

平板の境界要素法におけるn次要素解析式、及びその適用

北海道大学大学院 田尻 太郎

北海道大学工学部 正 員 芳村 仁

1. はじめに

平板の境界要素法においては自由辺及び角点の特異点で、境界積分が発散する。このため特異積分を回避する定式化が開発され^{(1)~(3)}、発散積分を正面から評価する試みは少ないように思う。本文では、解関数を多項式近似し厳密に評価すれば、実際には発散項が処理でき、それによって幾つかの問題点を解決する事を試みる。本文はラプラス問題 $\Delta \phi = 0$ に関する解析式の研究を⁽⁴⁾、平板の曲げ問題 $\Delta \Delta w = \rho / D$ に適用したものに当たる。

2. 境界方程式

平板曲げ問題の境界方程式は、式 (1) で与えられる^{(1)~(3)}：

$$c(\xi, \eta) w(\xi, \eta) + \int (w V^* - V w^*) ds - \int (T M^* - M T^*) ds - \sum (w F^* + F w^*) = \int \int \rho(x, y) w^* dx dy \quad (1)$$

ここで (ξ, η) は基本解の特異点座標、 c は形状係数、 w, V, T, M, F はそれぞれ変位、相当剪断力、撓み角、曲げモーメント、角の集中反力、 ρ は荷重密度、 $\int ds$ は境界上線積分、 $\int \int dx dy$ は面積分である。 $*$ 付きの量は基本解に関するもの。境界条件から (1) の未知関数は2個となるので第二の境界方程式を導くために、(1) を特異点座標 (ξ, η) で特異点の外法線方向 (角度 β) に偏微分する。この時、特異点座標は基本解に関する部分にしか含まれないので、 $t = (\partial / \partial \xi) \cos \beta + (\partial / \partial \eta) \sin \beta$ として形式的に積分記号下の微分を適用すれば、次式を得る。

$$t(c(\xi, \eta) w(\xi, \eta)) + \int (w t V^* - V t w^*) ds - \int (T t M^* - M t T^*) ds - \sum (w t F^* + F t w^*) = \int \int \rho(x, y) t w^* dx dy \quad (2)$$

ここで $t w^* \sim t F^*$ が連続であれば、積分記号下の微分は妥当であるが、 $t V^*, t M^*, t T^*$ は特異点で連続でないので、特異点を含む要素上では、積分後に微分する必要がある。すなわち特異要素上では、

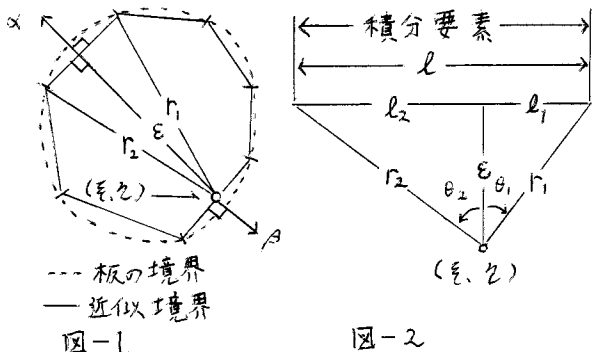
$$t(c(\xi, \eta) w(\xi, \eta)) + t \int (w V^* - V w^*) ds - t \int (T M^* - M T^*) ds - \sum (w t F^* + F t w^*) = \int \int \rho(x, y) t w^* dx dy \quad (3)$$

を用いる。(3) を解析的に厳密に評価するのは不可能なので、解関数をn次多項式近似する。

3. 多項式近似による境界積分

解関数の近似多項式を、例えば変位 w について $w = \sum_{p=0}^n a_p s^{n-p}$ と表せば、(1) の積分の一項目は、

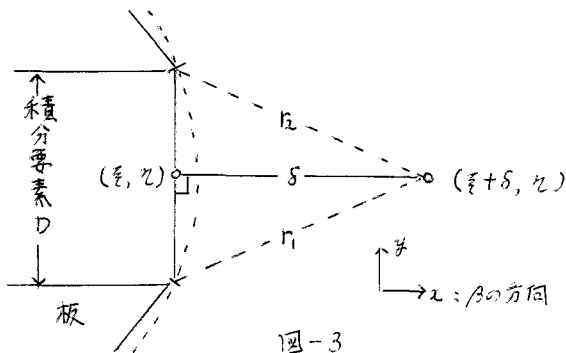
$\int w V^* ds = \sum_{p=0}^n a_p \int s^{n-p} V^* ds$ となり、一般に $V_n = \int s^n V^* ds$ 等が計算できればよい。図-1のように境界を折れ線近似し、各要素ごとに図-2に示した幾何学的パラメータを与えれば、(1) 式については全ての要素に対して、付録にある結果が得られる。



特異点を含まない要素上では、(1)と同様に、(2)も積分できて付録の結果が得られる。

4. 特異要素の評価

特異点を含む要素で (3)式を考える。実際の計算手順は、図-3にあるように、境界上特異点をその外法線方向に距離 δ だけずらし、(1)の積分結果を利用して要素上の積分値を計算する $-F_1$ とする。次に特異点を境界に戻し、(1)の結果から積分値 F_0 を得る。(3)の二項目を例にとれば、



$F_1 = \int_0 w V^*(\xi + \delta, \eta) ds$, $F_0 = \int_0 w V^*(\xi, \eta) ds$ であり、
 $t \int w V^* ds = \lim_{\delta \rightarrow 0} (F_1 - F_0) / \delta$ となる。ただし図では、外法線方向がx軸と一致するように座標を取っている。これらの結果を $V_n' = t \int s^n V^* ds$ 等と表す。付録にあるように、この時 V_n' 、 M_n' から発散項が出るが、それらは全て、互いにキャンセルする事を次に示す。

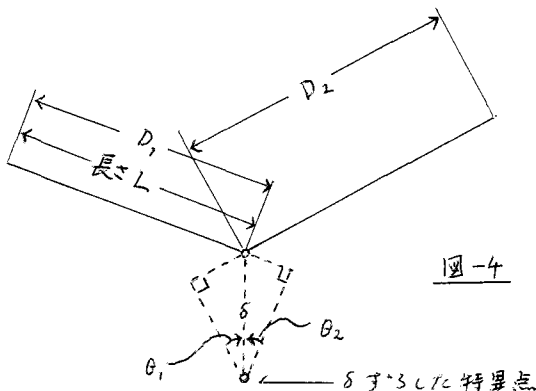
5. 発散項のキャンセル

発散項が出るのは特異点が要素端にある場合である。一般の場合を考え角特異点し、(1)の任意の方向への偏微分を考える。図-4の角を挟む2要素間での積分結果は、付録(9)(10)式を(3)に代入すればよい。証明の道筋は、境界で変位を $n+1$ 次近似し、撓み角を n 次近似する。(9)(10)の発散項だけ書き出せば、
 $t \int w V^* ds - t \int T M^* ds$ は、

$$I = \sum_{p=0}^n \{ a_p^{(1)} (n+1-p) L^{n-p} \cos \theta_2 \lim_{\delta \rightarrow 0} \log \delta - b_p^{(1)} L^{n-p} \sin \theta_2 \lim_{\delta \rightarrow 0} \log \delta \} \\ - a_p^{(2)} \cos \theta_1 \lim_{\delta \rightarrow 0} \log \delta + b_p^{(2)} \sin \theta_1 \lim_{\delta \rightarrow 0} \log \delta \quad (4)$$

となる。ただし要素 D_1, D_2 で $w(s) = \sum_{p=0}^{n+1} a_p^{(1)} s^{n-p+1}$ 、 $T(s) = \sum_{p=0}^n b_p^{(1)} s^{n-p+1}$ ($i=1,2$)としてある。

$w(s)$ を s で微分し、角における接線方向撓み角と法線方向撓み角 T の関係を、方向微分の式から導いて(4)に代入すれば角の内角 k と θ_1, θ_2 の関係から $I=0$ となる。正則境界の場合は、 $k=\pi/2$ において一方の w と T を0とすれば得られる。従来は $t \int w V^* ds$ に相当する項を単独で収束させるため、接線方向撓み角の連続性を仮定し、支持条件に関わらず角点では撓み角0とするか、近接接点での扱いしなかった。この条件は強過ぎ、撓み角の連続性を仮定するだけで充分である。



また単独では $t \int T M^* ds$ も、角点で $\lim_{\delta \rightarrow 0} \log \delta$ の形で発散するが、それが“弱い”特異性であるため、要素端に分点を持たない数値積分公式で処理するのが普通だったと思われる。全体Matrixの中で角付近の撓み角の係数の重みはかなり大きい。正しい撓み角と係数を用いなければ、角近傍・周辺の応力が大きく逸脱する恐れがある。

もし $w = \sum_{p=0}^{n+1} a_p^{(1)} s^{n-p+1}$ 等を正解に対する級数展開の有限部分と見なせるならば、理論解についても同じ事情が成り立って、発散項は現れないと結論できる。そこで実際上 w と T を同じ次数で近似する時でも式(9)(10)の発散項(波線部)を単に落とすだけで、数値的に扱えるはずである。

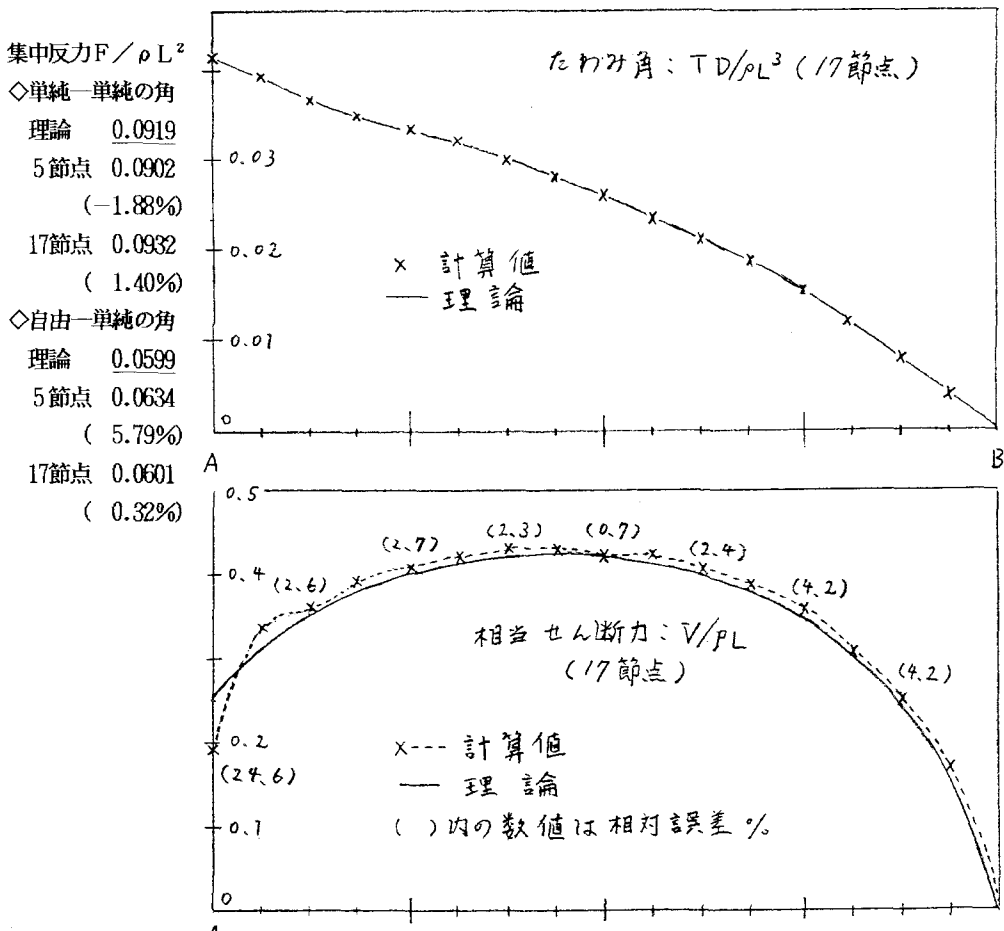
6. 数値例

以下、計算例を示す。3辺単純支持・1辺自由の正方形板。Levyの級数解との比較。材料定数：辺長 $L=4\text{ m}$ 、板剛度 $D=1500\text{ kgm}^3$ 、ポアソン比 $\nu=0.3$ 、等分布荷重 1 kg 満載。単純辺に挟まれる角では、境界未知量が5個、自由辺に接する角では4個ある。これに対して境界方程式は(1)と(2)×2(法線方向が2だから)の3しかない。補助式として、単純-単純の角では両撓み角0(Tの連続性-方向微分の公式)、自由-単純の角では自由辺の撓み角0を採用している。単純側の撓み角は未知数として計算できる。

基本解の表式から単純辺、自由辺は、それぞれ1次と2次の特異性を持つ。単純に考えても単純辺は1次以上、自由辺は2次以上の近似が必要になる。実際には何れも2次近似以上必要で、特に単純-自由は二つの特異性が重なるため、4次以上必要だった。自由辺を含む例は、例外を除いて満足な結果を与えるものが少ない⁽¹⁾。本方法によれば一応実用に供しうる結果が得られると思う。従来式では同程度の結果を得るために1.5~3倍以上節点が必要であろうし、角周辺の収束が著しく悪いであろう。角周辺でなくても節点数を増さず要素長を伸ばせるのは、解析式の利点であり、この辺りの事情は文献〔5〕に詳しい。また本文の具体的計算手法は文献〔4〕に多く負っており、ここであらためて謝辞を述べたい。

紙面の都合上、自由辺に接する単純辺の撓み角と、最も収束の悪かった同辺の相当剪断力だけをあげる。他は正解に落ちている。0に対する誤差は、一辺17接点の場合で0.01程度。撓み角と変位は5節点でも正しく求まる(4次近似なので、一辺1要素に当たる)。内挿関数には、Lagrange多項式を使用した。

3辺単純・1辺自由・正方形板：4次近似・一辺17節点



7. むすび

(1) 境界方程式を特異点座標で微分し、第二の境界方程式を導く際、積分記号下の微分に留意する。それにより、次の事が可能であるのがわかった。

解を多項式近似し厳密に積分すれば、角にまつわる発散項は消去されるので、

(1.1) 発散積分を数値的に処理する必要がない。

(1.2) 角特異点を置けるので、二重節点として扱えば、近接節点等を持ち込む必要がない。

(1.3) 自由辺の撓み角を正しく扱え、角周辺の応力が改善される。

(2) 多項式近似境界積分の n 次要素解析式を導いた。解精度の向上と計算時間の短縮が可能と思われる。

文献〔4〕〔5〕

(3) (1)と(2) から特に、自由辺を含む支持条件でも良好な結果を得た。

参考文献

- 〔1〕直接法BEMによる平板の弾性曲げ解析についての一考察：宮崎謙一・田中正隆、第一回境界要素法シンポジウム研究発表論文集、JASCOM（&境界要素法研究会）1984.11.1 発行
- 〔2〕境界要素法の理論と応用：境界要素法研究会編、コロナ社、昭61
- 〔3〕A GENERAL BOUNDARY INTEGRAL FORMULATION FOR THE NUMERICAL SOLUTION OF PLATE BENDING PROBLEMS :by MORIS STERN, INTERNATIONAL JOURNAL OF SOLIDS and STRUCTURES Vol.15 Number10,1979, Pergamon Press.
- 〔4〕境界要素法における n 次要素の境界積分とその漸化式：桑原敏彦・武田毅（北大工）、電気4学会北海道支部連合大学講演論文集 論文番号31、昭57
- 〔5〕境界要素法における数値積分に基因するポテンシャル誤差分布について：桑原敏彦、武田毅（北大工）、電気4学会北海道支部連合大学講演論文集 論文番号94、昭58

付録： n 次要素解析積分式と漸化式、基本解及びその微分

記号の意味は図-1、2を見られたい。 $c_1 = \cos \theta_1$, $c_2 = \cos \theta_2$, $s_1 = \sin \theta_1$, $s_2 = \sin \theta_2$, $CG = \cos(\beta - \alpha)$, $SG = \sin(\beta - \alpha)$ とする。 β と α は、特異点と積分要素の外法線方向。 $k\pi$ は角の内角。特異点が角でない場合は $k=1$ とする。 $A_n \sim L_n$ は漸化式の項にある。式は形状係数を含む。

(1) 式に対する積分結果

$$\textcircled{1} \left[\begin{array}{l} \bar{V}_n = \frac{1}{2} k \ell_1^n \text{ (特異要素)} \\ = 0 \text{ (正則要素)} \end{array} \right] \begin{array}{l} \text{--- } \varepsilon = 0 \\ \text{--- } \varepsilon \neq 0 \end{array}$$

$$= -\frac{1}{4\pi} (2(1-\nu) B_n^{(3)} + (1+\nu) A_n^{(1)}) \text{ --- } \varepsilon \neq 0$$

$$\textcircled{2} \left[\begin{array}{l} M_n = -\frac{1+\nu}{4\pi} L_n - \frac{1-\nu}{4\pi} A_n^{(2)} - \frac{1+3\nu}{8\pi(n+1)} \ell^{n+1} \\ \varepsilon = 0 \text{ 以下、2工項目 } 0 \end{array} \right]$$

$$\textcircled{3} \left[T_n = \frac{1}{8\pi D} \varepsilon (2L_n + \frac{1}{n+1} \ell^{n+1}) \right]$$

$$\textcircled{4} \left[w_n = \frac{1}{8\pi D} (L_{n+2} + 2r_1 s_1 L_{n+1} + r_1^2 L_n) \right]$$

(2) 式に対する積分結果

$$\left[V_n' = -\frac{1+\nu}{4\pi} A_n \cos k\pi \text{ --- } \varepsilon = 0 \right]$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1-\nu}{\pi} CG \cdot C_{n+2}^{(2)} + \frac{2(1-\nu)}{\pi} (r_1 S_1 \cdot CG - \varepsilon \cdot SG) C_{n+1}^{(2)} \\
 &\quad + \frac{1-\nu}{\pi} ((r_1^2 S_1^2 - \varepsilon^2) CG - 2\varepsilon r_1 S_1 \cdot SG) C_n^{(2)} \\
 &\quad - \frac{1+\nu}{2\pi} SG \cdot B_{n+1}^{(1)} - \frac{1}{2\pi} ((1+\nu) r_1 S_1 \cdot SG - 2\varepsilon r_1 S_1 \cdot CG) B_n^{(1)} \\
 &\quad + \frac{1+\nu}{4\pi} CG \cdot A_n^{(0)}
 \end{aligned}
 \quad \left| \begin{aligned}
 A_0 &= \frac{l_2 - l_1}{l_1 l_2} S_1 \\
 A_1 &= \log \frac{l_2}{l_1} + \left(\frac{l_1}{l_2} - 1 \right) \\
 A_{n+2} + 2l_1 S_1 \cdot A_{n+1} \\
 &\quad + l_1^2 A_n = \frac{1}{n+1} l^{n+1}
 \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned}
 M'_n &= -\frac{1+\nu}{4\pi} A_n \sin k\pi \quad \leftarrow \varepsilon = 0 \\
 &= \frac{1+\nu}{4\pi} (SG \cdot A_{n+1}^{(0)} + (\varepsilon \cdot CG + r_1 S_1 \cdot SG) A_n^{(0)}) \\
 &\quad + \frac{1-\nu}{2\pi} (CG \cdot B_{n+2}^{(1)} + (2r_1 S_1 \cdot CG - \varepsilon \cdot SG) B_{n+1}^{(1)} \\
 &\quad + r_1 \cdot SG (r_1 S_1 \cdot CG - \varepsilon \cdot SG) B_n^{(1)})
 \end{aligned}
 \quad \left| \begin{aligned}
 A_0 &= S_1 \log \frac{l_2}{l_1} \\
 A_{n+1} + l_1 S_1 \cdot A_n \\
 &= \frac{S_1}{n+1} l^{n+1}
 \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned}
 T'_n &= -\frac{1}{4\pi D} (CG \cdot L_n + SG \cdot A_{n+1}^{(1)} + (r_1 S_1 \cdot SG + \varepsilon \cdot CG) A_n^{(1)}) \\
 W'_n &= -\frac{1}{4\pi D} (SG \cdot L_{n+1} + (r_1 S_1 \cdot SG + \varepsilon \cdot CG) L_n)
 \end{aligned}
 \quad \left\{ \begin{aligned}
 r_1 = 0 \text{ 又は } r_2 = 0 \text{ 2" } \\
 2, 3 \text{ 項目は } 0
 \end{aligned} \right.$$

(3) 式に対する積分結果

$$\begin{aligned}
 V'_n &= \frac{1+\nu}{4\pi} A_n, \quad A_0 = -\frac{l_1 + l_2}{l_1 l_2}, \quad A_1 = \log \frac{l_2}{l_1} - \frac{l_1}{l_2} - 1 \\
 A_{n+2} - 2l_1 A_{n+1} + l_1^2 A_n &= \frac{1}{n+1} l^{n+1} \quad (r_1 \neq 0 \text{ かつ } r_2 \neq 0)
 \end{aligned}$$

$$V'_0 = -\frac{1+\nu}{4\pi} \cdot \frac{\cos(1-k)\pi}{l}$$

$$V'_1 = \frac{1+\nu}{4\pi} \log l \cdot \cos(1-k)\pi + \frac{1-\nu}{4\pi} \cos(1-k)\pi - \frac{1}{2} (k - \frac{1}{2}) \sin(1-k)\pi$$

$$\begin{aligned}
 V'_n &= \frac{1+\nu}{4\pi(n-1)} l^{n-1} \cos(1-k)\pi \quad (n \geq 2) \\
 &\quad - \frac{1+\nu}{4\pi} \cos(1-k)\pi \cdot \lim_{\delta \rightarrow 0} \log \delta
 \end{aligned}
 \quad (r_1 = 0)$$

$$V'_0 = -\frac{1+\nu}{4\pi} \cdot \frac{\cos(1-k)\pi}{l}$$

$$V'_n = \frac{1}{4\pi} ((1-\nu)n l^{n-1} (-\cos(1-k)\pi + (k - \frac{1}{2})\pi \sin(1-k)\pi) + (1+\nu)A_n)$$

$$A_0 = -\frac{\cos(1-k)\pi}{l} \quad (n \geq 1)$$

$$A_1 = -\log l \cdot \cos(1-k)\pi + (k - \frac{1}{2})\pi \sin(1-k)\pi - \cos(1-k)\pi + \cos(1-k)\pi \cdot \lim_{\delta \rightarrow 0} \log \delta$$

$$A_{n+2} - 2l A_{n+1} + l^2 = \frac{l^{n+1}}{n+1} \cos(1-k)\pi \quad (r_2 = 0)$$

$$M'_n = -\frac{1}{2} k l_1^n \quad (r_1 \neq 0 \text{ かつ } r_2 \neq 0)$$

$$\begin{aligned}
 M'_0 &= -\frac{1}{2} (k - \frac{1}{2}) \cos(1-k)\pi - \frac{1+\nu}{4\pi} (\log l + 1) \sin(1-k)\pi \\
 &\quad + \frac{1+\nu}{4\pi} \sin(1-k)\pi \cdot \lim_{\delta \rightarrow 0} \log \delta
 \end{aligned}$$

$$M'_n = -\frac{1+\nu}{4\pi n} l^n \sin(1-k)\pi \quad (n \geq 1) \quad (r_1 = 0)$$

$$M'_n = -\frac{1}{2} l^n (k - \frac{1}{2}) \cos(1-k)\pi - \frac{1+\nu}{4\pi} l^n \log l \cdot \sin(1-k)\pi$$

$$-\frac{1+\nu}{4\pi(n+1)} l^n \sin(1-k)\pi \cdot \left(1 - \sum_{p=2}^{n+1} \frac{p-1}{n-p+2} \right) \leftarrow n=0 \text{ 2" は } 0$$

$$\left\{ + \frac{1+\nu}{4\pi} \ell^n \sin(1-k)\pi \cdot \lim_{\delta \rightarrow 0} \log \delta \right.$$

漸化式

$$\textcircled{11} \quad \begin{aligned} A_0^{(m)} &= \varepsilon^{m-1} (\theta_2 - \theta_1), \quad A_1^{(m)} = \varepsilon^m \log \frac{r_2}{r_1} - r_1 S_1 \cdot A_0^{(m)} \\ A_{n+2}^{(m)} + 2r_1 S_1 \cdot A_{n+1}^{(m)} + r_1^2 A_n^{(m)} &= \frac{1}{n+1} \varepsilon^m \ell^{n+1} \end{aligned}$$

$$\textcircled{12} \quad \begin{aligned} B_0^{(m)} &= \frac{1}{2} \varepsilon^{m-3} (c_2 S_2 - c_1 S_1 + \theta_2 - \theta_1), \quad B_1^{(m)} = -\frac{1}{2} \varepsilon^{m-2} (c_2^2 - c_1^2) - r_1 S_1 \cdot B_0^{(m)} \\ B_{n+2}^{(m)} + r_1 S_1 \cdot B_{n+1}^{(m)} &= \frac{n+1}{2} A_n^{(m)} - \frac{\varepsilon^m}{2r_1^2} \ell^{n+1} \end{aligned}$$

$$\textcircled{13} \quad \begin{aligned} C_0^{(m)} &= \frac{1}{4} \varepsilon^{m-6} ((\ell + r_1 S_1) c_2^4 - r_1 S_1 c_1^4) + \frac{3}{8} \varepsilon^{m-6} ((\ell + r_1 S_1) c_2^2 - r_1 S_1 c_1^2) \\ &\quad + \frac{3}{8} \varepsilon^{m-5} (\theta_2 - \theta_1) \\ C_1^{(m)} &= -\frac{1}{4} \varepsilon^{m-4} (c_2^4 - c_1^4) - r_1 S_1 \cdot C_0^{(m)} \end{aligned}$$

$$C_{n+2}^{(m)} + r_1 S_1 \cdot C_{n+1}^{(m)} = \frac{n+1}{4} B_n^{(m)} - \frac{\varepsilon^m}{4r_1^2} \ell^{n+1}$$

$$\textcircled{14} \quad \begin{aligned} L_n &= \frac{1}{n+1} \left\{ \left[\ell^{\frac{n+1}{2}} r_1^{\frac{n+1}{2}} \cos((n+1)(\theta_1 + \frac{\pi}{2})) \right] \log r_2 + r_1^{\frac{n+1}{2}} \cos((n+1)(\theta_1 + \frac{\pi}{2})) \cdot \log r_1 \right. \\ &\quad \left. + r_1^{\frac{n+1}{2}} (\theta_2 - \theta_1) \cos((n+1)\theta_1 + \frac{\pi}{2}n) - \sum_{p=1}^{n+1} r_1^{p-1} \ell^{n-p+2} \frac{\cos((p-1)(\theta_1 + \frac{\pi}{2}))}{n-p+2} \right\} \end{aligned}$$

$$L_n = \frac{1}{n+1} \left\{ \ell^{\frac{n+1}{2}} \log \ell - \frac{\ell^{\frac{n+1}{2}}}{n+1} \right\} \quad \text{--- } r_1 = 0 \quad r_1 \neq 0 \text{ かつ } r_2 \neq 0$$

$$L_n = \frac{1}{n+1} \left\{ \ell^{\frac{n+1}{2}} \log \ell - \sum_{p=1}^{n+1} \frac{\ell^{\frac{n+1}{2}}}{n-p+2} \right\} \quad \text{--- } r_2 = 0$$

基本解 及びその微分

$$w^* = \frac{1}{8\pi D} r^2 \log r$$

$$t w^* = -\frac{1}{4\pi D} r \log r \cos(\theta - \beta)$$

$$t T^* = -\frac{1}{4\pi D} (\log r \cdot \cos(\alpha - \beta) + \cos(\theta - \alpha) \cos(\theta - \beta))$$

$$t M^* = \frac{1}{4\pi r} ((1+\nu) \cos(\theta - \beta) + 2(1-\nu) \cos(\theta - \alpha) \sin(\theta - \alpha) \sin(\theta - \beta))$$

$$\begin{aligned} t V^* &= -\frac{1}{4\pi r^2} \cos(2\theta - \alpha - \beta) ((1-\nu) \cos 2(\theta - \alpha) + 2) \\ &\quad + \frac{1-\nu}{2\pi R r^2} \sin(\theta - \beta) \cos(\theta - \alpha) \sin 2(\theta - \alpha) - \frac{1-\nu}{2\pi R r^2} \sin(\theta - \beta) \sin 2(\theta - \alpha) \end{aligned}$$

$$T^* = \frac{1}{4\pi D} r (\log r + 2) \cos(\theta - \alpha)$$

$$M^* = -\frac{1}{4\pi} ((1+\nu) \log r + \frac{1-\nu}{2} \cos 2(\theta - \alpha) + (1+\nu))$$

$$\begin{aligned} V^* &= -\frac{1}{4\pi r} \cos(\theta - \alpha) ((1-\nu) \cos 2(\theta - \alpha) + 2) \\ &\quad + \frac{1-\nu}{4\pi R} \cos 2(\theta - \alpha) \end{aligned}$$

R: 積分点 (x, y) での曲率半径.

