

II-38

システム関数を考慮したFuzzy流出予測について

北海道大学 正員 藤田陸博

北見工業大学 正員 早川 博

1. はじめに

近年、水文情報サービス網が充実し、市町村においても端末機があれば全国的規模から県単位規模までの水文情報をオンラインに近い形で入手可能になっている。これらの水文情報を防災対策にいかにより有効に利用するかが今後の問題であろう。例えば、市町村管轄の中小河川においては、必ずしも降雨や水位の観測施設が十分でなく、水位の予測には水文情報の利用が不可欠である。水位予測に必要な降雨予測は「弱、並、強、極強」等にランク別化されたものである。これらの情報を有効に利用しようとするFuzzy理論の応用が最適であると思われる。

著者らは、既にファジィ推論に基づく流出予測手法について提案している^{1,2,3)}。この手法は t 時刻における流量増分を式(1.1)で定義すると

$$\Delta Q(t) = Q(t) - Q(t-1) \quad (1.1)$$

ファジィ推論では、 $\Delta Q(t)$ 、 $\Delta Q(t-1)$ と $R(t)$ の関係式をIf, then形式の命題で表現する。

$$\text{If } \Delta Q(t-1) \text{ is } M_{\Delta Q(t-1)} \text{ and } R(t) \text{ is } M_R(t) \\ \text{then } \Delta Q(t) \text{ is } M_{\Delta Q(t)} \rightarrow P(t) \quad (1.2)$$

ここに、 $M_{\Delta Q(t)}$ 、 $M_{\Delta Q(t-1)}$ および $M_R(t-1)$ は、それぞれ $\Delta Q(t)$ 、 $\Delta Q(t-1)$ 、 $R(t-1)$ のメンバーシップ関数である。式(1.2)の命題は時刻毎に変動し、これを時間の関数 $P(t)$ と書く。 t 時刻には $P(1)$ 、 $P(2)$ 、 $\dots$ 、 $P(t)$ のメンバーシップが得られる。これらの $P(i)$ 、 $i=1, 2, \dots, t$ は、過去の経験を意味している。これらの経験を次式により合成する。

$$\Pi_t = P(1) \cup P(2) \cup \dots \cup P(t) \quad (1.3)$$

$(t+1)$ 時刻の $\Delta \hat{Q}(t+1)$ のメンバーシップ関数 $M_{\Delta \hat{Q}(t+1)}$ を式(1.3)を用いて次のように書くことができる。

$$M_{\Delta \hat{Q}(t+1)} = M_{\Delta Q(t)} \diamond M_R(t) \diamond \Pi_t \quad (1.4)$$

$\diamond$ はMax-積合成を示している。1時刻だけ将来の予測値 $\hat{Q}(t+1)$ は、式(1.4)を用いて得られる。

$$\hat{Q}(t+1) = Q(t) + \Delta \hat{Q}(t+1) \quad (1.5)$$

$\Delta \hat{Q}(t+1)$ は、メンバーシップ関数 $M_{\Delta \hat{Q}(t+1)}$ の重心の

座標で定義した $\Delta Q(t+1)$ の予測値である。

一方、これまでに数多くの流出モデルが提案されている。上に述べたファジィ推論による流出予測計算では、式(1.2)で $\Delta Q(t-1)$ 、 $\Delta Q(t)$ 、 $R(t)$ の関係を表現しているもののこれまで得られた流出理論に関する知識を利用していない。

水文資料の完備していない流域を対象に流出量や水位を予測しようとするとき、先ず、既存の流出モデルやパラメータ値を利用することが考えられる。

前述のランク別化された降雨量の予測値をファジィ的な量として定義すると、既存の流出モデルを利用するにはファジィ量と非ファジィ量あるいはファジィ量とファジィ量の加減乗除やその他の演算が必要になる。ここでは、流出系のシステム関数を線形回帰式とするファジィ線形回帰式を用いた予測計算手法について述べる。

2. ファジィ線形回帰式による予測

ファジィ線形回帰式はTanaka⁴⁾らによって提案されているが、通常回帰式では誤差の自乗和を最小にするように回帰係数を決定している。ファジィ回帰式ではシステム自体に「ゆらぎ」を認めて回帰係数をファジィ数で記述しようとしているところに特徴がある。ファジィ線形回帰式の詳細については参考文献を参照してもらうこととして、ここでは要点のみを記述する。

既知の非ファジィ要素からなる n 元の列ベクトル Y と $n \times m$ のマトリックス X が与えられたとき、ファジィ係数 A を同定する。いま、 A はファジィ数からなる行ベクトルである。ファジィ数 A のメンバーシップ関数 M_A を図-2.1に

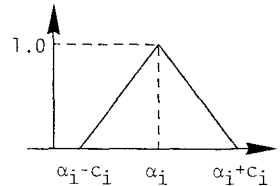


図-2.1 ファジィ係数

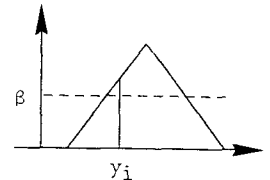


図-2.2 推定ファジィ数

示すように三角形で与えるものとする。Aの要素 a_i を次のように書くことができる。ここでは、 α_i, c_i が未知数となっている。

$$M_{a_i} = 1 - |a - \alpha_i| / c_i \quad (2.1)$$

通常の表現法ではA, X, Yの関係は、式(2.2)のようになる。

$$Y = A \cdot X \quad (2.2)$$

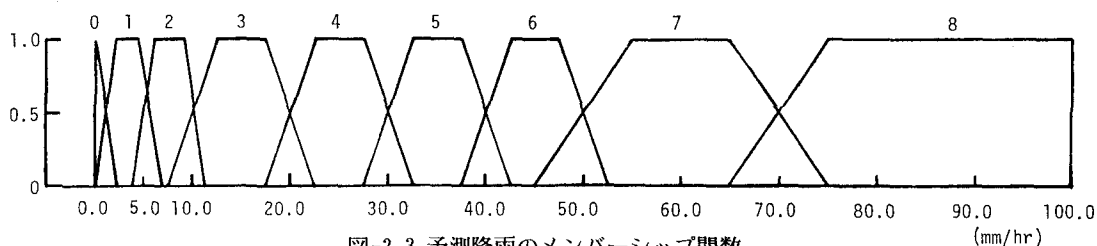


図-2.3 予測降雨のメンバーシップ関数

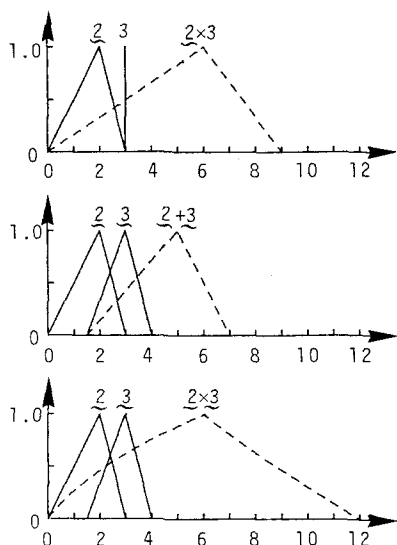


図-2.4 ファジィ数の演算結果

表-2.1 予測降雨のランク

ランク	降雨強度	ランク	降雨強度
0	0 (mm/hr)	5	30~40 (mm/hr)
1	0~5	6	40~50
2	5~10	7	50~70
3	10~20	8	70~
4	20~30		

表-2.2 ファジィ数の演算

演算	区間	区間	結果
$(F_1) \times (NF)$	$[a, b]$	$[c]$	$[ac, bc]$
$(F_1) + (F_2)$	$[a, b]$	$[c, d]$	$[a+c, b+d]$
$(F_1) \times (F_2)$	$[a, b]$	$[c, d]$	$[ac, bd]$

F_1, F_2 : Fuzzy数 NF : 非Fuzzy数

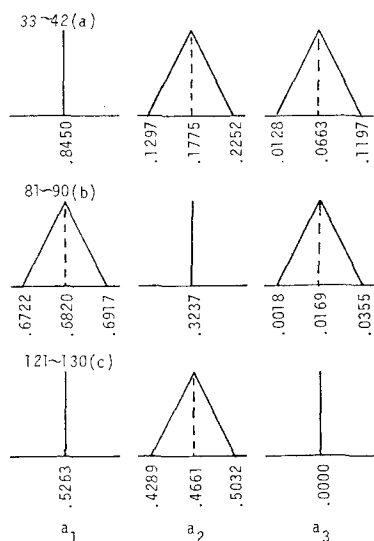


図-2.5 ファジィ係数の計算例 (式(2.5)を使用)

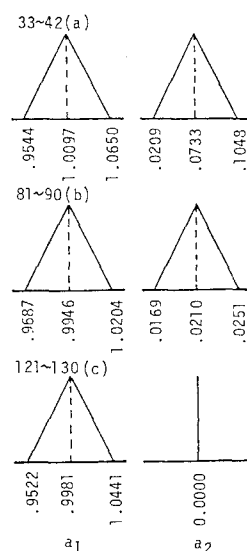


図-2.6 ファジィ係数の計算例 (式(2.6)を使用)

ファジィ回帰係数の場合、図-2.2 に示すように推定ファジィ数が指定されたグレード β 以上に y_i を含むように α_i, c_i を決定する。 α_i, c_i に関して次式を得る。

$$\{C^i \mid X_i\} \rightarrow \text{Min} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} y_i &\leq X_i^T \alpha + (1-\beta) C^i \mid X_i \mid \\ y_i &\geq X_i^T \alpha - (1-\beta) C^i \mid X_i \mid \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$C = [c_1, c_2, \dots, c_m]$$

$$c_i \geq 0 \quad i=1, 2, \dots, n$$

$$X_i = [x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im}]$$

したがって、ファジィ線形回帰式の同定は、式(2.4)の条件下で式(2.3)を最小にするLP問題に帰着できる。

上述の理論を実流域に適用した例を以下に示す。現時刻 t 以前の降雨量 r_i 、水位 h_i 、 $i \leq t$ が既知の条件下で、水位と降雨量の関係式として次のように二つの線形回帰式を仮定した。

$$H(i) = a_1 H(i-1) + a_2 H(i-2) + a_3 r(i) \quad (2.5)$$

$$H(i) = b_1 H(i-1) + b_2 r(i) \quad (2.6)$$

上の二つの式は後述するように本論文で解析の対象とした宮ノ森試験流域を念頭に置いたもので、式(2.5)、(2.6)の式形は流域の特性に応じて変形できる。また、対象としている流域の単位図が既知ならば、それを参照することもできる。説明のために式(2.5)、(2.6)で係数を a, b と区別している。

ここでは、 $t-9 \leq i \leq t$ の区間の既知データを用いてファジィ係数 a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 を同定するものとする。過去どの程度の時間までさかのぼってファジィ係数を同定するかは、当然、対象としている流域により異なると思われる。式(2.2)を参照すると

$$Y^t = [H(t), H(t-1), H(t-2), \dots, H(t-9)] \quad (2.7)$$

$$X = \begin{bmatrix} H(t-1) & H(t-2) & r(t) \\ H(t-2) & H(t-3) & r(t-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ H(t-10) & H(t-11) & r(t-9) \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

ファジィ係数が得られると、推定ファジィ

数を次のように書くことができる。

$$M_i(H) = 1 - \frac{\left| H - \sum_k \alpha_i x_{ik} \right|}{\sum_k c_i x_{ik}} \quad (2.9)$$

$M(H)$ は H のメンバーシップ関数である。

予測計算をするには、式(2.5)、(2.6)においてリードタイムを ℓ とおいて $i=t+\ell$ とするとよい。

$$\hat{M}_H(t+\ell) = a_1 M_H(t+\ell-1) + a_2 M_H(t+\ell-2) + a_3 \hat{M}_r(t+\ell) \quad (2.10)$$

$$\hat{M}_H(t+\ell) = b_1 M_H(t+\ell-1) + b_2 \hat{M}_r(t+\ell) \quad (2.11)$$

上式の右辺(第1,2項の $()$ の値) $\leq t$ のとき、水位は既知なので通常の数値となる。 $\hat{M}_r(t+\ell)$ は予測降雨のメンバーシップ関数である。予測降雨のメンバーシップ関数は、図-2.3および表-2.1に示すように降雨強度に応じて0から8までの9段階に分けた。

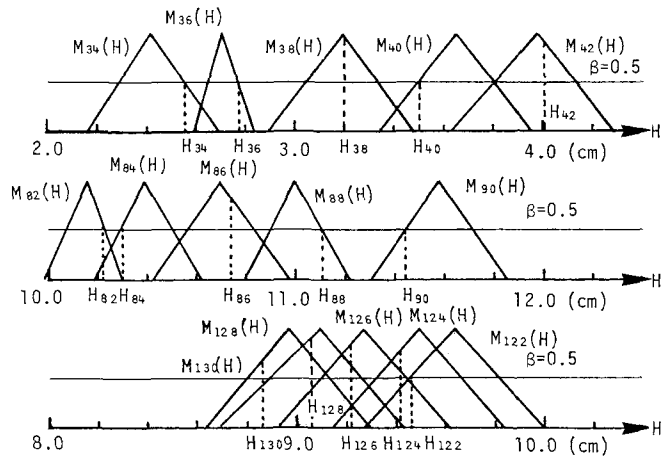


図-2.7 推定ファジィ数 (式(2.5)を使用)

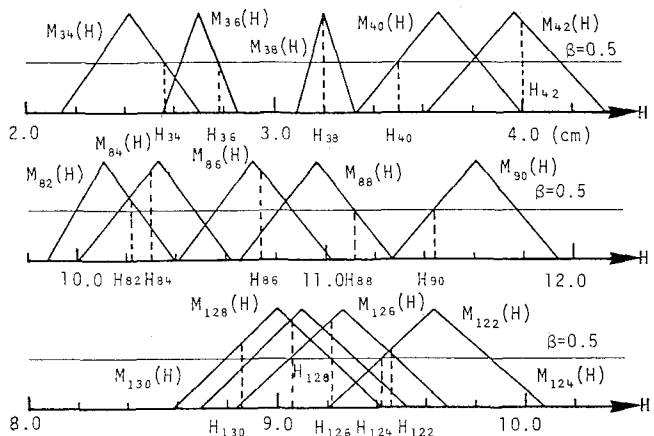


図-2.8 推定ファジィ数 (式(2.6)を使用)

式(2.10), (2.11)によると (ファジィ数) × (ファジィ数), (ファジィ数) × (非ファジィ数) あるいは (ファジィ数) + (ファジィ数) の演算が必要になる。これらの演算結果はいずれもファジィ数になるが、例えば、約2×約3=約6、約2+約3=約5と考えると我々の直感に符合している。表-2.2は、これらの演算について説明したものである。表中の区間 [a, b] は、 α -カットしたメンバーシップ関数の最大値の区間を示している。図-2.4は、 $(F_1)=約2$ 、 $(F_2)=約$

3、 $(NF)=3$ として表-2.2の結果を図示したものである。図において2.3は約2.3を意味しており、図に示すようなメンバーシップ関数で与えている。

上述の理論を著者らによって測定されている宮の森試験地 (流域面積2.6ha) の量水堰の水位予測に適用した。測定時間間隔が10分の資料を用いた。図-2.5, 2.6は3つの同定期間 (図-2.8の矢印で示す) で得られたファジィ係数 a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 を示している。インパルス状の係数は、非ファジィ数が同定されたこ

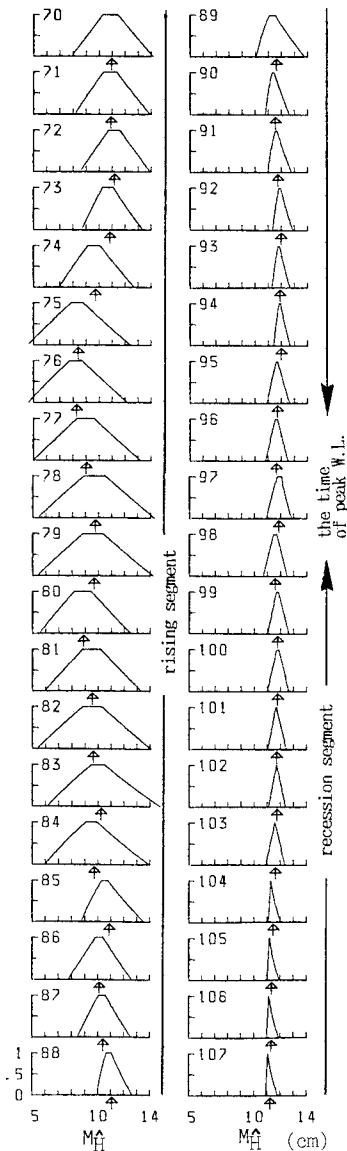


図-2.9 得られた水位のメンバーシップ関数
(式(2.5)を使用)

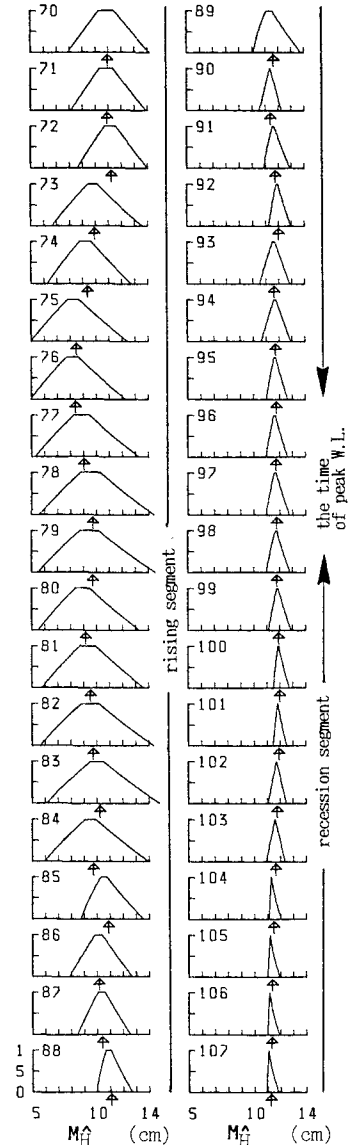


図-2.10 得られた水位のメンバーシップ関数
(式(2.6)を使用)

とを意味している。また、図-2.7,2.8はそれぞれ図-2.5,2.6に示したファジィ係数を用いて水位の推定ファジィ量を計算したものである。計算では $\beta=0.5$ としているので、 $H(i)$ のグレードはいずれも0.5以上になっている。図-2.9,2.10は、式(2.10)、(2.11)においてリードタイム $\ell=3$ (30分)の場合の $M_{\hat{H}}(t+\ell)$ を図示している。図中の数は $(t+\ell)$ を表している。また、図-2.9,2.10の↑印は、メンバーシップ関数 $M_{\hat{H}}(t+\ell)$ の重心の位置を示している。システム方程式である式(2.5)、(2.6)の相

違にもかかわらず、得られた水位の予測メンバーシップ関数は類似している。

図-2.11,2.12は、 $\ell=1,2,3$ として $M_{\hat{H}}(t+\ell)$ の重心の座標を予測値 $\hat{H}(t+\ell)$ として実測値と比較したものである。リードタイムの増大にともない、当然のことながら予測誤差が増大している。システム関数の相違による差が認められない。

3. まとめ

本論文では、ファジィ理論に基づいた小流域の水位予測について2通りの手法を述べた。両手法の最大の相違点は、現時刻より過去の観測値をファジィ量とみなすか非ファジィ量とみなすかにあると思われる。観測値自身も近似値であり、さらに地点降雨量から流域平均雨量を推定する際の誤差など

を考慮すると、観測値をファジィ量とみなすことができる。しかしながら、ランク別化された予測降雨量と現時刻以前の観測降雨量を比較すると「あいまいさ」の程度が相当に異なるものと思われる。本論文の計算結果からみると、現時刻よりも過去の観測値をもファジィ量とみなす2.2節の手法が良好な結果を得ている。2.1節の手法は、流域のシステム方程式として仮定した式(2.5)に予測値が依存しており、本論文の結果からだけでは必ずしも両者の優劣を判定

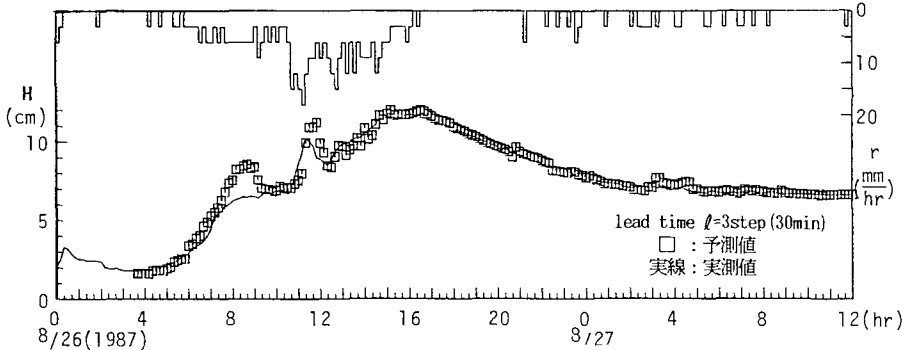
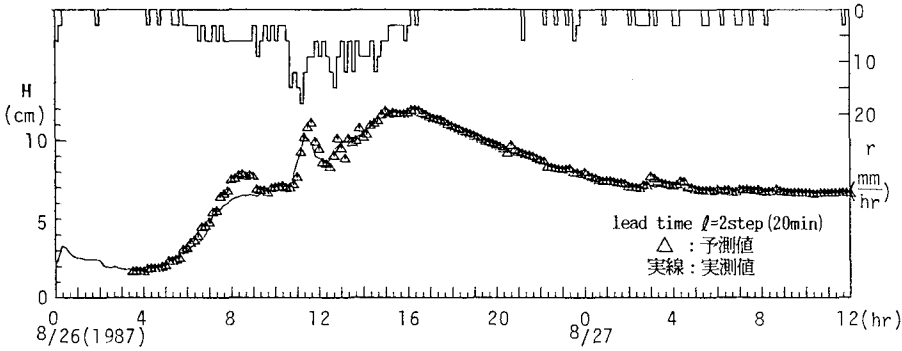
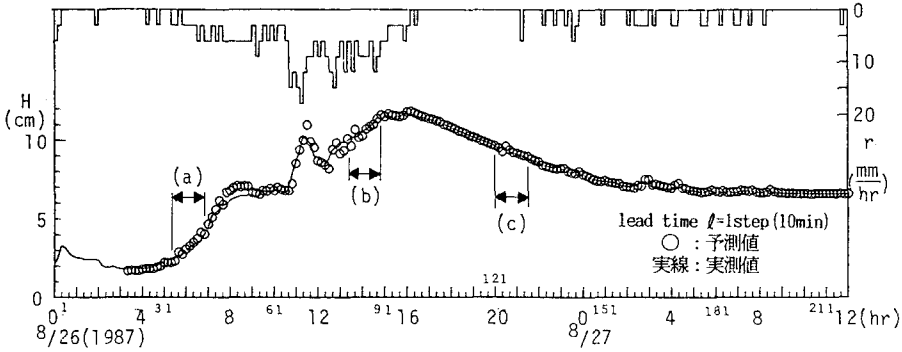


図-2.11 水位の予測値 (式(2.5)を使用)

できないと思われる。

本研究は文部省科学研究費（一般C代表藤田）の補助を受けた。関係各位に謝意を表します。

【参考文献】

- 1) 藤田陸博: Fuzzy集合理論の流出予測問題への適用, 第29回水理講演会論文集, pp263~268, 1985
- 2) 藤田陸博: あいまい推論の流出予測問題への応用, 第31回水理講演会論文集, pp125~130, 1987

3) Fujita, M. and Hayakawa, H.: An Application of Fuzzy Inference to Runoff Prediction, Proc. of Pacific International Seminar on Water Resources Systems, pp.303~320, 1989.

- 4) H. Tanaka, S. Uejima and K. Asai: Linear Regression Analysis with Fuzzy Model, IEEE Trans. Systems, Man, and Cybernetics, SMC-12-6, pp903-907, 1982.

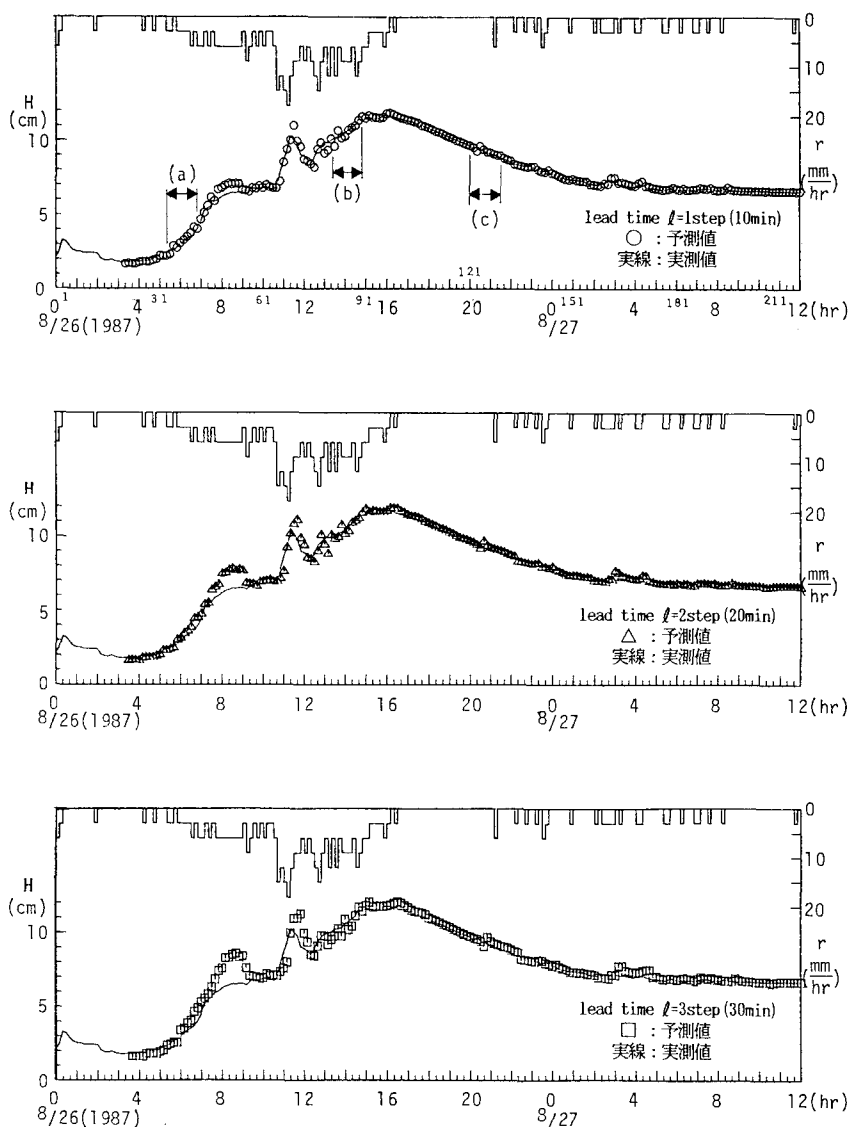


図-2.12 水位の予測値（式(2.6)を使用）