

I-28 逆対称クロス・プライ積層板の振動およびエネルギー解析

北海道大学 正員 芳村 仁

北海道大学 正員 三上 隆

北海道大学 学生員 朴 勝振

1. はじめに

複合材料は単一材料では望み得ない、比剛性、比強度が大きいなどの様々の優れた力学的特性を持っているため、構造軽量化が重要な様々な分野で使用されつつある。ここでいう剛性、強度とは通常、静的な負荷（変位）下でのものであり、これら静的な力学的性質のデータをもとに積層構造の設計が行われることが多い。しかし最近、複合材料の利用分野がますます広範になるに従い、動的な負荷を受ける構造にまでへの応用が期待されているが、静的な負荷下での力学的性質に優れる複合材料が必ずしも動的負荷下での力学的性質にも優れているとは限らない。このような場合動的負荷下での力学的性質のデータをもとにした設計が当然必要となる。特に重要構造部材への積極的利用にあたっては、積層構造要素の動力学的性質の解明は必要不可欠である。本研究は、積層板を取り上げ、その動的挙動の解明において基礎的情報を提供してくれる自由振動問題の解析を行ったものである。

そこで本研究では、相対する2辺が単純支持、他の2辺が任意支持の逆対称クロス・プライ積層板を対象にし、[1]選点法の自由振動問題への適用性の検討、および[2]振動数特性をひずみエネルギーの関連で明らかにすることを目的とする。特にひずみエネルギーの評価により、従来の研究においては定性的にしか言及されなかった曲げ-伸びカップリング剛性の自由振動特性に与える影響を、定量的に検討することが可能になる。

2. 基礎方程式

平板の厚さは一様とし h で表す。板厚中央面に座標 (x, y) 、それらに垂直な座標 z を定める。板の材料は均質な直交異方性弾性材料とする。材料の直交異方性主軸を $(1, 2, 3)$ で表し、主軸3は z 軸に平行で、主軸1と2はそれぞれ x と y に対し傾き角度 θ （プライ配向角）だけ傾いているものとする。なお、逆対称グロス・プライの積層板は $\theta = 0^\circ$ と 90° の組み合わせで構成されている。材料主軸 $(1, 2)$ 方向の弾性係数 E_1, E_2 、ポアソン比 ν_{12}, ν_{21} 、およびせん断弾性係数 G_{12}, G_{13}, G_{23} で与えられるものとする。座標軸と座標軸の関係を図-1に示す。

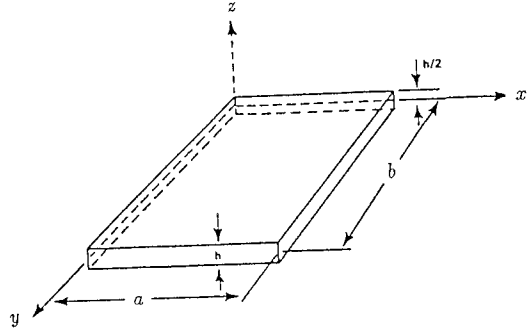


図-1 座標軸

YNS 理論¹⁾によれば積層板の基礎方程式は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} N_{x,x} + N_{xy,y} - P u_{,tt} - R \psi_{x,tt} &= 0, & N_{y,y} + N_{xy,y} - P v_{,tt} - R \psi_{y,tt} &= 0 \\ Q_{x,x} + Q_{y,y} - P w_{,tt} &= 0, & M_{x,x} + M_{xy,y} - Q_x - I \psi_{x,tt} - R u_{,tt} &= 0 \\ M_{y,y} + M_{xy,x} - Q_y - I \psi_{y,tt} - R v_{,tt} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここで、コンマ(,)に続く添字は偏微分を表し、 $(u, v, w) = (x, y, z \text{ 方向の変位成分})$ 、 $(\psi_x, \psi_y) = (x-z, y-z \text{ 平面の回転角成分})$ 、 $(N_x, N_y, N_{xy}, Q_x, Q_y) = \text{合応力}$ 、 $(M_x, M_y, M_{xy}) = \text{合モーメント}$ であり、 P, R と I は密度を ρ と記せば次式で

表される。

$$(P, R, I) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (1, z, z^2) \rho dz \quad (2)$$

クロス・プライ積層板に対する合応力と合モーメントは次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} N_x &= A_{11}u_{,x} + A_{12}v_{,y} + B_{11}\psi_{x,x} & N_y &= A_{12}u_{,x} + A_{22}v_{,y} + B_{22}\psi_{y,y} \\ N_{xy} &= A_{66}(u_{,y} + v_{,x}) & M_x &= B_{11}u_{,yx} + D_{11}\psi_{x,x} + D_{12}\psi_{y,y} \\ M_y &= B_{22}v_{,y} + D_{12}\psi_{x,x} + D_{22}\psi_{y,y} & M_{xy} &= D_{66}(\psi_{x,y} + \psi_{y,x}) \\ Q_x &= A_{55}(w_{,x} + \psi_x) & Q_y &= A_{44}(w_{,y} + \psi_y) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ただし、 A_{ij} は伸び剛性、 B_{ij} は曲げ一伸びカップリング剛性および D_{ij} は曲げ剛性とと呼ばれるもので、次のように表される。

$$A_{ij} = K_{ij}^2 \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{ij} dz \quad (i, j = 4, 5), \quad (A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (1, z, z^2) Q_{ij} dz \quad (i, j = 1, 2, 6) \quad (4)$$

ここで、 K_{ij}^2 はせん断補正係数であり、 Q_{ij} はプライ配向角、弾性係数、ポアソン比、せん断弾性係数に依存する弾性定数である。

式(3)を式(1)に代入すれば、cross-ply 積層板の基礎微分方程式は変位成分のみで表わされ以下ようになる。

$$\begin{aligned} A_{11}u_{,xx} + A_{66}u_{,yy} + (A_{12} + A_{66})v_{,xy} + B_{11}\psi_{x,xx} - Pu_{,tt} - R\psi_{x,tt} &= 0 \\ (A_{12} + A_{66})u_{,xy} + A_{66}v_{,xx} + A_{22}v_{,yy} + B_{22}\psi_{y,yy} - Pv_{,tt} - R\psi_{y,tt} &= 0 \\ A_{55}(w_{,xx} + \psi_{x,x}) + A_{44}(w_{,yy} + \psi_{y,y}) - Pw_{,tt} &= 0 \\ B_{11}u_{,xx} + D_{11}\psi_{x,xx} + D_{66}\psi_{x,yy} + (D_{12} + D_{66})\psi_{y,xy} - A_{55}(w_{,x} + \psi_x) - I\psi_{x,tt} - Ru_{,tt} &= 0 \\ B_{22}v_{,yy} + (D_{12} + D_{66})\psi_{x,xy} + D_{22}\psi_{y,yy} - A_{44}(w_{,y} + \psi_y) - I\psi_{y,tt} - Rv_{,tt} &= 0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (5)$$

$x=0$ と $x=a$ で単純支持、他の2辺 ($y=0, b$) は任意支持条件とすれば、境界条件は次のようになる。

$$x = 0, a \text{ で単純支持} : v = w = \psi_y = M_x = N_x = 0 \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} y = 0, b \text{ での条件} : \quad &\text{単純支持}(S) : u = w = \psi_x = M_y = N_y = 0 \\ &\text{固定}(C) : u = v = w = \psi_x = \psi_y = 0 \\ &\text{自由}(F) : M_y = M_{xy} = N_y = N_{xy} = Q_y = 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

ひずみエネルギー U は合応力とひずみ関係式を用いて次式のように表される。

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left\{ \begin{aligned} &A_{11}u_{,x}^2 + A_{66}u_{,y}^2 + 2A_{12}u_{,x}v_{,y} + 2A_{26}v_{,x}u_{,y} + A_{22}v_{,y}^2 + A_{66}v_{,x}^2 + A_{44}w_{,y}^2 \\ &+ A_{55}w_{,x}^2 + 2A_{44}w_{,y}\psi_y + 2A_{55}w_{,x}\psi_x + A_{55}\psi_x^2 + A_{44}\psi_y^2 \\ &+ 2B_{11}u_{,x}\psi_{x,x} + 2B_{22}v_{,y}\psi_{y,y} + D_{11}\psi_{x,x}^2 + D_{66}\psi_{x,y}^2 \\ &+ 2D_{12}\psi_{y,y}\psi_{x,x} + 2D_{66}\psi_{x,y}\psi_{y,x} + D_{22}\psi_{y,y}^2 + D_{66}\psi_{y,x}^2 \end{aligned} \right\} dA \quad (8)$$

3. 解析手法

$x=0, a$ で式(6)の条件を満足する変位関数として、Levy 型の次式を採用する。

$$\left. \begin{aligned} u(x, y, t) &= hU(\eta) \cdot \cos m\pi\xi \cdot e^{i\omega t}, & v(x, y, t) &= hV(\eta) \cdot \sin m\pi\xi \cdot e^{i\omega t} \\ w(x, y, t) &= hW(\eta) \cdot \sin m\pi\xi \cdot e^{i\omega t}, & \psi_x(x, y, t) &= X(\eta) \cdot \cos m\pi\xi \cdot e^{i\omega t} \\ \psi_y(x, y, t) &= Y(\eta) \cdot \sin m\pi\xi \cdot e^{i\omega t} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

ここで、 ω =固有円振動数、 $m = x$ 方向の半波数、 $\xi = x/a, \eta = y/b$ 。

1) 固有振動数方程式

変位関数式(9)を式(5)に代入すれば、次の $\eta(= [0, 1])$ に関するマトリックス常微分方程式が得られる。

$$[C_1]\{Z'''\} + [C_2]\{Z'\} + [C_3]\{Z\} - \Omega^2[C_4]\{Z\} = \{0\} \quad (10)$$

ここで、 $(\quad)' = d(\quad)/d\eta$ 、 $[C_1] \sim [C_4]$ は 5×5 の係数マトリックス、変位ベクトル $\{Z\}$ と無次元化固有円振動数 Ω^2 は次式で与えられる。

$$\{Z\}^T = \{Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5\} = \{U, V, W, X, Y\} \quad (11)$$

$$\Omega^2 = \rho \omega^2 a^4 / (E^2 h^2) \quad (12)$$

同様に、 $y = 0 (\eta = 0)$ と $y = b (\eta = 1)$ で規定される境界条件は次のようにマトリックス表示される。

$$[C_5]\{Z'\} + [C_6]\{Z\} = \{0\} \quad (13)$$

ここで、 $[C_5]$ と $[C_6]$ は 10×5 の係数マトリックスである。

さて、式 (10) の離散化には選点法を用いるが、ここでは後の展開に必要なことのみを記す。

[1] 変位関係の仮定；式 (11) の変位関数は次のように表す。

$$Z_i = \sum_{s=1}^{M+2} N_s(\eta) Z_{i,s} \quad (i = 1 \sim 5) \quad (14)$$

ここで、 $N_s(\eta)$ は補間関数、 $Z_{i,s} (s = 1 \sim M+2)$ は後述の内部選点と端点がらなる離散点における変位関数値を表す。

[2] 内部選点と端点； η 軸に沿って $0 = \eta_0 < \eta_1 < \dots < \eta_M < \eta_{M+1} = 1$ の $M+2$ の点を配置する。内部選点 $\eta_j (j = 1 \sim M, M = \text{内部選点数})$ には、区間 $[0, 1]$ で定義される M 次の shifted Legendre 多項式 $P_M^*(\eta)$ の零点を採用する。 $\eta_0 = 0$ と $\eta_{M+1} = 1$ は、境界条件が指定される点に配置されるので、端点と呼ぶ。

[3] マトリックス $[A]$ と $[B]$ ； η に関する 1, 2 階微分を内部選点と端点における関数値（変位の値）に結びつける $(M+2) \times (M+2)$ 次のマトリックスである。

$$\{Z_i'\} = [A]\{Z_i\}, \quad \{Z_i''\} = [B]\{Z_i\} \quad (i = 1 \sim 5) \quad (15)$$

ここで、たとえば $\{Z_i\}$ は次のようなものである。

$$\{Z_i\}^T = \{Z_i(\eta_0), Z_i(\eta_1), \dots, Z_i(\eta_{M+1})\} \quad (i = 1 \sim 5) \quad (16)$$

[4] $\{Z_{ic}\}$ と $\{Z_{ie}\}$ ；式 (16) は内部選点と端点に関する成分より構成されている。以下ではこれらを分離し、内部選点に関するものには添字 c を、端点のそれには添字 e を付して表す。

$$\{Z_{ic}\}^T = \{Z_i(\eta_1), Z_i(\eta_2), \dots, Z_i(\eta_M)\}, \quad \{Z_{ie}\}^T = \{Z_i(\eta_0), Z_i(\eta_{M+1})\} \quad (i = 1 \sim 5) \quad (17)$$

以上の準備のもとに、 $5(M+2)$ 個の未知量に対する条件は次のように得られる。 $5M$ 個の条件は、常微分方程式 (10) の内部選点における残差条件より求められる。式 (15), (17) を用いれば、

$$[\alpha_c]\{\delta_c\} + [\alpha_e]\{\delta_e\} - \Omega^2[\beta_c]\{\delta_c\} = \{0\} \quad (18)$$

ここで、添字 c と e は、それぞれ内部選点と端点に関するマトリックス、ベクトルを表す。 $[\alpha_c]$ と $[\alpha_e]$ は、式 (10) のマトリックス $[C_1] \sim [C_3]$ と式 (15) のマトリックス $[A], [B]$ の成分で構成される $5M \times 5M$, $5M \times 10$ 次のマトリックスであり、 $[\beta_c]$ は式 (10) のマトリックス $[C_4]$ の成分で表される $5M \times 5M$ 次のマトリックスである。さらに、 $\{\delta_c\}$ と $\{\delta_e\}$ は、式 (17) を用いれば次のようになる。

$$\{\delta_c\}^T = (\{U_c\}^T, \{V_c\}^T, \{W_c\}^T, \{X_c\}^T, \{Y_c\}^T), \quad \{\delta_e\}^T = (\{U_e\}^T, \{V_e\}^T, \{W_e\}^T, \{X_e\}^T, \{Y_e\}^T) \quad (19)$$

残り 10 個の条件は境界条件式 (13) より得られ、式 (18) に類似な次式となる。

$$[\gamma_c]\{\delta_c\} + [\gamma_e]\{\delta_e\} = \{0\} \quad (20)$$

ここで、 $[\gamma_c]$ と $[\gamma_e]$ はそれぞれ、 $10 \times 5M$ 次と 10×10 次のマトリックスである。

式(18),(20)より $\{\delta_e\}$ を消去すれば次の固有振動数方程式が得られる。

$$[[\alpha_e] - [\alpha_e][\gamma_e]^{-1}[\gamma_e]]\{\delta_c\} - \Omega^2[\beta_e]\{\delta_c\} = \{0\} \quad (21)$$

上式を解けば、5M個の固有値とそれに対応する内部選点における固有モード $\{\delta_c\}$ が求められる。端点における固有モードは式(20)を用いて、次式より得られる。

$$\{\delta_e\} = -[\gamma_e]^{-1}[\gamma_e]\{\delta_c\} \quad (22)$$

2) ひずみエネルギーの算定

式(9)を式(6)に代入すれば、ひずみエネルギーは次のようになる。

$$U = U^* e^{2i\omega t} \quad (23)$$

ここで、

$$U^* = \frac{ab}{4} \int_0^1 \{A_{11}(m\pi h)^2 U^2 + A_{66} U'^2 + \dots\} d\eta \quad (24)$$

著者らは、直交多項式の零点を選点に採用すれば、選点と端点を標本点(分点)とする補間型数値積分則に関係づけられ、それは次式で表されることを文献2)で示した。

$$\int_0^1 f(\eta) d\eta = \sum_{i=0}^{M+1} W_e(i) \cdot f(\eta_i) \quad (25)$$

ここで、 W_e は重みを表す。

したがって、式(25)を用いれば、式(24)の U^* は次のように求められる。

$$U^* = \frac{ab}{4} \left[(m\pi h)^2 A_{11} \sum_{i=0}^{M+1} W_e(i) U^2(\eta_i) + (m\pi h)^2 A_{66} \sum_{i=0}^{M+1} W_e(i) U'^2(\eta_i) + \dots \right] \quad (26)$$

ここで、 $U(\eta_i)$ ($i = 0 \sim M+1$) は式(21),(22)より求められる選点と端点における固有モード値であり、 $U'(\eta_i)$ ($i = 0 \sim M+1$) は、式(15)の第1式より求められる固有モード形の1次微係数である。なお、式(26)の精度については後述する。

4. 解析結果

数値計算に用いた積層数はその材料特性は特に断わりのない限り次のようなものである。

$$E_1/E_2 = 40, G_{12}/E_2 = G_{13}/E_2 = 0.6, G_{23}/E_2 = 0.5, \nu_{12} = 0.25$$

なお、せん断補正係数には $K_{44}^2 = K_{55}^2 = 5/6$ 、選点数には $M = 13$ を用いた。

1) 解析手法の精度

表-1は、積層数 $N=2$ の4辺単純支持された積層板 $a/h=100$ の高次固有振動数 Ω の精度の検討を行ったものである。これによれば、本解析法は()内に記した厳密解に良く一致している。

表-2は選点数 $M = 13$ とし、 $N = 2, 6$ の4辺単純支持板のひずみエネルギー U^* を Navier の解による厳密解と比較したものである。本算定法による値は、選点と端点を標本点とし、それに対応する関数値の有限和の形で求められたものであるが、厳密解と良く一致している。このことは、選点法により得られた固有モード形の精度も良好であることを示している。

表-1 固有振動数 Ω の比較 (4 辺単純支持)

m	$n(y$ 方向の半波数)				
	1	2	3	4	5
1	0.864	2.419	5.191	9.075	14.025
	(0.864)	(2.419)	(5.191)	(9.075)	(14.025)
2	2.419	3.447	5.873	9.591	14.154
	(2.419)	(3.447)	(5.873)	(9.591)	(14.154)
3	5.191	5.873	7.721	10.094	15.547
	(5.191)	(5.873)	(7.721)	(10.094)	(15.547)
4	9.075	9.591	10.978	13.643	17.696
	(9.075)	(9.591)	(10.978)	(13.643)	(17.696)
5	14.025	14.454	15.547	17.696	21.153
	(14.025)	(14.454)	(15.547)	(17.696)	(21.153)

() 厳密解

2) 弾性係数比 E_1/E_2 と板厚比 a/h の基本固有振動数に及ぼす影響

図-2 は、積層数 $N = 2$ 板厚比 a/h の基本固有振動数 Ω に及ぼす影響を a/h の場合についてみたものである。図-3 は、積層数 $N = 2$ 、弾性係数比 E_1/E_2 の基本固有振動数に与える影響を板厚比 $a/h = 10$ の場合についてみたものである。

これらの図より、パラメータ E_1/E_2 と a/h に対する固有振動数の変化率は、各パラメータ

の値が小さい領域で著しいことがわかる。さらに、境界条件の固有振動数に与える影響は Timoshenko 梁や Mindlin 板の固有振動数特性から予想されるように、固定辺を含む境界条件で顕著である。これは主にせん断変形の影響によるものである。

3) ひずみエネルギー

図-4 は積層数 $N=2$ および $N=6$ における全ひずみエネルギー U^* を示したものである。

図-5 は、全ひずみエネルギー U^* を剛性 A_{ij} と D_{ij} に関係するひずみエネルギー U_{AD}^* とカップリング剛性 B_{ij} に関係するひずみエネルギー U_B^* に分け、その比 U_B^*/U_{AD}^* をプロットしたものである。 a/b に対する U_B^*/U_{AD}^* は積層数によらず減少している。 E_1/E_2 に対する U_B^*/U_{AD}^* は 2 層の場合は E_1/E_2 の値が 15 程度で増加するがその後はあまり変化がない。6 層の場合はほとんど変化がないことがわかる。このように積層数 N が大きければ、カップリング剛性に関するエネルギー項の寄与が少なくなることが理解できる。

5. まとめ

本研究は、相対する 2 辺が単純支持された逆対称クロス・プライ積層板の自由振動解析を行ったもので次のように要約される。

- [1] 自由振動解析には選点法を用い、その有用性を示した。さらに選点におけるモード値を関数値とする補間型積分則を用いれば、固有振動性状の理解に役立つひずみエネルギーも精度よく評価できることが示せた。
- [2] カップリング剛性の固有振動数に与える影響は積層数の増加とともに弱くなる。このことは、全ひずみエネルギーにおけるカップリング剛性の寄与するエネルギー項の数値的变化からも確認できる。
- [3] 境界条件の相違の固有振動数に与える影響は、Timoshenko 梁や Mindlin 板と同様に固定条件を含む場合に著しい。

最後に、本研究は平成 2 年度科学研究補助金（一般研究 (c)）によるものの一部であることを付記し、関係各位に謝意を表します。

表-2 ひずみエネルギー $4U^*/E_2h^3$ の比較（4 辺単純支持）

a/b	$N = 2$		$N = 6$	
	本算定式	厳密解	本算定式	厳密解
0.5	0.1390	0.1390	0.3195	0.3195
1.0	0.1401	0.1401	0.3032	0.3032
1.5	0.2452	0.2452	0.4821	0.4821
2.0	0.4245	0.4245	0.7431	0.7431
2.5	0.6592	0.6592	1.0387	1.0387
3.0	0.9315	0.9315	1.3467	1.3467
3.5	1.2270	1.2270	1.6576	1.6576
4.0	1.5357	1.5357	1.9676	1.9676

参考文献

- 1) Yang,P.C., Norris, C.H. and Stavsky,T. : Elastic wave propagation in heterogeneous plates, Int.J.Solids Struct., Vol.2,p.665,1965.
- 2) 三上隆・芳村仁：選点法による回転殻の固有振動数の解析、土木学会論文報告集、第 335 号, p.69,1983.
- 3) Robert M.Jones : Buckling and Vibration of Unsymmertrically Laminated Cross-Ply Rectangular Plates, AIAA, Vol.11.p.1626.

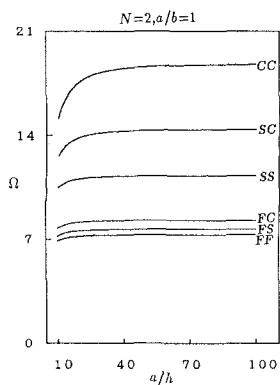


図-2 板厚比 a/h の固有振動数 Ω に及ぼす影響

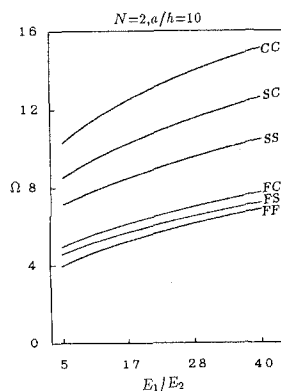


図-3 弾性係数比 E_1/E_2 の固有振動数 Ω に及ぼす影響

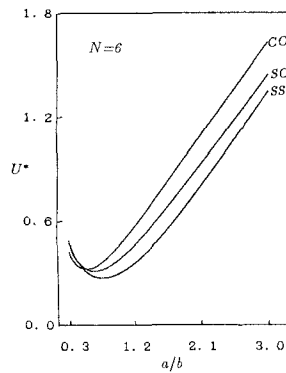
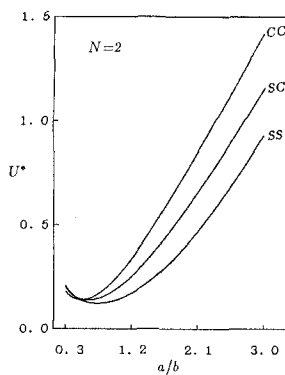


図-4 全ひずみエネルギーの変化

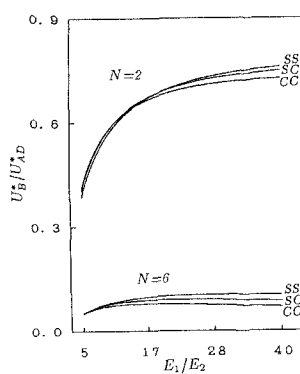
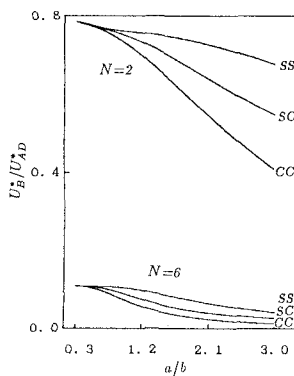


図-5 ひずみエネルギーに及ぼすカップリング剛性の影響