

I-7

鋼床版曲線桁の振動解析と実験

北海道大学工学部 正 員 渡辺 昇
 北海道開発局 正 員 新山 惇
 北海道開発局 正 員 竹田 俊明
 北海道開発局 正 員 三木 雅之
 北海道大学工学部 学生員 丹羽 啓達

1. はじめに

最近、橋梁技術の進歩に伴い、地形および自然環境に調和するように、道路線形に合わせた曲線桁が数多く用いられるようになってきた。また、力学的な利点から薄肉断面を有する構造物が多いが、薄肉断面を有する曲線桁においては、曲げ剛性の他に、ねじり剛性、そりねじり剛性を考慮しなくてはならない。そこで、本報告では、そりねじりを考慮した曲線桁の振動微分方程式より、曲線半径、支間の異なるケースについて、動的解析の基本である固有振動周期を求め、それぞれのケースについて振動実験を行い、超高感度地震計により記録した波形をフーリエ級数に展開し、パワースペクトル解析したものと比較検討するものである。

2. そりねじりを考慮した曲線桁の振動微分方程式

$$\frac{EI_y}{R^3} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{EI_y}{R} \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} - \frac{EI_y}{R^3} (y_a + r_y) \frac{\partial \phi}{\partial z} = \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (1a)$$

$$\frac{GK_t}{R^2} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - (EI_x + \frac{EI_w}{R^2}) \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} + \frac{EI_x + GK_t}{R} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{EI_w}{R} \frac{\partial^4 \phi}{\partial z^4} = \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \rho A \frac{y_a}{R} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - y_a \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right) \quad (1b)$$

$$- \frac{EI_y}{R^2} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - EI_y \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + \frac{EI_y}{R^2} (y_a + r_y) \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \rho A \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - y_a \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right) \quad (1c)$$

$$\frac{EI_x + GK_t}{R} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{EI_w}{R} \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} - \frac{EI_x}{R^2} \phi + GK_t \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - EI_w \frac{\partial^4 \phi}{\partial z^4} = \rho A y_a \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - y_a \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right) + \rho I_p \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (1d)$$

EI_x, EI_y : 曲げ剛性

GK_t, EI_w : 純ねじり剛性、そりねじり剛性

A, R : 断面積、曲線半径

y_a : セン断中心と重心の距離

r_y : $(1/I_y) \int_A y (x^2 + y^2) dA$

ρ : 単位体積質量

I_p, I_a : 断面二次極モーメント、 $I_a = I_p + A y_a^2$

u, v, w, ϕ : x, y, z 方向の変位、せん断中心に関するねじり角

Vibration Analysis and Experiment on the Steel Deck Curved Girder

by Noboru WATANABE, Makoto NIYAMA, Toshiaki TAKEDA, Masayuki MIKI and Hirosato NIWA

ここで、 z 方向の変位 w は式(1a)のみに存在し、他の u 、 v 、 ϕ に比べ微小である。よって式(1b)、(1c)、(1d)について考える。

両端GaBel支持の場合を考えると、境界条件は以下のようになる。

$$\begin{aligned} u(0, t) &= u(l, t) = 0 \\ v(0, t) &= v(l, t) = 0 \\ \phi(0, t) &= \phi(l, t) = 0 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(0, t) &= \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(l, t) = 0 \\ \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}(0, t) &= \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}(l, t) = 0 \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}(0, t) &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}(l, t) = 0 \end{aligned}$$

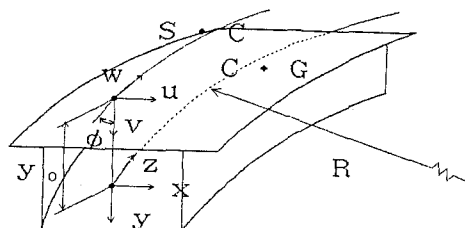


図-1 座標関係 (対称断面)

この境界条件を満たすように u 、 v 、 ϕ を以下のように仮定する。

$$\begin{aligned} u(z, t) &= \sum U_i \sin \omega_i t \cdot \sin \theta_i z \\ v(z, t) &= \sum V_i \sin \omega_i t \cdot \sin \theta_i z \\ \phi(z, t) &= \sum \Phi_i \sin \omega_i t \cdot \sin \theta_i z, \quad \theta_i = i\pi/l \end{aligned}$$

これを式(1b)、(1c)、(1d)に代入して整理すると

$$\begin{aligned} \rho A \frac{y_0}{R} \omega_i^2 U_i + \left\{ \theta_i^2 \left[\frac{GK_t}{R^2} + (EI_x + \frac{EI_w}{R^2}) \theta_i^2 \right] - \rho A \omega_i^2 \right\} V_i \\ + \left[\frac{\theta_i^2}{R} (EI_x + GK_t + EI_w \theta_i^2) - \rho A \frac{y_0^2}{R} \omega_i^2 \right] \Phi_i = 0 \end{aligned} \quad (2a)$$

$$\begin{aligned} [EI_y \theta_i^2 (\frac{1}{R^2} - \theta_i^2) + \rho A \omega_i^2] U_i - \left[\frac{EI_y}{R^2} (y_0 + r_y) \theta_i^2 \right. \\ \left. - \rho A y_0 \omega_i^2 \right] \Phi_i = 0 \end{aligned} \quad (2b)$$

$$\begin{aligned} \rho A y_0 \omega_i^2 U_i + \frac{\theta_i^2}{R} (EI_x + GK_t + EI_w \theta_i^2) V_i + \left[\frac{EI_x}{R^2} \right. \\ \left. + (GK_t + EI_w \theta_i^2) \theta_i^2 - \rho I_0 \omega_i^2 \right] \Phi_i = 0 \end{aligned} \quad (2c)$$

式(2a)、(2b)、(2c)より、次の振動数方程式を得る。

$$\alpha^3 + \Lambda_{1i} \alpha^2 + \Lambda_{2i} \alpha + \Lambda_{3i} = 0 \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \Lambda_{1i} = - \left(\frac{1}{\theta_i^4 R^4} \frac{AR^2}{I_p} + 1 \right) + \left[\frac{1}{\theta_i^2 R^2} \left(1 - \frac{y_0 r_y}{R^2} \frac{AR^2}{I_p} \right) - \frac{I_0}{I_p} \right] \beta \\ - \frac{I_0}{I_p} \left(1 + \frac{I_p}{AR^2} \right) \gamma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Lambda_{2i} = - \left(\frac{1}{\theta_i^2 R^2} - 1 \right) \left[\frac{AR^2}{I_p} \frac{(1 + y_0 r_y \theta_i^2)}{\theta_i^4 R^4} + \frac{I_0}{I_p} \right] \beta \\ + \frac{I_0}{I_p} \left(\frac{1}{\theta_i^2 R^2} - 1 \right)^2 \gamma - \frac{I_0}{I_p} \left(\frac{1}{\theta_i^2 R^2} - 1 \right) \left(1 + \frac{I_p}{AR^2} \right) \beta \gamma \end{aligned}$$

$$\Lambda_{3i} = \frac{I_0}{I_p} \left(\frac{1}{\theta_i^2 R^2} - 1 \right)^3 \beta \gamma$$

$$\alpha = \left(\frac{\omega_i}{\omega_{vi}} \right)^2, \quad \beta = \left(\frac{\omega_{ui}}{\omega_{vi}} \right)^2, \quad \gamma = \left(\frac{\omega_{\phi i}}{\omega_{vi}} \right)^2$$

$$\omega_{ui}^2 = \theta_i^4 \frac{EI_y}{\rho A}, \quad \omega_{vi}^2 = \theta_i^4 \frac{EI_x}{\rho A}, \quad \omega_{\phi i}^2 = \frac{1}{\rho I_\phi} \theta_i^2 (GK_t + EI_w \theta_i^2)$$

ここで、 ω_{vi} 、 ω_{ui} 、 $\omega_{\phi i}$ は支間 l 、二軸対称薄肉開断面の直線桁における連成しない鉛直曲げ振動、水平曲げ振動、ねじり振動の各固有円振動数の i 次モードをそれぞれ表す。また式(3)の3次方程式より求められる3つの正の解 ω_{1i} 、 ω_{2i} 、 ω_{3i} は鉛直軸対称断面をもつ曲線桁の、曲げとねじりの相互作用により連成した固有円振動数を表す。

特に、 $R = \infty$ の場合には

$$\Lambda_{1i} = -1 - (I_\phi/I_p) \beta - (I_\phi/I_p) \gamma$$

$$\Lambda_{2i} = (I_\phi/I_p) \beta + (I_\phi/I_p) \gamma + (I_\phi/I_p) \beta \gamma$$

$$\Lambda_{3i} = - (I_\phi/I_p) \beta \gamma$$

となり、3次方程式は次のようになる。

$$(\alpha - 1) \{ \alpha^2 - (I_\phi/I_p) (\beta + \gamma) \alpha + (I_\phi/I_p) \beta \gamma \} = 0$$

$\alpha = 1$ の場合、 $\omega_i = \omega_{vi}$ となり、 ω_i は直線桁の鉛直曲げ振動数を表す。

3. 実験供試体および実験方法

実験供試体は図2に示すU形鋼を用いた。

また実験方法は次の方法とした。(図3)

①加振方法：U形鋼の中央付近に鉛袋を吊し、鉛袋を落下させることにより加振する。

②測定方法：応答振動をU形鋼の中央付近に設置した振動技研製、超高感度地震計により記録する。

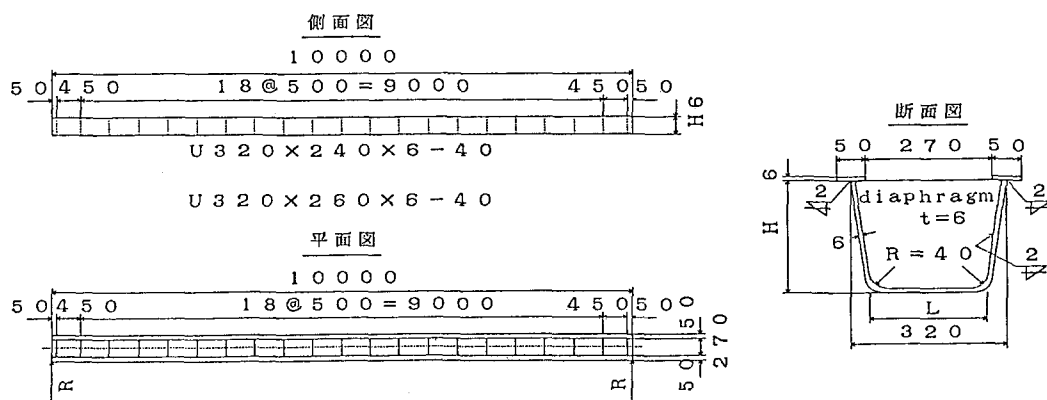


図-2 実験供試体

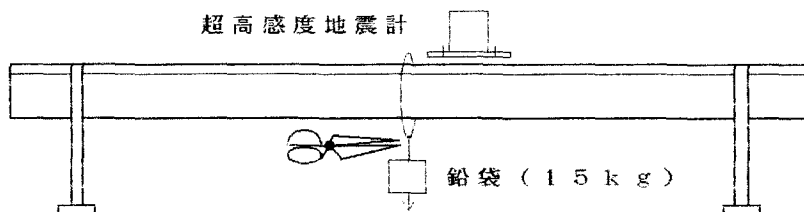


図-3 実験方法

4. 解析値および実測値

U形鋼H=240 mm, R=100 mm, $l=9$ m の場合について1次モードの振動周期を求めてみる。

U形鋼H=240 mm の断面諸元は以下のとおりである。

$$A=47.65 \text{ cm}^2, I_x=3888 \text{ cm}^4, I_y=6986 \text{ cm}^4, I_w=204962 \text{ cm}^6$$

$$K_t=5.72 \text{ cm}^4, y_0=20.81 \text{ cm}, r_y=10.37 \text{ cm}$$

$$I_p=I_x+I_y=10874 \text{ cm}^4, I_0=I_p+A y_0^2=31509 \text{ cm}^4$$

このとき

$$\omega_{u1}^2=5707 \text{ rad}^2/\text{sec}^2, \omega_{v1}^2=3176 \text{ rad}^2/\text{sec}^2, \omega_{\phi1}^2=477 \text{ rad}^2/\text{sec}^2$$

これより

$$\Lambda_{11}=-6.9367, \Lambda_{21}=6.9490, \Lambda_{31}=0.7798$$

ゆえに三次方程式は

$$\alpha^3-6.9367\alpha^2+6.9490\alpha-0.7798=0$$

これを解いて

$$\alpha=0.12837, 1.05613, 5.75220$$

よって

$$\omega_{11}^2=408 \text{ rad}^2/\text{sec}^2, \omega_{21}^2=3354 \text{ rad}^2/\text{sec}^2, \omega_{31}^2=18268 \text{ rad}^2/\text{sec}^2$$

$$\omega_{11}=20.191 \text{ rad/sec}, \omega_{21}=57.915 \text{ rad/sec}, \omega_{31}=135.161 \text{ rad/sec}$$

$$T_{11}=2\pi/\omega_{11}=0.311 \text{ sec}, T_{21}=2\pi/\omega_{21}=0.108 \text{ sec}$$

$$T_{31}=2\pi/\omega_{31}=0.046 \text{ sec}$$

$\omega_{\phi1}^2$ と ω_{11}^2 、 ω_{v1}^2 と ω_{21}^2 、 ω_{u1}^2 と ω_{31}^2 が対応しており、曲線桁において ω_{11} (T_{11}) はねじり振動、 ω_{21} (T_{21}) は鉛直曲げ振動、 ω_{31} (T_{31}) は水平曲げ振動に関する固有円振動数(振動周期)である。

以上と同様に、他のケースについても振動周期を求めると表1のようになる。U形鋼H=260 mm の断面諸元は以下のとおりである。

$$A=49.58 \text{ cm}^2, I_x=4642 \text{ cm}^4, I_y=7189 \text{ cm}^4, I_w=216446 \text{ cm}^6$$

$$K_t=5.95 \text{ cm}^4, y_0=22.49 \text{ cm}, r_y=9.65 \text{ cm}$$

表-1 振動周期および固有円振動数の解析値

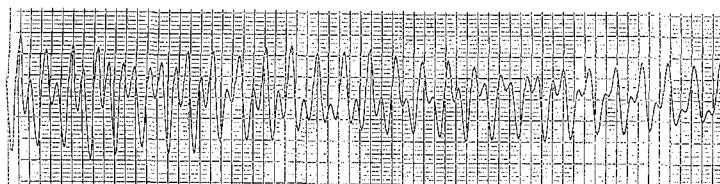
U形鋼	H=240 mm			H=260 mm	
支間	$l=9$ m			$l=10$ m	$l=9$ m
曲線半径	R=100 mm	R=150 mm	R=200 mm	R=100 mm	R=100 mm
周期T (sec)	0.3112	0.3027	0.2997	0.3748	0.3262
	0.1085	0.1101	0.1107	0.1322	0.1021
	0.0465	0.0471	0.0473	0.0566	0.0451
固有円 振動数 ω (rad/sec)	20.191	20.756	20.966	16.764	19.260
	57.915	57.082	56.771	47.513	61.535
	135.16	133.49	132.91	111.08	139.47

これに対し、実測波形は図4のようになった。

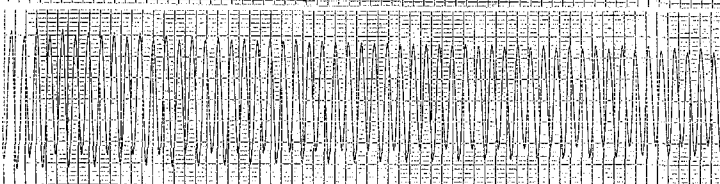
これらの波形に関して、パワースペクトルを求めると図5および図6のようになる。

ただし、フーリエ係数を a_j 、 b_j としたとき、j次のパワーを $(a_j^2+b_j^2)/2$ により求めた。

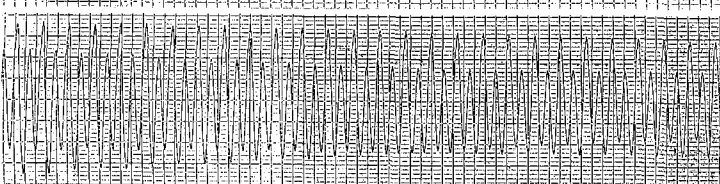
① $H = 240 \text{ mm}$
 $l = 9 \text{ m}$
 $R = 100 \text{ m}$



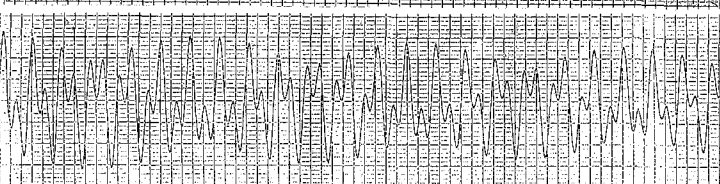
② $H = 240 \text{ mm}$
 $l = 9 \text{ m}$
 $R = 150 \text{ m}$



③ $H = 240 \text{ mm}$
 $l = 9 \text{ m}$
 $R = 200 \text{ m}$



④ $H = 240 \text{ mm}$
 $l = 10 \text{ m}$
 $R = 100 \text{ m}$

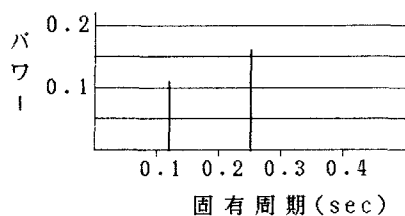


⑤ $H = 260 \text{ mm}$
 $l = 9 \text{ m}$
 $R = 100 \text{ m}$

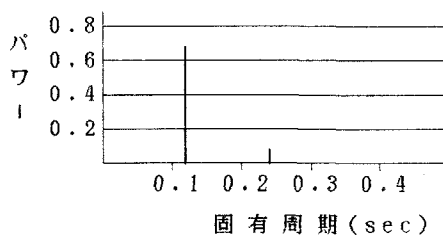


図-4 応答振動波形

① $H = 240 \text{ mm}$, $l = 9 \text{ m}$, $R = 100 \text{ m}$



③ $H = 240 \text{ mm}$, $l = 9 \text{ m}$, $R = 200 \text{ m}$



② $H = 240 \text{ mm}$, $l = 9 \text{ m}$, $R = 150 \text{ m}$

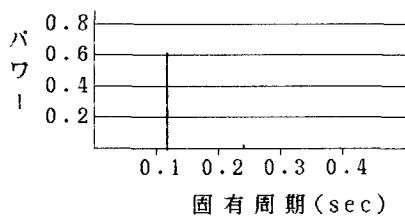
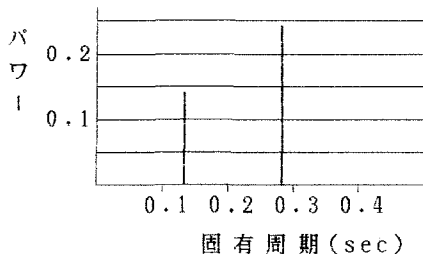


図-5 パワースペクトル

④ $H = 240 \text{ mm}$, $l = 10 \text{ m}$, $R = 100 \text{ m}$



⑤ $H = 260 \text{ mm}$, $l = 9 \text{ m}$, $R = 100 \text{ m}$

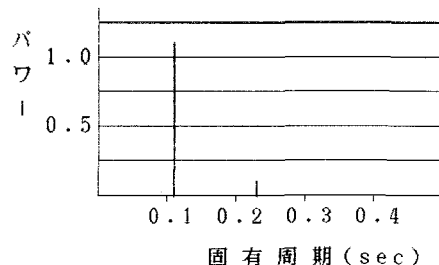


図-6 パワースペクトル

5. 実験結果の考察

表1と図5とを比較してみることににより、次のような考察が得られる。

- 1) すべてのケースにおいて、1次の曲げ振動周期と1次のねじり振動周期が記録された。
- 2) ②および③の場合には、主として曲げ振動周期が記録された。
- 3) これに対し、①および④の場合には、ねじり振動周期のパワーの方が、曲げ振動周期のパワーより大きい。
- 4) ⑤の場合には、主として曲げ振動周期が記録された。

以上の実験結果より次のことが明らかになった。

- 1) $H = 240 \text{ mm}$ に関しては、曲線半径 R が 150 m および 200 m の場合において、曲げ振動が卓越している。 R が 100 m の場合には、曲げ振動の他にねじり振動も強くなる。
- 2) しかし、 $H = 260 \text{ mm}$ に関しては、曲線半径 R が 100 m の場合においても、曲げ振動が卓越している。
- 3) 曲線桁においては、曲げ振動およびねじり振動が同時に発生するが、曲線半径および断面値が異なる場合には、その発生の割合は異なる。

6. おわりに

支間 9 m および 10 m の曲線桁の振動実験を行った結果、次のような結果を得た。

そりねじりを考慮した曲線桁の微分方程式より得た解析値と、振動実験による測定値とはよく一致しており、解析値の妥当性が確認された。また、応答振動波の振動特性を解析するには、フーリエ解析によるパワースペクトル解析が有効であり、応答振動測定のセンサーとして、超高感度地震計を用いるHW振動測定法は有効である。

最後に、本実験の解析と実施には、北海道大学工学部橋梁学講座助教授佐藤浩一氏、同助手小幡卓司氏、同技官及川昭夫氏ならびに研究室の諸氏にお世話になり、実験供試体の製作には、旭鉄工所様の協力を得た。記して謝意を表します。

(参考文献)

- 1) Paul P. Christiano, Charles G. Culver: Horizontally curved bridges subject to moving load
Jour. of Structural Div. Proc. of A.S.C.E., ST.8, pp.1615-1643, 1969
- 2) Chai Hong Yoo, Jon P. Fehrenbach: Natural frequencies of curved girders
Jour. of Engineering Mechanics Div. Proc. of A.S.C.E., EM.2, pp.339-354, 1981
- 3) 林義税、渡辺昇：薄肉断面桁橋のパソコンによるそりねじり解析
土木学会北海道支部論文報告集, No.45, pp.67-70, 1989