

I - 18

多目的計画法の構造設計への応用に関する基礎的研究

室蘭工業大学大学院	学生員	亀廻井 寿 明
室蘭工業大学	正 員	杉 本 博 之
甲南大学理学部		中 山 弘 隆

1. 研究目的

一般に我々の取り扱う構造最適設計問題の多くは、最小化（または最大化）したい目的関数の数は1つとは限らず、目的関数を複数有しているというのが一般的である。例えばあるトラス構造物の最適設計を考えてみると、そこには全重量を最小、荷重載荷点などの変位を最小、部材応力を許容応力度以内にしたい、さらには形状最適化を考える場合においてもできるだけ目標形状に近づけたい¹⁾などの目的が生じてくる。通常今までの構造最適設計の問題においては、複数の目的がある場合にはこれらのうち1つのみを目的関数として取り上げ、残りの目的に関しては拘束条件として制約条件に含めて1目的最適化問題として最適解を求めるというのが一般的であった。しかし実際にはこれらは多目的最適化問題として取り扱うほうが現実的かつ自然であると考えられる。

ここで多目的最適化問題においては、同時に複数の目的を最小にすることは不可能であり、ある目的関数を小さくすれば、他の目的関数はある程度犠牲にしなければならないといういわゆるトレードオフの現象が生じる。そこで設計者は、ある目的をできるだけ目標値に近づけるためには他の目的をどのくらい犠牲にしなければならないかという点に関して検討しなければならない。一般にこのことをトレードオフ分析という。多目的計画法において、このトレードオフ分析を有効に行うための手法として満足化トレードオフ法²⁾が提案されている。この満足化トレードオフ法においては、それぞれの目的関数に対して満足のいく値が得られる迄、対話的にトレードオフ分析を繰り返す。ところで一般に我々の取り扱う構造最適設計の問題においては、設計変数の数もかなり多く、目的関数、制約条件式とも高次の非線形性を有している場合が多い。したがって構造解析に要する時間もかなり多くなる。よって満足化トレードオフ法を構造設計に応用する場合、できるだけトレードオフの回数を少なくさせる必要があると考えられる。

本研究は上記の要求を踏まえ、多目的計画法を構造最適設計に応用する場合に、できるだけ設計の効率を上げるために満足化トレードオフ法を一部改良し、さらにこれを既存の汎用最適化プログラムADS³⁾を利用する1目的の数値最適設計支援システム^{4) 5)}に取り入れることにより、構造最適設計において、より汎用的かつ幅の広い設計を行うためのシステムの構築を目的としている。

2. パレート解とトレードオフ分析

まず、多目的計画問題 (multi-objective problem) は一般に次のように定義される。

$$\text{目的関数} : F(\mathbf{X}) = \{f_1(\mathbf{X}), f_2(\mathbf{X}), \dots, f_l(\mathbf{X})\} \rightarrow \min \quad (1)$$

$$\text{制約条件} : g_j(\mathbf{X}) \leq 0 \quad (j = 1 \sim m) \quad (2)$$

$$\text{設計変数} : \mathbf{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \quad (3)$$

先にも述べたが、多目的最適化問題においては同時にすべての目的関数を最小化するような解は一般的に存在しない。簡単な例で示すために図-1に架空の2目的問題の場合について、設計変数の上下限値の範囲

内で、なおかつ式(2)の制約条件を満たすすべての組み合わせについての設計空間を、 f_1 - f_2 平面に写像して得られた目的関数の集合を示した。この図の細線、太線で囲まれた部分が、2つの目的関数空間の実行可能集合である。また太線部は1つの目的を改善するためには、必ずもう一方の目的を犠牲にしなければならないというギリギリのラインで、これをパレート解⁹⁾(Pareto solution)という。多目的最適化問題においては、パレート解上でトレードオフ分析を繰り返しながら、いかに設計を吟味していくかが設計者にとっての大きな問題となる。

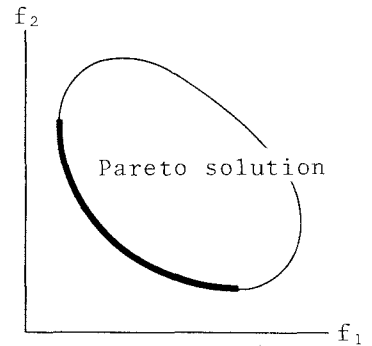


図-1 パレート解

3. 満足化トレードオフ法の改良について

適当なパレート解を導くための手法はいくつか発表されているが、本研究ではその中でも特に有効であると思われる満足化トレードオフ法に着目して、これにいくつかの改良を加えて、より構造設計に適した形にすることを試みた。以下に満足化トレードオフ法とその改良部分について説明する。

(1) 満足化トレードオフ法

まず従来の満足化トレードオフ法であるが、これは人間とコンピューターが一体となった、いわばマン・コンピューターシステムである。複数の目的を同時に最小化する解が存在しない以上、設計者は本人の価値規準に応じた設計を行わなければならない。つまり、ある目的はこれくらいあれば満足できるとか、ある目的はこの位なら犠牲にできるなどということは最終的には人間の価値規準に委ねられるところが大きい。満足化トレードオフ法はこの点に関して、人間の価値規準を最大限生かすことのできる手法である。次にこの手法の具体的な理論について説明する。

満足化トレードオフ法においては、式(1)～(3)の多目的最適化問題のパレート解を求めるために次に示すような1目的の補助的スカラー化問題が解かれる。

$$\text{目的関数} : Z \rightarrow \min \quad (4)$$

$$\text{制約条件} : w_1 (f_1(\mathbb{X}) - f_1^*) \leq Z \quad (i = 1 \sim r) \quad (5)$$

$$g_j(\mathbb{X}) \leq 0 \quad (j = 1 \sim m) \quad (6)$$

$$\text{設計変数} : \mathbb{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \quad (7)$$

$$\text{ただし} \quad w_1 = \frac{1}{\hat{f}_1 - f_1^*} \quad (i = 1 \sim r) \quad (8)$$

ここで式(5)中の w_1 は目的関数 $f_1(\mathbb{X})$ の重みを表し、式(8)のように表される。 $\hat{f}_1$ は希求水準(aspiration level)と呼ばれ目的関数 $f_1(\mathbb{X})$ についてはこの程度の値であれば満足できるという目標値を示している。 f_1^* は理想点(ideal point)と呼ばれるもので、これはその目的関数に対して十分小さな最も理想的な値として与えられる。満足化トレードオフ法は理想点(あるいは希求水準)に最も近いパレート解を見つけるために、理想点との距離として次式で示すチェビシェフ距離⁹⁾を用い、これを最小化しているものである。

$$Z = \max_{1 \leq i \leq r} w_i |f_i(\mathbb{X}) - f_i^*| \quad (9)$$

これを2目的の場合について示したものが図-2である。Aは希求水準、Iは理想点を示している。解はA点よりI-A直線上に探索され、パレート解との交点Oが最適解となる。

(2) 改良型満足化トレードオフ法

改良型満足化トレードオフ法の補助的スカラー化問題は以下のように定式化される。

$$\text{目的関数} : Z \rightarrow \min \quad (10)$$

$$\text{制約条件} : w_1 (f_1(\mathbb{X}) - \hat{f}_1) - (1 - \xi_1) Z \leq 0 \quad (i = 1 \sim r) \quad (11)$$

$$g_j(\mathbb{X}) \leq 0 \quad (j = 1 \sim m) \quad (12)$$

$$\text{設計変数} : \mathbb{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \quad (13)$$

$$\text{ただし} \quad w_i = \frac{1}{f_{1*} - f_{1*}^*} \quad (i = 1 \sim r) \quad (14)$$

ここで従来の満足化トレードオフ法と大きく違うのは新たに f_{1*} 、 ξ_1 というパラメーターが追加されたことである。 f_{1*} は最悪点 (nadir point) と呼ばれ、今後解を探索する領域での目的関数 $f_1(\mathbb{X})$ の最悪の値 (最も大きい値) を意味している。 ξ_1 は満足度パラメーターと呼ばれ、 $0 \leq \xi_1 \leq 1$ の値をとる。この ξ_1 を説明するために図-3 に 2 目的の場合について改良型満足化トレードオフ法の関係を示した。図中の N 点が新たに設けられた nadir point である。まず $\xi_1 = \xi_2 = 0.0$ の時、解は A 点より I-N 線に平行に解を探索し、パレート解曲線との交点 O が最適解となる。 $\xi_1 = 1.0$ 、 $\xi_2 = 0.0$ であれば、式 (11) において、目的関数 $f_1(\mathbb{X})$ が変換された制約条件式は $f_1(\mathbb{X})$ が希求水準 $\hat{f}_1$ 以下であるという一般的な制約条件式に置き換えられる。従って、解は図-3 において A 点より $\hat{f}_1$ を満たす方向、つまり f_2 軸に水平な方向に探索される。つまり $\xi_1 = 1$ で目的関数 $f_1(\mathbb{X})$ の希求水準 $\hat{f}_1$ に対する達成度は 100% となる。また ξ_1 を 0~1 の間で調整させることにより解の探索方向を自由に変えることができる。もし ξ_1 が ξ_2 より大きい値であれば希求水準 $\hat{f}_1$ にウエイトを置いた設計 (図-3、P 点) となり、逆に ξ_2 が ξ_1 より大きい値であれば $\hat{f}_2$ にウエイトを置いた設計 (図-3、Q 点) となる。これでわかるように、 ξ_i は目的関数 $f_i(\mathbb{X})$ の達成度を調節するためのパラメーターである。ただし図からも明らかのように、すべての目的関数に対して ξ_i を 1 またはそれに近い値に設定することは現実的に不可能であるし意味がない。したがって設計者はあらかじめ希求水準に対してウエイトを置きたい目的関数とある程度犠牲にしてもよいと思う目的関数を設定してそれぞれに対する満足度パラメーターを考慮する必要がある。結局 ξ_i を与えるということは、1 回の計算の結果を検討する前に初期の段階でトレードオフ分析とほぼ同じ操作をすることになり、これを行うことにより以後のトレードオフ分析の回数を少なくできる可能性があると考えられる。

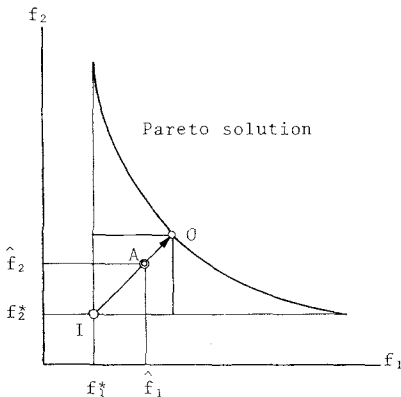


図-2 満足化トレードオフ法

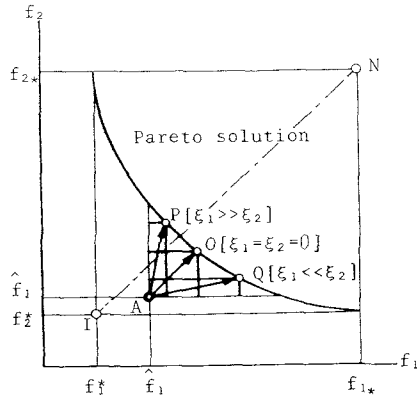


図-3 改良型満足化トレードオフ法

(3) 理想点と最悪点の設定について

改良型満足化トレードオフ法において、設計者は理想点、最悪点を設定しなければならない。理想点、最悪点はそれぞれ設計者が、最も理想的である、最も最悪であると思う値を任意に与えても構わないが、一般にこの 2 点を与えるには表-1 に示すような pay-off table を用いることがある。ここで、 x_{1*} は目的関数 $f_1(\mathbb{X})$ を単一に最小化させる設計変数ベクトルである。したがって、pay-off table の対角項の値である

$\{f_1(x_1^*), f_2(x_2^*), \dots, f_1(x_1^*)\}$ が理想点として与えられる。また目的関数 $f_1(x)$ の最悪点は $\{f_1(x_1^*), f_1(x_2^*), \dots, f_1(x_1^*)\}$ の中の最大値をとればよい。ここで pay-off table を求めることは理論的には可能であるが、構造最適設計問題の多くは単一目的関数として最小化を行うだけでもかなりの時間を要し、多くの目的関数を有する場合それぞれについて最小化を行うと、それに対してだけでも膨大な時間が費やされる。我々の目的はあくまでもパレート解上の設計をいかに行うかということであり、理想点、最悪点の設定に膨大な時間を要することは設計の能率をかなり悪くすることにつながる。したがって、いかにこの2点を与えるかが大きな課題であるが、現在のところは設計者の経験に負うところが大きいと考えられる。また(2)節からも明らかなように理想点、最悪点の与え方により求まるパレート解も大きく変わるので、今後この2点の設定がトレードオフの効率におよぼす影響について、何らかの検討を加える必要があると考えられる。

表-1 pay-off table

	f_1	f_2	$\dots$	f_1
f_1	$f_1(x_1^*)$	$f_2(x_1^*)$	$\dots$	$f_1(x_1^*)$
f_2	$f_1(x_2^*)$	$f_2(x_2^*)$	$\dots$	$f_1(x_2^*)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
f_1	$f_1(x_1^*)$	$f_2(x_1^*)$	$\dots$	$f_1(x_1^*)$

(4) トレードオフ分析におけるラグランジュ乗数の利用

設計者は補助的スカラー化問題を解いて得られた解に対するそれぞれの目的関数の値を検討し、ある目的に対してまだ改善の余地があると判断した場合にはトレードオフ分析を行う。このトレードオフ分析はある目的に対する改善量を達成させるためには、他の目的の緩和量をどれくらい以上にしなければならないかという検討を行うものである。しかし一般にはパレート解曲面自体ははっきりとはわからず、改善量に対する緩和量はわからないというのが現状である。無駄にトレードオフの回数を増やす危険性を避けるためにも、要求された改善量を実現させるだけの他の目的の緩和量の目安が与えられたほうがよい。そこでこの目安としてラグランジュ乗数を利用した1次近似による方法を説明する。まず、式(10)、(11)に関するラグランジュ関数は次のように定義される。

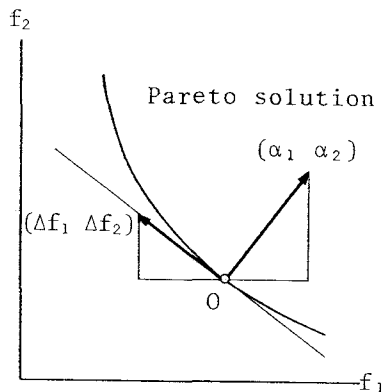


図-4 トレードオフと感度

$$L(x, Z; \lambda) = Z + \sum_{i=1}^r \lambda_i \{w_i (f_i(x) - f_i) - (1 - \xi_i) Z\} \quad (15)$$

これを x で偏微分して Kuhn-Tucker 条件を求めると式(16)、(17)のようになる。

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i (1 - \xi_i) = 1 \quad \lambda_i \geq 0 \quad (16)$$

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i w_i \nabla f_i(x) = 0 \quad (17)$$

ここで(17)式を $f_1(x)$ の変動量 Δf_1 で近似すると式(18)、(19)のようになる。

$$\alpha_1 \Delta f_1 + \alpha_2 \Delta f_2 + \dots + \alpha_1 \Delta f_1 = 0 \quad (\alpha_1 = \lambda_1 w_1) \quad (18)$$

$$\{\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_1\} \{\Delta f_1 \ \Delta f_2 \ \dots \ \Delta f_1\}^T = 0 \quad (19)$$

これを図-4を用いて2目的の場合について説明する。 $\{\Delta f_1 \ \Delta f_2\}$ はパレート解上の点Oでの接線方向ベクトルを表している。従って式(19)のベクトルの直交条件により $\{\alpha_1 \ \alpha_2\}$ は点Oでの法線方向ベクトルを表している。よって α_1 はパレート解上で $f_1(x)$ の変動量が相互に影響を及ぼす感度を示していることがわかる。例えば目的関数 $f_1(x)$ に対する改善量を Δf_1 とするとそれに対する緩和量 Δf_2 は、

$$\Delta f_2 = - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \Delta f_1 \quad (20)$$

と表せる。この式からも明らかなように α_1 が他の感度よりも大きければ、 Δf_1 を達成させるためには他の目的の緩和量をかなり大きくしなければならないということがわかる。もし3目的以上であるときは、次式のように改善量の合計を感度 α_j により比例配分して求めることも可能である。

$$\Delta f_j = - \frac{\sum \alpha_i \Delta f_i}{n \alpha_j} \quad (n: \text{緩和される目的の総数}) \quad (21)$$

これらより1次近似の意味で、ある目的の改善量 Δf_1 を達成するためのある目的の緩和量 Δf_j は、式(21)における $|\Delta f_j|$ 以上でなければならないことになる。

4. 計算例

ここでは改良型満足化トレードオフ法における多目的最適設計を簡単な2部材トラスを例にとり説明する。図-5に示すような2部材トラスを考える。ここで、

$$\text{目的関数} : f_1 = \frac{2 d A \gamma}{\sin \theta} \quad \cdots \text{全重量} \quad (22)$$

$$f_2 = \frac{P d}{2 A E \sin \theta \cos^2 \theta} \quad \cdots \text{荷重載荷点の鉛直方向変位} \quad (23)$$

$$\text{制約条件} : g_1 = \frac{P}{2 A \cos \theta} - \sigma_a \leq 0 \quad \cdots \text{部材応力} \quad (24)$$

$$\text{設計変数} : \mathbf{x} = \{x_1, x_2\} = \{A, \sin \theta\} \quad (25)$$

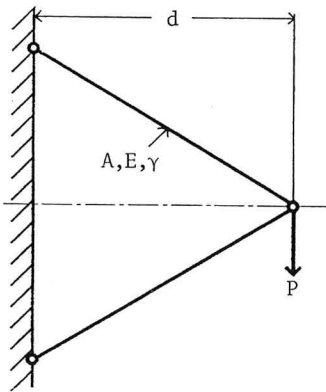


図-5 2部材トラス

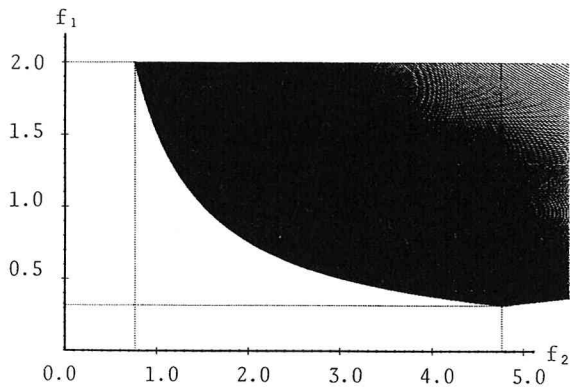


図-6 パレート解集合

各パラメーターは $d=1.0$ (m) $P=1000$ (kgf) $\gamma=8 \times 10^{-6}$ (kgf/mm³) $E=2.1 \times 10^4$ (kgf/mm²) $\sigma_a=50$ (kgf/mm²) とする。また設計変数の上下限値は、 $0 \leq \sin \theta \leq 1$ 、 $0.1 \leq A \leq 125$ とする。

この問題の目的としているところは図-5に示したような荷重載荷状態において、できるだけ重量を少なくかつ剛性の高い形状を決定することである。図-6に示したのが、与えられた条件を満たしている設計変数の組み合わせの点を目的関数空間へ写像した図である。表-2はこの問題のpay-off tableを示している。この問題に対して希求水準を $\hat{f}_1=0.5$ 、 $\hat{f}_2=1.5$ として満足度パラメーター ξ_1 の与え方による目的関数および設計変数の動向を調べた。その結果が図-7および表-3に示してある。なお補助的スカラー化問題を解くにあたっては最適化手法GRGを用いた。まず図-7を見ると ξ_1 の与え方による解の探索方向の違いの差がよくわかる。また表-3の数値結果を見ると設計変数 $\sin \theta$ はほぼ0.7付近である。これはこの2部材トラス構造においては最小重量および最大剛性に対しても $\theta=45^\circ$ が望ましいということを示し

ている。また断面積の動向を見ると、剛性に対するウエイトを重くすればそれだけ断面積が大きくなるということがわかる。これらの結果より、初期の段階で目的関数に ξ_1 を与えることにより、ある程度設計者の要求に近い設計を行うことが可能であるということがいえる。

表-2 2部材トラスのpay-off table

	f_1	f_2
f_1	0.320	2.000
f_2	4.762	0.762

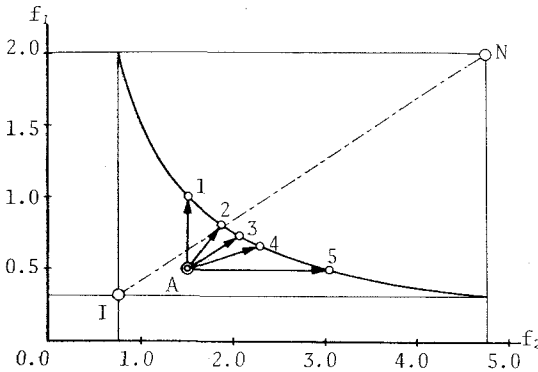


図-7 ξ_1 によるパレート解の遷移

表-3 数値結果

	ξ_1	ξ_2	f_1	f_2	A	$\sin\theta$
1	0.0	1.0	1.006	1.516	44.17	0.703
2	0.5	1.0	0.810	1.882	35.65	0.704
3	1.0	1.0	0.736	2.074	33.10	0.720
4	1.0	0.5	0.664	2.296	29.36	0.708
5	1.0	0.0	0.500	3.048	21.85	0.699

5. 結論

本研究は多目的計画法を構造最適設計に応用するために、満足化トレードオフ法を一部改良し、より構造設計に適した形にして、その効果について簡単な例題を用いて検討を行った。以下に本研究により得られた結論を箇条書きにする。

- (1) 我々の取り扱う構造最適設計の問題においては複数の目的を有しているのが一般的であり、これらは多目的最適化問題として取り扱ったほうが現実的かつ自然である。
- (2) 多目的計画問題を解く有効な手法として満足化トレードオフ法が提案されているが、満足化トレードオフ法において多目的最適化問題は補助的スカラー化問題に変換することにより結局1目的の最適化問題となる。従って既存の数値最適設計支援システムの利用が可能となる。
- (3) 満足化トレードオフ法の改良で、目的関数にあらかじめ満足度パラメーター ξ_1 を与えることにより目的関数を制約条件に置き換えたり、またそれぞれの目的に対して1回の計算である程度設計者の要求に近い設計を行えるようになった。これによりトレードオフの回数を減少させることが可能である。
- (4) 既存の数値最適設計支援システムに改良型満足化トレードオフ法の概念を取り入れることにより、システムの汎用性が増した。

参考文献

- 1) Fumio Nishino; DESIGN ANALYSIS CABLE NETWORKS, ASCE, Journal of Structural Engineering, Vol.115 No.12, December, 1989.
- 2) 中山弘隆; 多目的計画に対する満足化トレードオフ法の提案, 計測自動制御学会論文集, Vol.20, pp.29-35, 1984.
- 3) Vanderplaats, G.N. and Sugimoto H.; A GENERAL-PURPOSE OPTIMIZATION PROGRAM FOR ENGINEERING DESIGN, Computers and Structures, Vol.24, No.1, pp.13-21, 1986.
- 4) 杉本博之・山村和人; 対話形式による数値最適設計の前処理および後処理について, システム最適化に関するシンポジウム論文集, pp.123-130, 1988, 10.
- 5) 亀廻井寿明・杉本博之・山村和人; 対話形式による数値最適設計支援システムの開発について, 土木学会第45回年次学術講演会論文集(Ⅰ), 第46号, pp.402-403, 1990.
- 6) 田村坦之編; 大規模システム -モデリング・制御・意志決定-, (株)昭晃堂.