

I - 17

MMAによる構造最適設計に関する基礎的研究

室蘭工業大学	正 員	杉 本 博 之
室蘭工業大学	学生員	大 塚 敏 正
室蘭工業大学		ルビアン リー 鹿 汴 麗

1. まえがき

構造最適設計における双対法^{1) 2)}の成功は、双対定理を容易に応用できる関数に近似したこと、そこで用いた逆変数に関する線形近似式の、原関数に対する近似度が高いことによると考えられる。しかし、この双対法で用いられる近似関数は、その凸性が保証されておらず、また、副問題の不連続性も指摘され、利用の範囲は、部材の断面寸法に関する設計変数を扱う場合に限定されとも考えられる。この双対法の欠点を改良し、より一般的な問題への応用を可能にしたのが新双対法³⁾である⁴⁾。

最適設計においては、問題を構成する関数が凸であれば、最適解の唯一性が保証され、収束性も良い。上記の新双対法も、この点を改良した手法であるが、この凸性の程度をコントロールし、収束の信頼性と効率を高めたのがSvanbergのMMA (method of moving asymptotes)⁵⁾という方法である。

本論文においては、このMMAについて説明し、それに関連して双対法および新双対法の凸性について簡単に触れる。また、数値計算の結果をいくつか示し、MMAの特性、および筆者らが提案している部分2次近似法⁶⁾との比較についても説明する。

2. 構造最適化問題における原問題の定義

一般的な構造最適化問題を想定し、原問題を下記のように定義する。

$$\text{○目的関数: } f_0(X) \rightarrow \min \quad (1)$$

$$\text{○制約条件: } f_j(X) \leq 0 \quad (j=1 \sim m) \quad (2)$$

$$x_i^L \leq x_i \leq x_i^U \quad (i=1 \sim n) \quad (3)$$

$$\text{○設計変数: } X = \{x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n\}^T \quad (4)$$

ここで、 m は制約条件の数、 n は設計変数の数、 x_i^U 、 x_i^L は設計関数 x_i の上下限値を表わす。

以降の説明では、目的関数 ($j=0$) と制約条件 ($j=1 \sim m$) を、1つの式にまとめて説明する。

3. 双対法、新双対法とMMAの比較

この章では、双対法、新双対法とMMAを比較するにあたり、それぞれの副問題を挙げ、そこで利用する近似関数やそれらの2次の微係数について説明する。

(1) 双対法

双対法においては、原問題の式(1)、(2)は、次式のように逆変数 $1/x_i$ ($i=1 \sim n$) に関して線形近似される。

$$\bar{f}_j(X) = f_j(X^0) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right)^0 (x_i^0)^2 \left(\frac{1}{x_i} - \frac{1}{x_i^0} \right) \quad (j=0 \sim m) \quad (5)$$

この関数は、分離可能関数であり、また変数が部材の断面寸法に関するものである場合は、比較的精度良く原問題の応答を再現すると考えられる。 $x_i = x_i^0$ における、上式の2次の微係数は次式で表わされる。

$$\left(\frac{\partial^2 \bar{f}_j}{\partial x_i^2} \right)^0 = -2 \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right)^0 \frac{1}{x_i^0} \quad (i=1 \sim n, j=0 \sim m) \quad (6)$$

Basic Research on Structural Optimization by Method of Moving Asymptotes

By Hiroyuki SUGIMOTO, Toshimasa OHTSUKA and Lu Bianli

上式より、式(5)の2次の微係数は、1次の微係数が負の時は正(凸)になるが、正の時は負(凹)になることが分かる。これが、関数の近似度の点で不都合が生じる理由であるし、また双対定理を用いる時の問題点となっていた。この点を改良したのが新双対法である。

(2) 新双対法

新双対法は、双対法のより一般的な問題への適用が可能となるように、改良された方法である。

新双対法における式(1)、(2)の近似関数は次式で表わされる。

$$\bar{f}_j(X) = f_j(X^0) + \sum_+ \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right)^0 (x_i - x_i^0) - \sum_- \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right)^0 (x_i^0)^2 \left(\frac{1}{x_i} - \frac{1}{x_i^0} \right) \quad (i=1 \sim n, j=0 \sim m) \quad (7)$$

ここで、 $\sum_+$ 、 $\sum_-$ はそれぞれ、微係数の値が正あるいは負の項のみの級数を表す。

式(7)で与えられる近似式では、1次の微係数の符号により近似変数を選択している。この場合、1次の微係数の符号が正であれば、順変数に関する線形近似を用い、負であれば逆変数に関する線形近似を用いて、 x_i および $1/x_i$ の係数は常に正となるようになっている。この近似法により、双対法で問題になった副問題の不連続性の問題点を解決している。

$x_i = x_i^0$ における、式(7)の2次の微係数は、次のように表わされる。

$$\left(\frac{\partial^2 f_j}{\partial x_i^2} \right)^0 = \sum_+ 0 - 2 \sum_- \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right)^0 \frac{1}{x_i^0} \quad (i=1 \sim n, j=0 \sim m) \quad (8)$$

上式から、1次の微係数が正のときには、2次の微係数の値は0となることが分かる。また、1次の微係数が負のときには、2次の微係数は正であり、近似関数の凸性が保証されている。

このように、新双対法における近似関数は、必ず凸関数になっているが、近似度の悪さ、安全側過ぎる近似、あるいは逆に危険側の近似になる可能性を持っていることが指摘されていた⁷⁾。

(3) MMA

MMAにおける副問題の作成では、基本的に逆変数に関する近似により、目的関数や制約条件を分離可能な関数としている。また、副問題を解く際には新双対法と同様な方法で、近似関数の選択を行っているが、ここで利用する近似関数は、新双対法の近似関数に比べ、凸性の度合いが改良されたものである。そのような近似関数により作成された副問題は、次のようになる。

$$\bar{f}_j(X) = \gamma_j + \sum_{i=1}^n \left(\frac{p_{ji}^0}{U_i^0 - x_i} + \frac{q_{ji}^0}{x_i - L_i^0} \right) \quad (j=0 \sim m) \quad (9)$$

$$\text{上下限:} \quad \max(x_i^L, \alpha_i^0) \leq x_i \leq \min(x_i^U, \beta_i^0) \quad (i=1 \sim n) \quad (10)$$

$$\text{設計変数:} \quad X = \{x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n\}^T \quad (11)$$

ここで、 α_i^0 、 β_i^0 はムーブリミットを表わし、 γ_j および p_{ji}^0 、 q_{ji}^0 は次の式で与えられる。

$$p_{ji}^0 = \begin{cases} (U_i^0 - x_i^0)^2 \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right)^0 & \frac{\partial f_j}{\partial x_i} > 0 \\ 0 & \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \leq 0 \end{cases} \quad (i=1 \sim n, j=0 \sim m) \quad (12)$$

$$q_{ji}^0 = \begin{cases} 0 & \frac{\partial f_j}{\partial x_i} > 0 \\ -(x_i^0 - L_i^0)^2 \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right)^0 & \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \leq 0 \end{cases} \quad (i=1 \sim n, j=0 \sim m) \quad (13)$$

$$\gamma_j = f_j(X^0) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{p_{ji}^0}{U_i^0 - x_i^0} + \frac{q_{ji}^0}{x_i^0 - L_i^0} \right) \quad (j=0 \sim m) \quad (14)$$

ここで、 γ_j および p_{ji}^0 、 q_{ji}^0 は微係数が正、負それぞれで選択する近似関数の定数項である。

式中の L_i^0 、 U_i^0 は、各イテレーション毎に変化する値で、この値の設定が近似関数の凸性を改良することになる。 $x_i = x_i^0$ における、式(9)の2次の微係数は次式で表わされる。

$$\left(\frac{\partial^2 f_j}{\partial x_i^2}\right)^0 = 2 \sum_+ \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right)^0 \left(\frac{1}{U_i^0 - x_i^0}\right) - 2 \sum_- \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right)^0 \left(\frac{1}{x_i^0 - L_i^0}\right) \quad (i=1 \sim n, j=0 \sim m) \quad (15)$$

上式を見ると、 U_i^0 、 L_i^0 がそれぞれ $+\infty$ 、 $-\infty$ の場合、2次の微係数は0となり、式(9)は順変数に関する線形近似式となる。また、 U_i^0 が ∞ 、 L_i^0 が0の時、新双対法における近似関数と等しくなる。このように、MMAは双対法、新双対法を合わせ持った手法と考えられる。

また、この近似関数の凸性については、2次の微係数が常に正となることから、設計点における近似関数は、常に下に凸な挙動を示す関数となる。したがって、制約条件の近似に関しては、確実に凸な近似空間を作成することになり、また、上述のように L_i^0 、 U_i^0 の値を変化させることで、状況に応じた収束性を高めることができる。これらを次に説明する。

4. MMAによる構造最適設計

L_i^0 、 U_i^0 の計算法については、どのような方法が有効であるかは、未だ理論的に説明されていない。ここでは、Svanberg⁵⁾の方法を説明する。

この方法の基本的な戦略は、先ず収束過程が単調に推移していれば、収束を速めるために近似関数の線形性を高める。式(15)より、これは $L_i^{(k)}$ 、 $U_i^{(k)}$ を現在の設計点 $x_i^{(k)}$ から離すことを意味する。ここで上付きの(k)はk回目のイテレーションにおける値を意味する。また逆に、設計が振動しているようであれば、収束の安定性を増すために近似関数の凸性を高めるようにする、これは $L_i^{(k)}$ 、 $U_i^{(k)}$ を現在の設計に近づけることを意味する。

具体的に示すと、次のようになる。

i) $k=0$ あるいは1のとき、

$$L_i^{(k)} = x_i^{(k)} - (\max(x_i^L, \alpha_i^{(k)}) - \min(x_i^U, \beta_i^{(k)})) \quad (i=1 \sim n) \quad (16)$$

$$U_i^{(k)} = x_i^{(k)} + (\max(x_i^L, \alpha_i^{(k)}) - \min(x_i^U, \beta_i^{(k)})) \quad (i=1 \sim n) \quad (17)$$

初期条件および繰り返し回数1回目では、設定した設計変数の上下限值およびムーブリミットの大きさにより、 $L_i^{(k)}$ と $U_i^{(k)}$ は決定されることになる。しかし、 k が2回目以降は、設計変数の変化に対応する形で $L_i^{(k)}$ と $U_i^{(k)}$ は計算されることになり、問題の特性に適した方法で決められる(Fig.1)。すなわち、

($k-2$)回目と($k-1$)回目、 k 回目の設計変数の値を利用して、

ii) $k \geq 2$ のとき、

・ $x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}$ と $x_i^{(k-1)} - x_i^{(k-2)}$ の値が同じ符号のとき、

$$L_i^{(k)} = x_i^{(k)} - (x_i^{(k-1)} - L_i^{(k-1)}) / s \quad (i=1 \sim n) \quad (18)$$

$$U_i^{(k)} = x_i^{(k)} + (U_i^{(k-1)} - x_i^{(k-1)}) / s \quad (i=1 \sim n) \quad (19)$$

・ $x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}$ と $x_i^{(k-1)} - x_i^{(k-2)}$ の値が異なった符号のとき、

$$L_i^{(k)} = x_i^{(k)} - (x_i^{(k-1)} - L_i^{(k-1)}) \times s \quad (i=1 \sim n) \quad (20)$$

$$U_i^{(k)} = x_i^{(k)} + (U_i^{(k-1)} - x_i^{(k-1)}) \times s \quad (i=1 \sim n) \quad (21)$$

ここで、式中 s は0から1の値であり、設計における1つのパラメータとして与えられる。

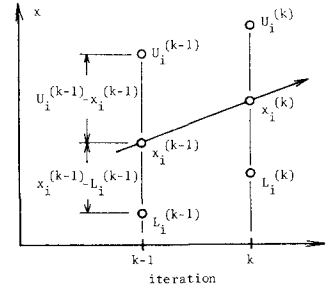


Fig.1 L_i , U_i および x_i の関係

5. 数値計算例

ここでは、トラス構造物の最小重量設計において、本論文で説明したMMA、また部分近似による方法、直接、数値計画法で解く方法により計算を行い、その結果から手法の比較を行った。

この設計では、目的関数を構造物の全容積とし、制約条件は、各部材の応力及び細長比とした。各部材の許容応力度は 1400 kgf/cm^2 、許容細長比量を120としている。

(1) パラメータ s の検討

式 (18) ～ (21) に用いられている s の値は、0 から 1 の値のものとされており、文献 5) では 0.7 が有効とされている。本研究では、最小重量設計を行う前に、Fig. 2 ～ 4 に示す 3 種類の構造物を用いて、 s の値について検討した。その結果を Fig. 5 に示す。

Fig. 5 では、 s の値を 0.3 ～ 0.9 まで変化させた場合に、同じ条件下での最小重量設計に要した繰返し回数の変化を表している。縦軸は繰返し回数であり、横軸は s の値を示している。また、○は、50 部材トラス (Fig. 2) の結果で、△は 2 部材トラス (Fig. 3) ⁵⁾ の結果、□は 25 部材トラス (Fig. 4) の結果を表している。黒塗りのマークは非許容設計への収束を意味している。この結果では各構造系で差はあるものの、 s の値が 0.7 もしくは 0.8 の時に効率の良い設計となっている。よって、以降の計算例では、 s の値を 0.7 として利用する。

(2) 近似度の検討

最小重量設計を行う前に、MMA で用いる近似関数に関して、その近似の程度についての検討を行った。この計算では、Fig. 4 に示す 25 部材トラスの部材応力について検討した。また、他の手法との比較として、順変数に関する応答近似式、逆変数に関する応答近似式、さらに、2 次近似⁷⁾ による応答近似式を用いて計算し、Fig. 6.a ～ Fig. 6.c にその結果を示した。これらは、ある節点座標値と部材応力の関係を示し、Fig. 6.a と Fig. 6.d では節点 7、10 と部材 12 (節点 3 と 7 を繋ぐ部材)、部材 10 (節点 3 と 4 を繋ぐ部材) の関係で、Fig. 6.b と Fig. 6.c では、節点 3、6 と部材 2 (節点 1 と 3 を繋ぐ部材)、部材 17 (節点 4 と 8 を繋ぐ部材) の関係である。それぞれの縦軸に部材の応力を、横軸には節点の座標値を示している。実線は厳密な値、また + は MMA、○は 2 次近似、□は順変数、△は逆変数の近似による結果を表す。これらの結果から、MMA の近似度について調べると、Fig. 6.a、Fig. 6.b のように厳密な応答が下に凸な関数となる場合は、常に下に凸な近似をする MMA は、Fig. 6.a では順変数より勝るが、逆変数より劣っており、Fig. 6.b では順、逆の両変数よりも優れていると考えられる。

一方、Fig. 6.c、Fig. 6.d のように上に凸な関数に対する近似度は、Fig. 6.c では順、逆変数より劣っており、Fig. 6.d は、逆変数より勝るが、順変数よりも劣っているのではないかと考えられる。

以上の結果から、MMA の近似度については、さらに検討が必要と考えられるが、2 次の微係数が常に正となることで、すべての結果で近似関数の挙動が下に凸な形となっている。

(3) トラス構造物の最小重量設計

ここでは、近似度の検討に用いた 25 部材トラスにおいて、最小重量設計を行った結果について説明する。この設計では、Table 2 に示す 4 ケースの初期値で計算を行い、その結果を Table 3 に示した。Table 3 で示すケースは、Table 2 のケースと対応しており、R (逆変数) や D (順変数)、second (2 次近似) の記述は、部分近似法における、幾何的な変数に関する近似変数及び近似関数を意味する。また、直接、数値計画法で解く手法として、GRG、SQP、SLP を使い、設計条件を等しくするため、1 回の設計で得られた結果を示している。Table 3 の枠中 1 行目には目的関数の値、2 行目には収束に要した繰返し回数、3 行目には制約条件のうちの最大の値、4 行目には解析に要した CPU 時間を示してある。

MMA の結果では、制約条件の満足しない設計はケース 3 のみであり、部分近似の逆変数、順変数の結果に比べ優れているが、2 次近似の結果と比べると、2 次近似の方が CPU 時間や繰返し回数が少なく、収束の信頼性も高い。また、GRG、SQP、SLP と比べると、それらの目的関数は、MMA の結果に比べ大きく、最適解が得られていないと考えられることから、繰返し回数や CPU 時間の比較は困難である。

Fig. 7、Table 4 は、Fig. 3 の 2 部材トラスにおける近似度、およびその設計結果を示している。

Fig. 7 では、部材 1 の応力と節点 1、2 の X 座標値の関係であり、この場合、厳密な挙動の線形性が高いため、順変数 (□) に関する近似式が優れている。

Table 4 は、SLP、新双対法、MMA、および 2 次近似法⁶⁾ による結果をまとめたものである。各イテ

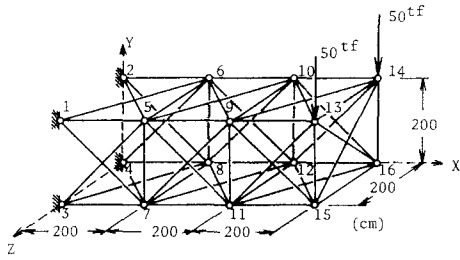


Fig. 2 50部材トラス

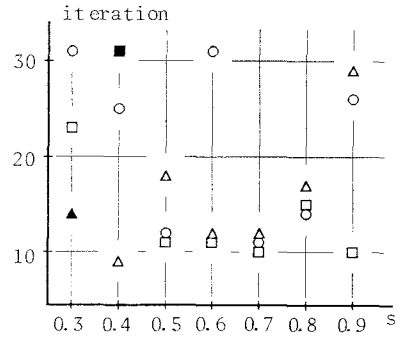


Fig. 5 s-iteration

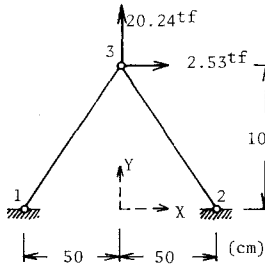


Fig. 3 2部材トラス

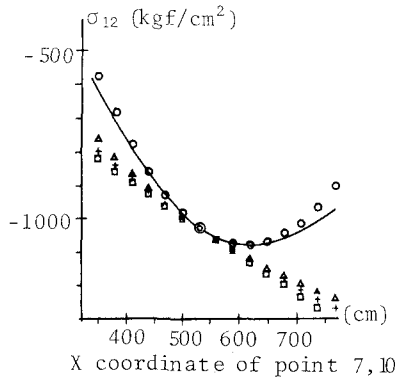


Fig. 6.a $\sigma_{12} - X_{7,10}$

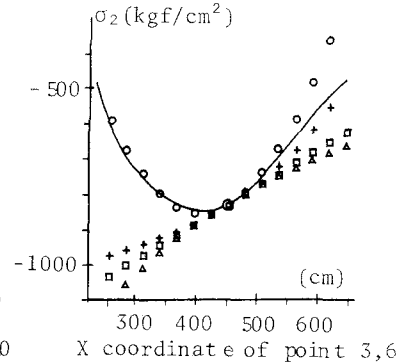


Fig. 6.b $\sigma_2 - X_{3,6}$

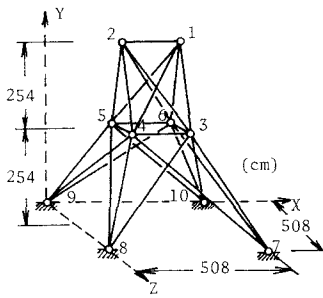


Fig. 4 25部材トラス

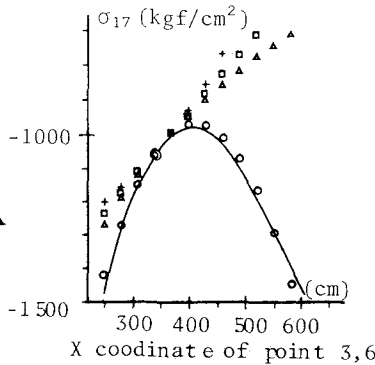


Fig. 6.c $\sigma_{17} - X_{3,6}$

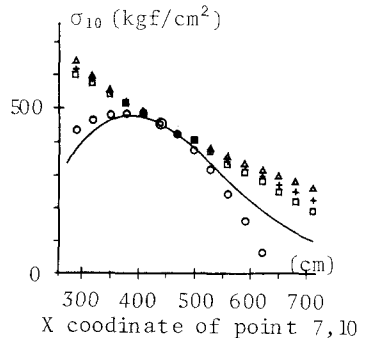


Fig. 6.d $\sigma_{10} - X_{7,10}$

Table 1 25部材トラスの荷重条件

nodal point	Load condition 1			Load condition 2		
	Px	Py	Pz	Px	Py	Pz
1	-22.7	-22.7	90.6	-4.53	-22.7	45.3
2	0	-22.7	-90.6	0	-22.7	45.3
3	0	0	0	-2.27	0	0
4	0	0	0	-2.27	0	0

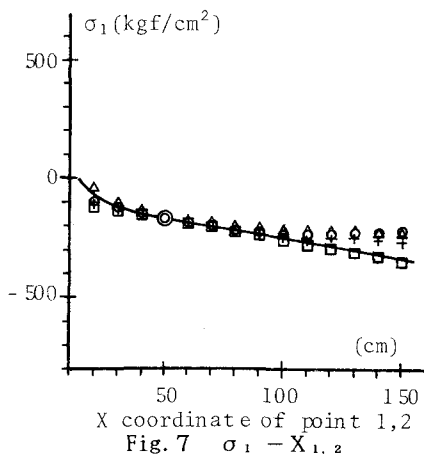
(tf)

Table 2 25部材トラスの初期条件

design varbles, case	(1)	(2)	(3)	(4)
nodal point and direction (cm)	3,4,5,6-X	10	10	50
	3,4,5,6-Z	10	10	50
	7,8,9,10-X	30	30	50
sectional area (cm²)	50	100	50	100

Table 3 25部材トラスの結果

case	partial approximation			GRG	SQP	SLP	MMA
	R	D	second				
1	1280988	1232275	232661	242000	281496	318331	229031
	17	24	5	40	5	10	10
	134	144	0.02	0.07	1.46	0.04	0.31
2	1119867	1044039	229977	245089	283224	344056	229100
	10	13	7	40	10	8	7
	152	300	0.37	0.01	1.14	0.00	0.21
3	1108673	229308	229525	271878	253893	267658	1132648
	7	11	9	13	9	6	15
	101	0.37	0.00	0.12	4.64	0.02	136
4	244902	1293564	238663	270393	309111	272753	229005
	7	16	6	24	5	13	9
	-0.01	161	0.13	0.03	0.13	0.00	0.41



レーションにおける設計変数の値、許容応力度に対する部材1の応力の割合および目的関数の値が示されている。参考文献が付いていない結果は、筆者ら自身による結果である。この例は、文献5)においてMMAが優れていることの証明に用いられている例の一つで

る。Fig. 7に示すように応答が単純であるので、必ずしも良い例とは言えないが、文献に記述されているように新双対法よりは良い結果を示している。ここでも、2次近似の方が勝っているのは注目される。

6. あとがき

新しい構造最適設計法として提案されたMMAについて、双対定理を応用する同様な手法である双対法や新双対法との比較により手法の検討をした。

MMAの副問題の作成で利用する近似関数は、確実に凸な近似空間を作成し、また、収束の過程でその凸性をコントロールできるところから優れているものと考えられる。いくつかの数値計算の結果から判断すると、構造の応答の近似度という点では必ずしも十分ではないが、最適化の過程に利用した結果では、新双対法より優れており、利用価値の高い方法と考えられる。

しかし、筆者らの2次近似法と比較すると、必ずしもその優位性が明確でなく、近似度の比較と共に、今後更に検討を加えていきたいと考えている。

Table 4 2部材トラスの結果

ite.		SLP ⁵⁾	SLP	new dual ⁶⁾	new dual	MMA ⁵⁾	MMA	second
0	x ₁	1.500	1.500	1.500	1.500	1.500	1.500	1.500
	x ₂	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500
	σ ₁	0.992	0.992	0.992	0.992	0.992	0.992	0.992
	σ ₂	1.68	1.68	1.68	1.68	1.68	1.68	1.68
	w	1.68	1.68	1.68	1.68	1.68	1.68	1.68
1	x ₁	1.38	1.37	1.39	1.38	1.39	1.37	1.42
	x ₂	0.25	0.40	0.25	0.38	0.25	0.25	0.33
	σ ₁	1.11	1.01	1.04	1.06	1.10	1.10	1.09
	σ ₂	1.42	1.48	1.43	1.44	1.43	1.42	1.50
	w	1.27	1.50	1.49	1.50	1.44	1.40	1.48
2	x ₁	1.14	1.43	1.33	1.39	1.22	1.28	1.32
	x ₂	0.50	0.32	0.50	0.40	0.50	0.50	0.46
	σ ₁	1.01	1.01	1.04	1.01	1.13	1.10	1.09
	σ ₂	1.27	1.48	1.43	1.49	1.37	1.40	1.48
	w	1.38	1.49	1.43	1.50	1.44	1.42	1.51
3	x ₁	1.34	1.39	1.39	1.42	1.39	1.37	1.40
	x ₂	0.25	0.38	0.25	0.34	0.25	0.25	0.42
	σ ₁	1.14	1.01	1.11	1.01	1.10	1.12	1.00
	σ ₂	1.38	1.49	1.43	1.50	1.44	1.42	1.51
	w	1.38	1.49	1.43	1.50	1.44	1.42	1.51
4	x ₁	1.16	1.44	1.33	1.39	1.37	1.38	
	x ₂	0.50	0.31	0.50	0.40	0.38	0.38	
	σ ₁	1.21	1.01	1.04	1.01	1.03	1.02	
	σ ₂	1.28	1.51	1.49	1.50	1.47	1.47	
	w	1.34	1.43	1.39	1.42	1.41	1.41	
5	x ₁	1.34	1.43	1.39	1.42	1.41	1.41	
	x ₂	0.25	0.34	0.25	0.36	0.38	0.47	
	σ ₁	1.14	1.00	1.11	1.00	1.00	1.00	
	σ ₂	1.38	1.51	1.43	1.51	1.51	1.51	
	w	1.38	1.51	1.43	1.51	1.51	1.51	
6	x ₁	1.15	1.41	1.33	1.41			
	x ₂	0.50	0.30	0.50	0.40			
	σ ₁	1.21	1.01	1.04	1.01			
	σ ₂	1.28	1.50	1.49	1.50			
	w	1.34	1.41	1.39	1.40			
7	x ₁	1.34	1.41	1.39	1.40			
	x ₂	0.25	0.37	0.25	0.39			
	σ ₁	1.14	1.00	1.13	1.00			
	σ ₂	1.38	1.43	1.43	1.50			
	w	1.38	1.43	1.43	1.50			
8	x ₁		1.41		1.41			
	x ₂		0.37		0.38			
	σ ₁		1.00		1.00			
	σ ₂		1.51		1.51			
	w		1.51		1.51			
9	x ₁		0.37		0.38			
	x ₂		1.00		1.00			
	σ ₁		1.00		1.00			
	σ ₂		1.51		1.51			
	w		1.51		1.51			
10	x ₁				1.41			
	x ₂				0.38			
	σ ₁				1.00			
	σ ₂				1.51			
	w				1.51			

参考文献

- 1) Schmit, L.A. & Fleury, C. : Structural Synthesis by Combining Approximation Concepts and Dual Methods, AIAA J., Vol.18, No.10, pp.1252-1260, 1980.
- 2) Fleury, C. & Schmit, L.A. : Primal and Dual Methods in Structural Optimization, J. of the Structural Division, ASCE, Vol.106, No.ST5, pp.1117-1133, 1980.
- 3) Fleury, C. & V. Braibant: Structural Optimization: A New Dual Method Using Mixed Variables, Int. J. Numer. Methods in Eng., Vol.23, pp.409-428, 1986.
- 4) 杉本博之: 双対法・新双対法と近似法について, 土木学会北海道支部論文報告集, 第46号, pp.23-28, 1990.
- 5) Svanberg, K. : METHOD OF MOVING ASYMPTOTES - A NEW METHOD FOR STRUCTURAL OPTIMIZATION, Int. J. Numer. Methods in Eng., Vol.24, pp.359-373, 1987.
- 6) 杉本博之、大塚敏正: 2次近似を用いるトラス構造物の形状最適化, 構造工学論文集, Vol.37A, 1991 (掲載予定).
- 7) Fleury, C. : EFFICIENT APPROXIMATION CONCEPTS USING SECOND ORDER INFORMATION, Proc. AIAA/ASME/ASCE/AHS 30th Structures, SDM Conf., Mobile, Alabama, pp.1685-1695, 1989.