

室蘭工業大学 学生員 大塚 敏 正
室蘭工業大学 正 員 杉 本 博 之

1. まえがき

「近似の概念」¹⁾を応用する構造最適設計法では、最適化の過程で必要な構造解析を、近似式の計算で替えて最適化を進めることになる。そのため、設計の過程で必要となる構造解析の回数が少なくてすむことから、効率の良い手法とされている。

このような手法には、双対法^{2) 3)}や新双対法⁴⁾、MMA⁵⁾等があり、各種の手法で研究がなされている。

近似の概念を応用する手法では、何らかの近似式を用いて作成される副問題は、原問題とほぼ等価であることが前提とされている。もし、その前提に反する場合には、設計の効率向上に悪い影響を与えることは明らかである。すなわち、設計の効率は、利用する近似式の有効性に左右されるため、設計問題に対して、近似度の高い近似式が要求される。そこで、このような手法により設計を行なう場合、利用しようとする近似式と原問題の関係について、あらかじめ検討する必要がある。

現在では、トラス構造物の設計において、部材断面積を設計変数とした構造最適化問題に有効な応答近似関数が報告されており^{6) 7)}、それらの近似関数を、近似の概念を応用した構造最適設計法の1つである「部分近似法」⁸⁾による最適設計に利用して、良好な結果が得られている⁹⁾。

本研究では、幾何的な変数を扱う構造最適化問題で、有効となる応答近似式の検討を行ってきた。これまでトラス構造物を用い、幾何的な変数に関する応答の一次近似式について、厳密な応答との比較や数値計算により優劣を判断してきた¹⁰⁾。その中で、複雑な構造特性を有する応答に対して、近似の程度が非常に悪く、一次の微係数のみを用いる近似法の限界が明らかになった。そこで幾何変数に関する応答近似式に、ヘッセ行列の対角項のみを考慮する二次近似関数の利用を提案し、その有効性について検討を行った¹¹⁾。

本報告は、このような二次近似関数を利用する上で、ヘッセ行列の対角項以外の項が近似の程度に与える影響について、2つの変数を同時に変化させた場合の、厳密な応答との比較により説明するものである。また、実際の設計例として、幾何的な変数を扱うトラス構造物の最小重量設計を部分近似法で行ない、そこで得られた結果から、二次近似関数を用いた応答近似式の有効性について検討を加える。

なお、得られた結果は、一般の骨組構造物や、連続体の形状最適化のための参考になると考えられる。

2. 部分近似法によるトラス構造物の形状最適化問題

本研究のトラス構造物の形状最適化の原問題は、次のように定義される。

$$\text{○目的関数: } O(X, Y) = \sum_{i=1}^n L_i(Y) x_i \rightarrow \min \quad (1)$$

○制約条件:

$$\cdot \text{応力 } g^{s_{ik}}(X, Y) = \sigma_{ik}(X, Y) - \sigma_{ai}(x_i, \ell_i) \leq 0 \quad (i=1 \sim NM, k=1 \sim NL) \quad (2)$$

$$\cdot \text{変位 } g^{d_{jk}}(X, Y) = \delta_{jk}(X, Y) - \delta_a \leq 0 \quad (j \in P, k=1 \sim NL) \quad (3)$$

$$\cdot \text{細長比 } g^{r_i}(x_i, \ell_i) = \gamma_i(x_i, \ell_i) - \gamma_a \leq 0 \quad (i=1 \sim NM) \quad (4)$$

$$\cdot \text{上下限 } x_i^L \leq x_i \leq x_i^U \quad (i=1 \sim n) \quad (5)$$

$$y_i^L \leq y_i \leq y_i^U \quad (i=1 \sim m) \quad (6)$$

$$\text{○設計変数: } X = \{x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n\}^T, \ Y = \{y_1 \ y_2 \ \cdots \ y_m\}^T \quad (7)$$

On Structural Optimization using Second Order Information

by Toshimasa OTSUKA and Hiroyuki SUGIMOTO

ここで、 O は目的関数、 g^{*}_{ik} は応力に関する制約条件、 g^{d}_{jk} は変位に関する制約条件、 g^{r}_i は細長比に関する制約条件である。 x_i は部材の断面寸法に関する設計変数で部材断面積、 y_i は幾何変数に関する設計変数で節点座標である。 σ_{ik} は荷重条件 k における i 部材の応力度、 δ_{jk} は、荷重条件 k における自由度 j の方向の変位、 γ_i 、 σ_{ai} 、 ℓ_i はそれぞれ i 部材の細長比、許容応力度および部材長である。 δ_a は許容変位量、 γ_a は許容細長比量である。 n は部材の断面寸法に関する設計変数の数、 m は幾何変数に関する設計変数の数、 NM は部材数、 NL は荷重条件数、 P は変位を制約する自由度の集合である。

近似の概念を応用する場合、式(1)～(7)で与えられる原問題のすべて、あるいはその1部を関数近似して、得られた近似副問題を、何らかの数値計画法で繰り返し解くことになる。

部分近似法では、副問題の作成において、原問題中の構造解析に係わる項のみ、それぞれに適した方法で関数近似する手法である。このようにして作成される副問題は、他の手法における近似副問題に比べ、より原問題に等価なものであると考えられる。

上記の最適化問題では、式(2)、(3)における応力と変位が、構造解析に係わる項であり、これらの近似式を次のように定義する。

$$\sigma_{ik}(X, Y) \doteq \tilde{\sigma}_{ik}(\xi, \zeta), \quad \delta_{jk}(X, Y) \doteq \tilde{\delta}_{jk}(\xi, \zeta) \quad (i=1 \sim NM, j \in P, k=1 \sim NL) \quad (8)$$

ここで、 $\tilde{\sigma}_{ik}$ 、 $\tilde{\delta}_{jk}$ は、それぞれ応力および変位の近似関数であり、 ξ 、 ζ は、それぞれ部材断面積、幾何変数の近似変数である。

一般に、これらの応答近似式は、テーラー展開式を利用して、二次以降の項を無視した一次式として、次式のように与えられる。

$$\tilde{f}(\xi, \zeta) = f(\xi^0, \zeta^0) + \sum_{p=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial \xi_p} \right)^0 (\xi_p - \xi_p^0) + \sum_{q=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial \zeta_q} \right)^0 (\zeta_q - \zeta_q^0) \quad (9)$$

ここで、 f は何らかの構造応答を表わし、 ξ^0 、 ζ^0 は設計点 X^0 、 Y^0 における近似変数である。

近似変数は、一般に設計変数の関数で表わされ、順変数や逆変数に代表される。近似変数の有効な選択により、近似の程度を上げることが可能であり、設計変数が部材断面積などの場合には、逆変数の利用で、近似度の高い応答近似式が得られることは知られている。そこで、本研究で作成する応答近似式では、部材断面積に関する近似変数 ξ_p は逆変数として与える。

一方、幾何的な変数に関する有効な近似変数について、これまで各種の検討を行ってきた。その中で、幾何変数に関する構造応答の挙動は、部材断面積と構造応答の関係に見られるような、単調な増加または減少関数ばかりでなく、中には極値を持つ挙動が見られた。このような挙動について、近似変数を利用するといえ、一次の微係数のみを用いる近似式で、精度良く再現することは困難であり、近似式の信頼性が低いと考えられる。そこで、幾何変数に関する応答近似式に、二次の微係数まで考慮する二次近似関数の利用を提案した。

3. 二次近似関数を用いた応答近似式

一般に、多変数関数 f の二次近似関数は次のように表わすことができる。

$$\tilde{f}(X) = f(X^0) + \sum_{p=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_p} \right)^0 (x_p - x_p^0) + \frac{1}{2} (X - X^0)^T [A] (X - X^0) \quad (10)$$

ここで、式中の $[A]$ は二次の微係数で構成されるヘッセ行列で、その p 、 q 項は次式である。

$$A_{pq} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_p \partial x_q} \quad (11)$$

全応答について、式(11)のヘッセ行列を完全に計算するのが理想であるが、近似式の作成に負担をかけないため、本研究では、ヘッセ行列の対角項のみを用いる¹¹⁾。その結果、式(10)は次のようになる。

$$\tilde{f}(Y) = f(Y^0) + \sum_{p=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_p} \right)^0 (x_p - x_p^0) + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^n \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_p^2} \right)^0 (x_p - x_p^0)^2 \quad (12)$$

幾何変数に関する近似式に、式(12)の二次近似関数を用いる場合の各応答近似式は次のようになる。

応力の近似による応力近似式；

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{ik}(\xi, \zeta) = & \sigma_{ik}(\xi^0, \zeta^0) + \sum_{p=1}^n \left(\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial \xi_p} \right)^0 (\xi_p - \xi_p^0) + \sum_{q=1}^m \left(\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial y_q} \right)^0 (y_q - y_q^0) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{q=1}^m \left(\frac{\partial^2 \sigma_{ik}}{\partial y_q^2} \right)^0 (y_q - y_q^0)^2 \quad (i=1 \sim NM, \quad k=1 \sim NL) \end{aligned} \quad (13)$$

軸力の近似による応力近似式；

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{ik}(\xi, \zeta) = & \frac{1}{A_i} [F_{ik}(\xi^0, \zeta^0) + \sum_{p=1}^n \left(\frac{\partial F_{ik}}{\partial \xi_p} \right)^0 (\xi_p - \xi_p^0) + \sum_{q=1}^m \left(\frac{\partial F_{ik}}{\partial y_q} \right)^0 (y_q - y_q^0) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{q=1}^m \left(\frac{\partial^2 F_{ik}}{\partial y_q^2} \right)^0 (y_q - y_q^0)^2] \quad (i=1 \sim NM, \quad k=1 \sim NL) \end{aligned} \quad (14)$$

変位の近似式；

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}_{jk}(\xi, \zeta) = & \delta_{jk}(\xi^0, \zeta^0) + \sum_{p=1}^n \left(\frac{\partial \delta_{jk}}{\partial \xi_p} \right)^0 (\xi_p - \xi_p^0) + \sum_{q=1}^m \left(\frac{\partial \delta_{jk}}{\partial y_q} \right)^0 (y_q - y_q^0) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{q=1}^m \left(\frac{\partial^2 \delta_{jk}}{\partial y_q^2} \right)^0 (y_q - y_q^0)^2 \quad (j \in P, \quad k=1 \sim NL) \end{aligned} \quad (15)$$

式(13)～(15)には、一次と二次の微係数が含まれる。トラス構造物の場合、これらの微係数を解析的に求めることも可能であるが、本研究ではすべて差分による数値計算で求めた。

図-1の曲線は、ある応答値 f と設計変数 x の関数を示したものである。 x^0 は現在の設計、 f^0 が x^0 に対応する応答値である。 Δx は増分量であり、 $x^0 + \Delta x$ に対応する応答値を f_1 、 $x^0 - \Delta x$ に対応する応答値を f_2 とすると、二次の微係数の値は、次式で計算される。

幾何変数に関する二次微分；

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{f_1 - 2f^0 + f_2}{(\Delta x)^2} \quad (16)$$

また、断面積に関する一次微分は f_1 と f^0 による前進差分で計算し、幾何変数に関する一次微分は f_1 と f_2 による中心差分で計算する。これは、幾何変数に関する二次微分の計算の関係で、 x^0 の両側 $\pm \Delta x$ の点で解析を行なうため、これを利用した中心差分とするほうが、前進差分に比べ、解析的に得られる微分の値に近づくと考えられるためである。

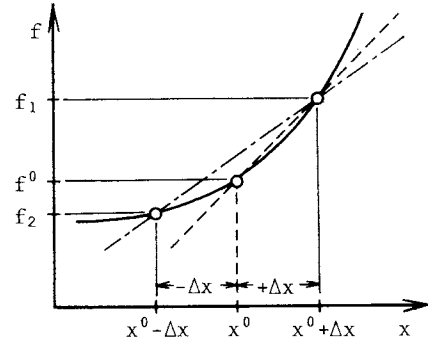


図-1 差分による微係数の計算

4. 数値計算例

(1) 近似度の検討

式(13)～(15)の応答近似式を用いて最適設計を行なう前に、幾何的な変数に関する応答について近似度について検討を行い、式(9)で与えられる応答の一次近似式の近似度と比較した。

これまで、この種の比較では、ある1つの変数のみに関する応答の挙動で、近似度の検討を行っていた。ここでは、2つの変数を同時に変化させた場合の応答の挙動により検討した。これは、1つの変数に関しての挙動を見るより、実際の設計に近づいたものとなる。また、二次の微係数として与えられるヘッセ行列について、その対角項のみを利用した場合では、近似の精度にどの程度影響するかを検査することができる。

図-3.a～3.cは、図-2に示す25部材トラスにおいて、節点3、6のX方向の座標値、節点8、9の座標値及びこれら両方の変化に対する、部材17(節点4、8を繋ぐ部材)の応力の関係を示した図である。

図-4.a～4.cは、同様な構造で、節点3、6のX方向の座標値、節点7、10の座標値及びこれら両方の

変化に対する、部材 10（節点 3、4 を繋ぐ部材）の応力の関係を示した図である。

図中の実線が厳密な値、□は応力に関する式（9）の ξ を順変数とした場合の結果、△が逆変数とした結果である。○が式（13）の二次近似の結果である。また、◎は設計点を示している。

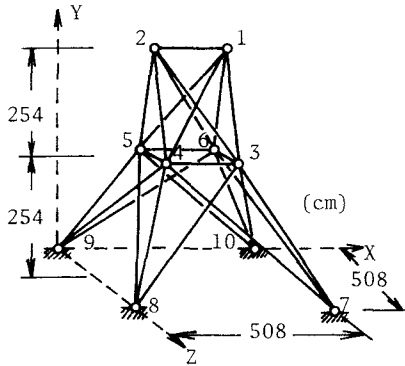


表-1 25部材トラスの荷重条件

nodal point	Load condition 1			Load condition 2		
	Px	Py	Pz	Px	Py	Pz
1	-22.7	-22.7	90.6	-4.53	-22.7	45.3
2	0	-22.7	-90.6	0	-22.7	45.3
3	0	0	0	-2.27	0	0
4	0	0	0	-2.27	0	0

(tf)

図-2 25部材トラス

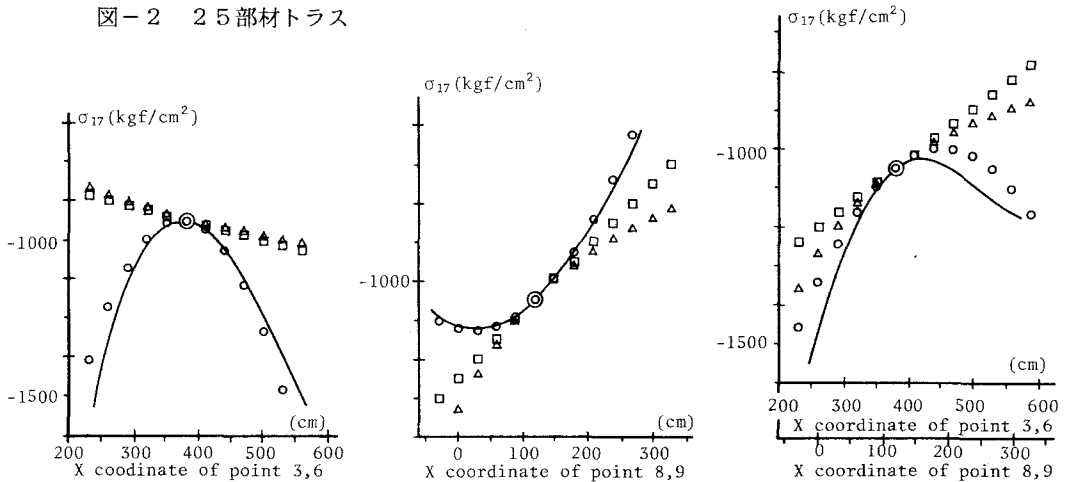


図-3.a $\sigma_{17}-X_{3,6}$

図-3.b $\sigma_{17}-X_{8,9}$

図-3.c $\sigma_{17}-X_{3,6,8,9}$

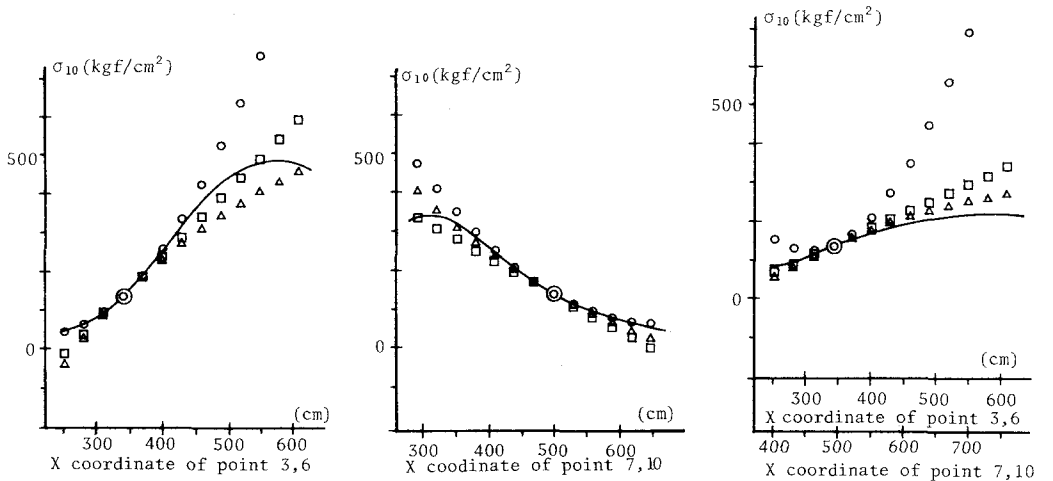


図-4.a $\sigma_{10}-X_{3,6}$

図-4.b $\sigma_{10}-X_{7,10}$

図-4.c $\sigma_{10}-X_{3,6,7,10}$

これらの図より、まず、一次近似についてみると、図-3.aで見られるように、 ξ_a として順変数や逆変数を用いたとしても、極値の付近の設計では、近似の程度が非常に悪くなっている。また、図-3.b、図-4.bでは順変数が有効であり、図-3.c、図-4.a、図-4.cでは逆変数が有効となっている。このように、近似変数に関する優劣の判断が難しく、一次の微係数のみを用いる場合の近似の限界が分かる。一方二次近似では、応力がどのような挙動を示す場合でも、その大部分で近似の程度は非常に良くなっている。次に、2つの変数が同時に変化した場合の近似についてであるが、図-3.c、図-4.cでその結果を示している。これを見ると、図-4.cで二次近似による近似の程度が悪いことが分かる。これは、ヘッセ行列の対角項のみ用いることが原因と考えられる。しかしながら、他のケースにおける二次近似の同様な検討において、大部分が図-3.cに見られるように、応力の挙動を精度良く再現していることや、二次の微係数を計算するにもかかわらず、近似式の作成が容易であることから、幾何変数に関する二次近似関数は、一次近似に比べると有効であると考えられる。

(2) トラス構造物の最小重量設計

図-5に示した50部材トラスの最小重量設計について、一次の微係数のみを用いる近似法、本論文で説明した二次近似による近似法、また直接、数値計画法により計算を行ない、それぞれ得られた結果から手法の比較を行なった。また、初期値の収束への影響について検討し、設計で与えた4ケースの初期値を表-2に示した。以上の計算結果を表-3に示す。設計では、各部材の許容応力度を1400 kgf/cm²とし、許容細長比量を120とした。また、近似法ではムーブリミットを用いているが、それ以外、収束に対する有効な手段は何らとっていない。表-3で示すケースは表-2におけるケースと対応しており、応力近似は式(13)、軸力近似は式(14)による結果である。枠中、1行目は目的関数、2行目は収束に要したイテレーション回数、3行目は制約条件のうち最大の値、4行目は、設計に要したCPU時間を示している。この結果を見ると、逆変数を用いた場合では、設計の効率は、与える初期値によって非常にバラツキ、また、軸力近似のケース2で、制約条件の満足しない設計となっている。また、順変数を用いた場合、逆変数の結果に比べ、設計の効率が安定しており、すべての設計で可能設計となっているが、軸力近似のケース3と4で効率の悪い設計となっており、二次近似の結果と比べるとCPU時間で劣っているケースが多い。

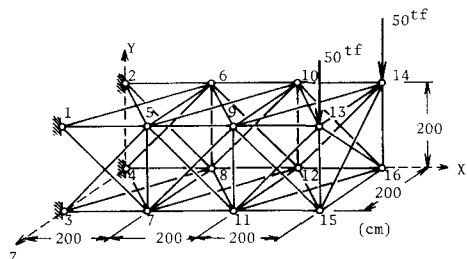


図-3 50部材トラス

表-2 50部材トラスの初期条件

design variables, case		(1)	(2)	(3)	(4)
nodal point and direction (cm)	5,6-Y	-20	-20	-50	-50
	9,10-Y	-30	-30	-50	-50
	13,14-Y	-40	-40	-50	-50
sectional area (cm ²)		50	100	50	100

次に、GRG、SQP、SLPを用いた場合は、最適解が得られていない結果が多く、

表-3 50部材トラスの結果

本来、これらの手法を用いる場合には、何回かの再計算によりを解を得るのが一般である。この計算では、すべての設計条件を同じにするため、1回の設計結果で比較すると、二次近似の結果に比べてイテレーションの回数、CPU時間がすべての設計において多くなっている。

case	応力近似			軸力近似			GRG	SQP	SLP
	逆変数	順変数	二次	逆変数	順変数	二次			
1	394925	399123	394819	394987	394958	394803	396422	396913	395575
	6 0.00 1.49s	6 0.05 1.70s	6 0.00 1.62s	6 0.10 1.68s	6 0.10 1.29s	6 0.06 1.68s	26 0.05 3.17s	8 0.01 3.23s	12 0.01 3.43s
2	394862	394823	394777	319753	394926	394789	439154	427412	473240
	16 0.04 5.52s	8 0.02 2.11s	6 0.11 1.99s	31 335 12.6s	8 0.09 1.82s	8 0.03 1.98s	20 0.00 2.70s	10 0.41 3.83s	13 0.00 3.31s
3	394964	395087	394833	394811	394877	394851	398792	395949	418696
	13 0.03 3.96s	6 0.05 1.39s	6 0.04 1.52s	10 0.12 3.50s	13 0.03 3.95s	6 0.01 1.54s	19 0.03 2.39s	9 0.02 3.19s	16 0.00 4.22s
4	394885	394815	394845	394899	399711	395038	426474	450300	494944
	13 0.01 4.77s	7 0.01 2.50s	6 0.03 2.01s	21 0.00 7.72s	11 0.27 3.20s	8 0.07 1.56s	28 0.01 3.43s	8 0.40 3.47s	11 0.00 2.89s

5. 結論

近似の概念を応用した、構造最適設計法である部分近似法では、構造解析に関する項のみ、何らかの近似式に置き換えることから、この概念を応用した他の手法に比べ、原問題により近い近似副問題の作成が可能とされている。ここで利用する応答近似式は、近似度が高く、設計問題に有効なものが要求される。本論文では、幾何的な変数に関する、近似度の高い応答近似式として、従来用いられてきた一次の近似式ではなく、二次の微係数まで考慮した二次近似関数の応用を提案し、近似式の作成法並びに、理論面、数値計算によってその有効性について説明した。本研究で得られた事柄を箇条書きにして、以下に示す。

- 1) 幾何的な変数に関する応答近似式に、ヘッセ行列の対角項のみを用いる二次近似関数の応用を提案した。
- 2) 近似度の検討において、これまで1変数に関する応答の挙動で比較を行っていたが、今回、2変数に関する応答の挙動で比較を行なった。これにより、応答近似式についてより高い信頼性が得られた。
- 3) ヘッセ行列の対角項以外の項を無視することで、近似の程度に若干影響が見られたが、一次近似の近似度と比較して、良好な結果が得られたことから、ヘッセ行列の対角項のみの利用で十分と考えられる。
- 4) 最小重量設計の結果、他の近似法や直接、数値計画法を用いた場合に比べ、より優れて安定した効率によって、最適解が得られた。

以上の結果から、二次近似関数を応用する構造物の最適設計法は、収束の信頼性や効率の点から優れた手法だといえる。また、一般の構造物の特性に対しても、同様な効果が期待できるため、一般的な近似法と考えられる。

本論文の計算は、室蘭工業大学情報処理教育センターのFACOM M-380を使用した。

参考文献

- 1) Schmit, L.A. & H. Miura : Approximation Concept for Efficient Structural Synthesis, NASA CR-2552, 1976.
- 2) Fleury, C. : Structural Weight Optimization by Dual Methods of Convex Programming, Int. j. for Numerical Methods in Engineering, Vol.14, No.12, pp.1761-1783, 1977.
- 3) Fleury, C. & Schmit, L.A. : Primal and Dual Methods in Structural Optimization, J. of the Structural Division, ASCE, Vol.106, No.ST5, pp.1117-1133, 1980.
- 4) Fleury, C. & V. Braibant: Structural Optimization: A New Dual Method Using Mixed Variables, Int. J. Numer. Methods in Eng., Vol.23, pp.409-428, 1986.
- 5) Svanberg, K. : Method of moving asymptotes - a new method for structural optimization, Int. J. Numer. Methods in Eng., Vol.24, pp.359-373, 1987.
- 6) 杉本博之、山村和人：骨組構造物の最適設計における応力近似モデルについて，構造工学論文集，Vol. 35A，pp. 347-359，1989.
- 7) 杉本博之：トラス構造物の応力近似式に関する一考察，土木学会論文集，第 416号/I-13, pp. 449-452，1990.
- 8) 杉本博之：双対法・新双対法と近似法について，土木学会北海道支部論文報告集，第46号，pp. 23-28，1990.
- 9) 杉本博之：制約条件の部分近似によるトラス構造物の最適設計に関する研究，構造工学論文集，Vol. 36A，pp. 429-439，1990.
- 10) 大塚敏正、杉本博之：近似法による立体トラス構造物の形状最適化に関する基礎的研究，土木学会北海道支部論文報告集，第46号，pp. 29-34，1990.
- 11) 杉本博之、大塚敏正：2次近似を用いるトラス構造物の形状最適化，構造工学論文集，Vol. 37A，1991.（掲載予定）