

II-28

河道網の分布特性を考慮した集水過程に関する研究

北見工業大学 正員 早川 博
北海道大学工学部 正員 藤田睦博

1. はじめに

河川流域は、降水を流出量へ変換する場である斜面と、これらからの流出量を合成し流域末端まで運搬する河道から構成されている。

著者らはこれまで河道網の特性量の期待値を用いて、河道網における集水過程について研究してきた¹⁾。しかし、河道網の特性量は河道網パターンにより確率的に変動している。本論文ではこのように確率的に変動する特性量を考慮した集水過程について検討したものである。

2. 河道網の分布特性

リンク-マグニチュード方式に基づく河道網理論は、水源より発する河道を外部リンク、合流点間を結ぶ河道を内部リンクと区別するもので、流域内に含まれる外部リンク数をその流域のマグニチュード N と呼んでいる。図-1に示すようにマグニチュード N の河道網の最下流の合流点で河道を二つに分割し、それぞれの河道網のマグニチュードが i , $(N-i)$ となる河道網パターンの生起確率 $P(i, N)$ は、式(1)で与えられる。また、図-2のようにマグニチュード N の流域で本流に合流する平均支流数を $\bar{M}_N$ とすると、 $\bar{M}_N$ は式(2)で与えられ、平均外部リンク長 $\bar{L}_{ex}$ 、平均内部リンク長 $\bar{L}_{in}$ を用いると、本流長 L_N は式(3)となる。一方、Hack は流域面積と本流長に関して式(4)を提案している。したがって、 $\bar{L} = \bar{L}_{ex} = \bar{L}_{in}$ とすると式(3), (4)より式(5)が得られる。また、外部リンク、内部リンクに付随している流域面積を $\bar{A}_{ex}$, $\bar{A}_{in}$ とし、 $\bar{A} = \bar{A}_{ex} = \bar{A}_{in}$ とすると式(6)から A を求めることができる。

$$P(1, N) = N / (2N-3)$$

$$P(i, N) = \frac{2(2i-3)! N! (N-2)! (2N-2i-2)!}{(i-2)! i! (N-i)! (2N-3)! (N-i-1)!} \quad i \geq 2, N \neq 2m \quad \dots (1)$$

$$P(m, 2m) = \frac{8m}{(4m-2)!} \left[\frac{(2m-1)! (2m-3)!}{m! (m-2)!} \right]^2$$

$$\bar{M}_N = \sum_{i=1}^{(N+2)/2} P(i, N) (M_{N-i} + 1), \quad N \geq 4 \quad \dots (2)$$

$$\bar{M}_1 = \bar{M}_2 = 1, \quad \bar{M}_3 = 2$$

$$L_N = L_{ex} + \bar{M}_N \cdot L_{in} \quad \dots (3)$$

$$L_N = 1.273 A_t^{0.6} \quad \dots (4)$$

$$\bar{L} = 1.273 A_t^{0.6} / (1 + \bar{M}_N) \quad \dots (5)$$

$$\bar{A} = A_t / (2N-1) \quad A_t: \text{全流域面積} \quad \dots (6)$$

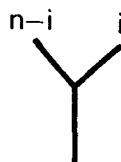


図-1

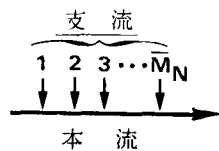


図-2 本流に合流する支流数

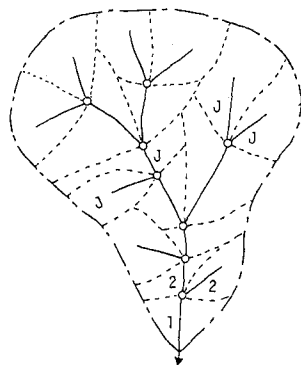


図-3 流域の模式図

次に、図-3に示す河道網の末端から J 本のリンク数だけ遡った位置にあるリンク数、すなわち小流域数 K の確率分布を求める。ここで小流域は各リンクに付随している流域と定義している。リンク数 K は当然河道網の生起パターンによって変動するから、 K の生起確率を $D(N, J, K)$ で表すと、 $D(N, J, K)$ は次のようにして導くことができる。図-1のように、河

道網の最下流端において*i*と(*N-i*)の河道に分割し、各々の河道で*J*本リンクを選ったところに位置するリンク数を ℓ, m とすると、その生起確率は $D(i, J, \ell), D(N-i, J, m)$ となる。すると、河道末端から(*J*+1)本選ったところに位置するリンク数 $Z=\ell+m$ の生起確率 $D(N, J+1, Z)$ は、この河道の生起確率 $P(i, N)$ のもとで生起する確率となる。したがって、次式が得られる。

$$D(N, J+1, Z) = P(1, N) D(N-1, J, Z) + \sum_{i=2}^{N/2+1} P(i, N) \sum_{K=0}^Z D(i, J, K) \cdot D(N-i, J, Z-K) \quad \left. \vphantom{\sum_{i=2}^{N/2+1}} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

$N \geq 4, \quad 2 \leq J \leq N-1, \quad [] : \text{ガウス記号}$

$$D(N, 1, 1) = 1, D(N, 2, 2) = 1, D(N, N, 2) = P(1, N)$$

また、河道末端より *J*本リンクを選った位置にある平均リンク数、すなわち小流域数の期待値を $C(N, J)$ と定義すると、 $C(N, J)$ は以下のように $D(N, J, K)$ の期待値となる。

$$C(N, J) = \sum_{K=0}^{N/2+1} K \cdot D(N, J, K) \quad \left. \vphantom{\sum_{K=0}^{N/2+1}} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

$$\sum_{K=0}^{N/2+1} D(N, J, K) = 1$$

図-4は一例として $N=10$ の場合の $D(N, J, K)$ と $C(N, J)$ を示す。

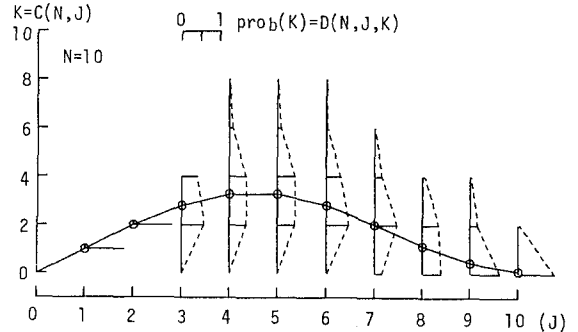


図-4 小流域数の確率分布 $D(N, J, K)$

3. 河道網の集水過程

河道網の集水過程を考える場合に、種々の方法が考えられるが、本論文では各リンクに付随している小流域を単位流域と考え、単位流域からの比流量 $q_u(t)$ ($\text{m}^3/\text{sec}/\text{km}^2$) が河道を一定の伝播速度 V で流下するものと仮定して、線形重ね合わせをすることで流量を合成する。マグニチュード *N*の流域末端における流量は、河道網のパターンによって様々な値をとり得るが、平均小流域数 $C(N, J)$ を用いると流量の期待値 $\bar{Q}(t)$ (m^3/sec) は次式のようになる¹⁾。

$$\bar{Q}(t) = \bar{A} \sum_{k=1}^N q_u \{t - (k-1)L/v\} C(N, K) \quad \dots\dots\dots (9)$$

上式は河道網のパターン、リンク長およびそれに付随する流域面積も期待値を用いているが、実際には確率的に変動する量である。以下各々の分布を考慮した集水過程について述べる。

リンク長 L とそれに付随する流域面積 A の確率密度を $f_1(L)$ 、 $p_A(A)$ とする。まず、河道末端から *J*本リンクを選った河道長 L_J の確率密度 $f_J(L_J)$ は、次式のように $f_1(L)$ を*J*回畳み込み積分をすることによって得られる。

$$\begin{aligned} f_2(L_2) &= \int_0^{L_2} f_1(L) \cdot f_1(L_2-L) dL \\ f_3(L_3) &= \int_0^{L_3} f_2(L) \cdot f_1(L_3-L) dL \\ &\vdots \\ f_J(L_J) &= \int_0^{L_J} f_{J-1}(L) \cdot f_1(L_J-L) dL \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\int_0^{L_J}} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

いま、 $f_1(L)$ がラプラス変換可能な関数であるとして、ラプラス変換関数 $F_1(s)$ を $F_1(s) = \mathcal{L}\{f_1(L)\}$ と書く。また、畳み込み積分のラプラス変換関数の積で表されるので、 $F_J(s) = \mathcal{L}\{f_J(L)\} = F_1^J(s)$ となる。したがって、 $f_J(L)$ は $F_J(s)$ の逆ラプラス変換を考えることによって得られる。

$$f_J(L_J) = \mathcal{L}^{-1}\{F_J(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{F_1^J(s)\} \quad \dots\dots\dots (10')$$

流量の伝播速度を V とすると、河道長 L_J を流下するのに要する時間 T は $T=L_J/V$ であるので、変数変換することによって T の確率密度 $p_J(T)$ は次のようになる。

$$p_J(T) = V \cdot f_J(V \cdot T) \quad \dots\dots\dots (11)$$

したがって、任意の時刻 t までに流量が河道末端に達する確率 P_t は次式から得られる。

$$P_t = \int_0^t p_J(T) dT \quad \dots\dots\dots (12)$$

次に、まず河道末端からJ本リンクを遡った小流域数Kが1個の場合の流出を考える。リンク長Lと小流域面積Aが独立であると仮定すると、河道末端での流量 $Q_J(t)$ は以下のような条件付き確率として得られる。

$$Q_J(t) = \begin{cases} A_i \cdot q_u & \text{with } \int_0^t p_{J-1}(T) dT \\ 0 & \text{with } \int_t^\infty p_{J-1}(T) dT \end{cases} \quad \dots\dots\dots (13)$$

すなわち、 $Q_J(t)$ の確率密度を $p_Q(Q_J(t))$ とすると

$$p_Q(Q_J(t)) = \begin{cases} \frac{1}{q_u} p_A\left(\frac{Q_J(t)}{q_u}\right) \int_0^t p_{J-1}(T) dT & (Q_J(t) \neq 0) \\ \int_t^\infty p_{J-1}(T) dT & (Q_J(t) = 0) \end{cases} \quad \dots\dots\dots (14)$$

となる。上式はまたデルタ関数を用いると次式のように表示することができる。

$$p_Q(Q_J(t)) = \alpha \cdot \delta(Q_J(t)) + \frac{\beta}{q_u} p_A\left(\frac{Q_J(t)}{q_u}\right) \quad \dots\dots\dots (14')$$

$$\text{ここで、} \alpha = \int_t^\infty p_J(T) dT, \quad \beta = \int_0^t p_J(T) dT$$

$\delta(x)$: デルタ関数 ($x=0$ で $\delta(x)=\infty$, $x \neq 0$ で $\delta(x)=0$)

したがって、小流域数がK個である場合の $Q_J(t)$ の確率密度 $p_{QK}(Q_J(t))$ は、リンク長の場合と同様にK回の畳み込み積分をすることによって得られる。

$$\left. \begin{aligned} p_{Q2}(Q_{J2}(t)) &= \int_0^{Q_{J2}(t)} p_Q(Q) \cdot p_Q(Q_{J2}(t) - Q) dQ \\ p_{Q3}(Q_{J3}(t)) &= \int_0^{Q_{J3}(t)} p_{Q2}(Q) \cdot p_Q(Q_{J3}(t) - Q) dQ \\ &\vdots \\ p_{QK}(Q_{JK}(t)) &= \int_0^{Q_{JK}(t)} p_{QK-1}(Q) \cdot p_Q(Q_{JK}(t) - Q) dQ \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (15)$$

また、 $p_A(A)$ がラプラス変換可能な関数であるとする、式(14')から $p_Q(Q_J(t))$ もラプラス変換可能で、 $P_Q(s) = \mathcal{L}\{p_Q(Q_J(t))\}$ とおくことができる。したがって、式(15)の畳み込み積分も式(10')と同様にして得られる。

$$p_{QK}(Q_J(t)) = \mathcal{L}^{-1}\{P_{QK}(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{P_A^K(s)\} \quad \dots\dots\dots (15')$$

次に、J本のリンクを遡った位置にある小流域数iが前出のD(N, J, i)なる確率分布をしている場合を考える。D(N, J, i)は離散型確率分布であり、また、式(15)から小流域の個数iに応じて各々の流量の確率密度 $p_{Qi}(Q_J(t))$ が得られるが、これらは同時には生起しないので、J本リンクを遡った位置にある小流域からの流量 $Q_J(t)$ の確率密度 $p_Q(Q_J(t), J)$ は、次式のように $p_{Qi}(Q_J(t))$ とD(N, J, i)の積の重ね合わせとなる。

$$p_Q(Q_J(t), J) = \sum_{i=0}^N p_{Qi}(Q_J(t)) \cdot D(N, J, i) \quad \dots\dots\dots (16)$$

したがって、最終的に流域全体での流量 $Q(t)$ の確率密度 $p(Q(t))$ は、河道末端(J=1)から上流端(J=N)までの各リンクまで遡ったところに位置する各小流域からの河道末端での流量 $Q_J(t)$ の確率密度 $p_Q(Q_J(t), J)$ を合成、すなわち畳み込み積分することによって得られる。

$$\left. \begin{aligned} p_2(Q_2) &= \int_0^{Q_2} p_Q(Q, 1) \cdot p_Q(Q_2 - Q, 2) dQ \\ p_3(Q_3) &= \int_0^{Q_3} p_2(Q) \cdot p_Q(Q_3 - Q, 3) dQ \\ &\vdots \\ p_N(Q_N) &= \int_0^{Q_N} p_{N-1}(Q) \cdot p_Q(Q_N - Q, N) dQ \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (17)$$

$$= p(Q(t))$$

4. 計算結果と考察

前節の基礎式に基づいて、具体的な計算を行う。計算条件として、単位流域からの比流量 q_u は $q_u=1.0$ (m³/s)の一定とし、河道末端における流量が一定となるまでの増水期の計算を行った。計算時間間隔は1時間、伝播速度は $V=1.0$ (m/s)である。想定した流域は石狩川水系美瑛川上流部で、流域面積 $A_t=146.6$ (km²)、マグニチュード $N=32$ (1/50,000地形図)、 $N=11$ (国土数値情報)である。図-5は実測したリンク長とそれに付随する流域面積の頻度分布である。従来の研究²⁾から、 $f_1(L)$ と $p_A(A)$ は対数正規分布、ガンマ分布あるいはワイブル分布に従うと言われている。図中の分布形はガンマ分布であるが、実測結果とかなり良く適合しており、 $f_1(L)$ 、 $p_A(A)$ のパラメータ η も縮尺によらず一定であると見なしても良いようである。したがって、分布形としてガンマ分布を採用し、パラメータ η はリンク長には $\eta_1=3$ 、流域面積には $\eta_2=2$ と固定した。

$$\left. \begin{aligned} f_1(L) &= \frac{\lambda_1^{\eta_1} L^{\eta_1-1}}{\Gamma(\eta_1)} e^{-\lambda_1 L} \\ p_A(A) &= \frac{\lambda_2^{\eta_2} A^{\eta_2-1}}{\Gamma(\eta_2)} e^{-\lambda_2 A} \end{aligned} \right\} \cdots (18)$$

もう一つのパラメータ λ はガンマ分布の平均値と分散が η/λ 、 η/λ^2 であるので、マグニチュードに応じて式(5)、(6)から

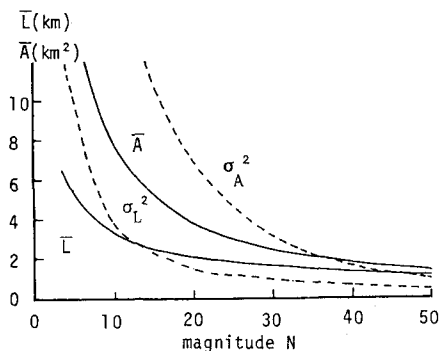


図-6 リンク長と小流域面積の平均値と分散

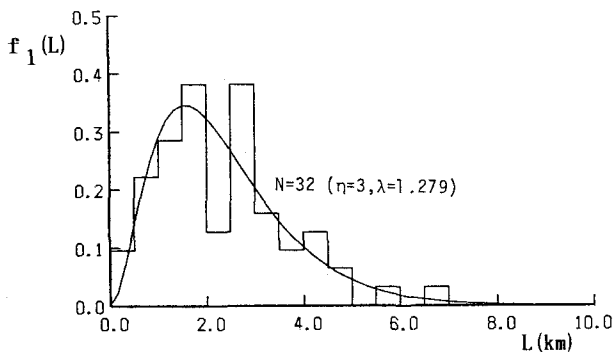


図-5 (a) リンク長の頻度分布 (1/50,000地形図)

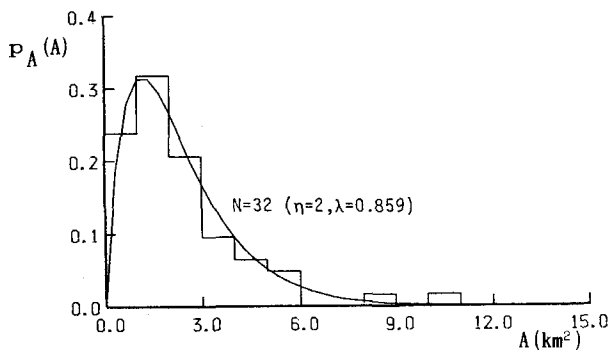


図-5 (b) 小流域面積の頻度分布 (1/50,000地形図)

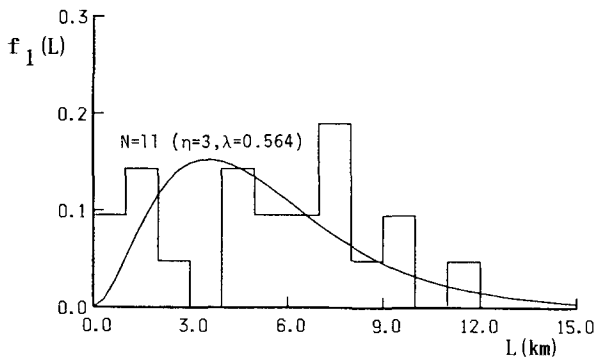


図-5 (c) リンク長の頻度分布 (国土数値情報)

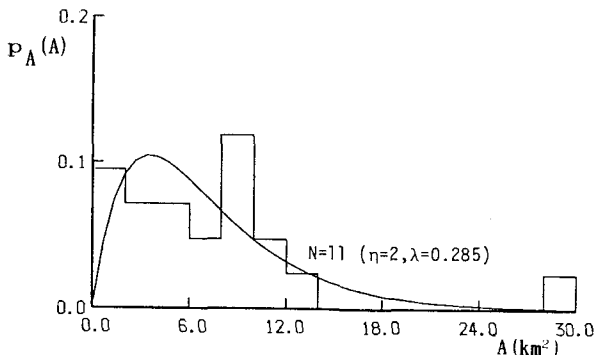


図-5 (d) 小流域面積の頻度分布 (国土数値情報)

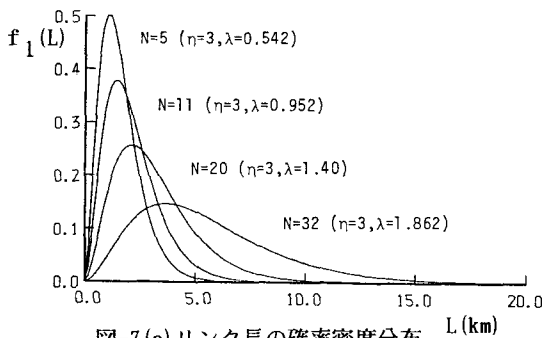


図-7(a) リンク長の確率密度分布

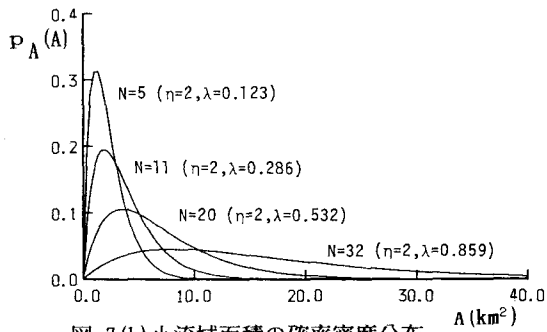


図-7(b) 小流域面積の確率密度分布

求めた平均値と η とから推定でき、分散も計算できる。図-6は平均値と分散の推定結果である。リンク長では $N=20$ 、流域面積では $N=40$ 前後付近から分散がほぼ一定値に落ち着くようである。図-7に $N=5, 11, 20, 32$ の場合の計算に用いた分布形とパラメータ値を示しておく。ガンマ分布はパラメータ η が整数の場合ラプラス変換可能であるので、流量を合成する畳み込み積分は式(10'), (15')のラプラス変換、逆ラプラス変換を用いて計算を進めた。

図-8は、マグニチュード $N=5, 11, 20, 32$ の場合の河道末端における流量の確率密度 $p(Q(t))$ と期待値 $Q(t)$ を示している。図から N が大きくなるに連れて期待値の回りに集中した分布形になることが分かる。図-9は、流量の期待値 $Q(t)$ 、分散 σ_a^2 および変動係数 $\sigma_a/Q(t)$ を示す。図から流量の期待値は N によらずほとんど変化していない。一方、分散は N の増加と共に小さくなって行き、 N をかなり大きくするとある一定値に落ち着く傾向がみられる。この計算例では $N=32$ で分散がほぼ落ち着きつつある。変動係数は計算時間間隔が1時間と粗いため、正確な時間を求めることができないが、いずれの N についても $t=1\sim 2$ (hr)でピーク値を示している。このピークの出現時間の意味については、まだ明確な説明は無理であるが、例えば流出の遅れ時間と関係付けられるのか今後明かにしていきたい。

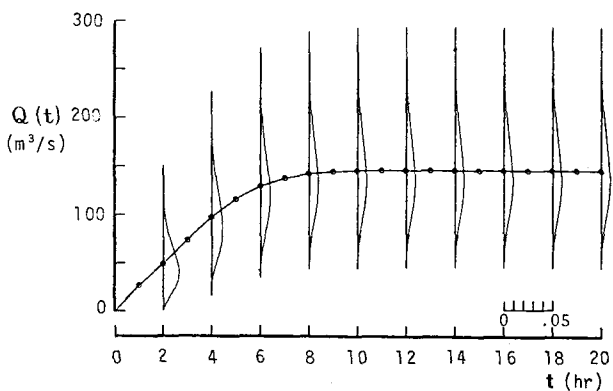


図-8(a) 流量の確率密度分布と期待値 ($N=5$)

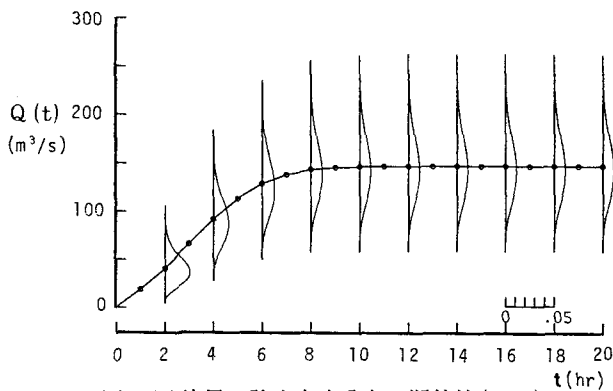


図-8(b) 流量の確率密度分布と期待値 ($N=11$)

5. おわりに

本論文では、河道網の分布特性を考慮した集水過程についての基本的な考え方を提案した。具体的な計算例としては、流域面積が $200 \text{ (km}^2\text{)}$ 以下でマグニチュード N が32までの比較的小さい流域を想定した計算結果だけである。これは式(10), (15)の畳み込み積分は式(10'), (15')のようにラプラス、逆ラプラス変換から解

析的に得られているが、式(17)だけは数値計算で求めている。必要な精度を得るためには計算時間が膨大になり大きなマグニチュードの計算ができなかった。式(17)を解析的に求めることが今後の大きな課題である。

同一の流域を対象にしても、使用する地形図の縮尺により流域のマグニチュードが異なる。当然、単位流域の大きさが異なる。したがって、同一の流域でマグニチュードを大きくする、すなわち流域をより細分化することによって流量の分散がどのように変化するかを明らかにすることは、集水過程を議論する上での Scale の問題を解明する手がかりになる。今後はこの点を念頭において、普遍的なリンク長、流域面積などの地形量の分布特性の検討や集水過程におよぼす地形量の影響を明らかにしていく予定である。

【参考文献】

- 1) 舘谷 清・藤田睦博：河道網特性と貯留関数法に関する研究，水文・水資源学会誌，Vol.2，No.2，1989.
- 2) 友杉邦雄：河域地形構成要素の平面量の分布特性に関する研究，京大防災研究所年報，第19号B，1976.

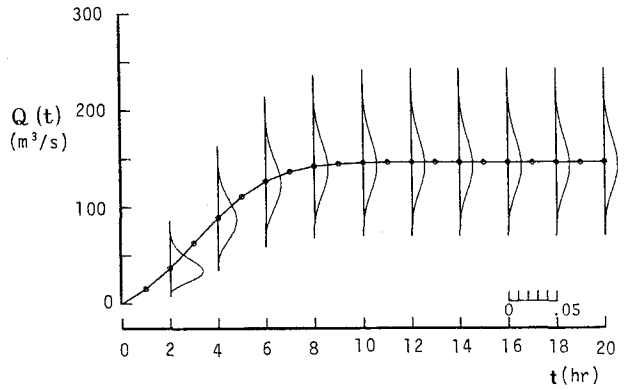


図-8(c) 流量の確率密度分布と期待値 (N=20)

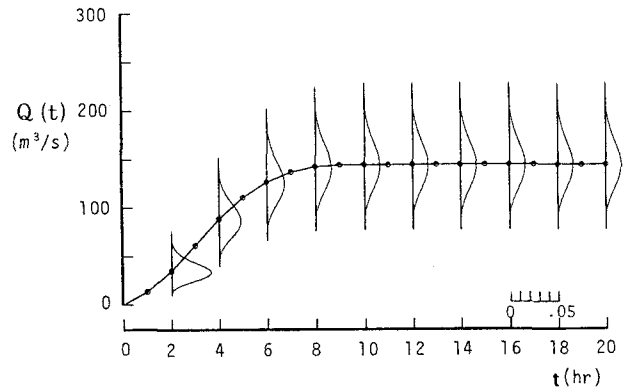


図-8(d) 流量の確率密度分布と期待値 (N=32)

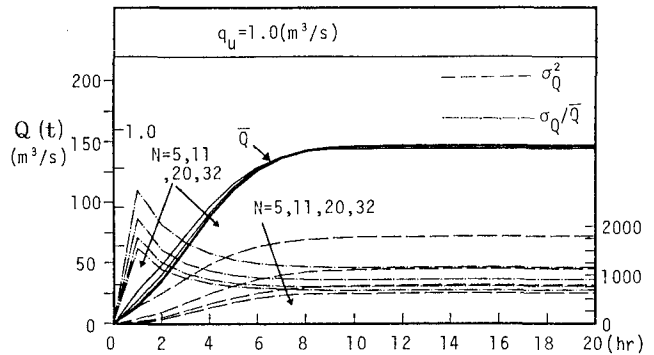


図-9 流量の期待値、分散および変動係数