁴⁾における β , γ の定義は異なっているが、計算結果はほとんど同じであることを意味している。これは文献⁴⁾の不完全合成桁の場合の静的たわみをフーリエ級数展開して、無限個（数値計算では有限個とする）のうち、第一項のみ考えて、その比をとった場合であり、有限個の和の比とほとんど同じになることである。換言すれば、文献⁴⁾の β の代わりに本論文の式(10)の β_1 を用いることが可能であることを示している。

計算は PC-9801VM2 を使い、MS-FORTRAN で行った。

6. あとがき

本研究で得られた結論は次の通りである。

- 1) 不完全合成桁の動的解析理論(偏微分方程式)を D'Alembert の原理を用いて、誘導した。
- 2) 完全合成桁、不完全合成桁および重ね梁のたわみと固有振動周期は無次元量 α_m , β_m , γ_m を用いれば、完全合成桁を基準にした設計に便利な形で求めることが出来た。

まず、 β_m を計算で求める。 $\beta_m=0$ ならば完全合成桁、即ち、 $\alpha_m=1$; $\gamma_m=0$ である。

$0 < \beta_m < 1$ ならば不完全合成桁、即ち、 $\alpha_m=1-\beta_m$, $\gamma_m=A_c s_c s \cdot \beta_m / (n I_s + I_c)$ である。

$\beta_m=1$ ならば重ね梁、即ち、 $\alpha_m=0$, $\gamma_m=A_c s_c s / (n I_s + I_c)$ である。

不完全合成桁のたわみは

$$y_{ve} = y_v \cdot (1 + \gamma) = y_v \cdot (1 + \beta \cdot I_{csv} / I_{cs}) \quad \dots\dots\dots (11')$$

不完全合成桁の一次固有振動周期は

$$1 T_{ve} = 1 T_v \sqrt{1 + \gamma_1} = 1 T_v \sqrt{1 + \beta_1 \cdot I_{csv} / I_{cs}} \quad \dots\dots\dots (11)$$

で求めることができる。静的解析⁴⁾と動的解析(本論文)における β_1 , γ_1 の定義は異なっているが、計算結果はほとんど同じである。このことは文献⁴⁾の不完全合成桁の場合の静的たわみをフーリエ級数展開して、無限個(数値計算では有限個とする)のうち、第一項のみ考えて、その比をとった場合であり、有限個の和の比とほとんど同じになることである。換言すれば、 $\beta = \beta_1$, $\gamma = \gamma_1$ とすることが可能であることを示している。 β あるいは γ を求めるより β_1 あるいは γ_1 を求める方が第一項だけでよいので簡単である。

結局、 γ_1 さえ求めれば、不完全合成桁のたわみと一次固有振動周期が簡単に求まることになる。

- 3) 文献⁴⁾の図-5における α 曲線と本論文の図-4における α_1 曲線はほとんど同じである。
- 4) 他の境界条件の場合でも、また、連続桁の場合でも、式(9)に相当する γ_1 を求めれば、式(11')と式(11)で不完全合成桁のたわみと一次固有振動周期を求めることができる。

謝辞

最後に、本論文の作成にあたり、北海道大学工学部土木工学科 渡辺 昇教授から御指導と有益な助言を頂いたことに対し心より感謝の意を表します。

参考文献

- 1) 小松定夫、佐々木孝：不完全合成桁の理論と近似計算法について、土木学会論文報告集、第329号、pp.27-37、1983年 1月。
- 2) 佐藤浩一、渡辺昇：差分方程式の剛性マトリックス解析法について、土木学会北海道支部論文報告集、第44号、pp.87-92、1988。
- 3) 井上稔康、佐藤浩一、渡辺昇：不完全合成桁の差分剛性マトリックス解析法について、構造工学論文集、Vol.36A、pp.1223-1236、1990.3。
- 4) 井上稔康、佐藤浩一、渡辺昇：不完全合成板の解析について、構造工学論文集、Vol.36A、pp.1245-1258、1990.3。
- 5) 中井 博：土木構造物の振動解析、森北出版、1983。
- 6) 西岡 隆：構造振動解析、培風館、1987。
- 7) 島田静雄、熊沢周明：合成桁の理論と設計、山海堂、1973。
- 8) Newmark, N.M., Siess, C.P., Viest, I.M.: Tests and Analysis of Composite Beams with Incomplete Interaction, Proc. of the Society for Experimental Analysis, Vol.9, No.1, pp.75-93, 1951。