

II—27

河道網特性を考慮した貯留関数法に関する研究

北海道大学工学部 正員 藤田睦博
 北見工業大学 正員 早川博
 北海道大学工学部 学生員 竜澤宏昌

I はじめに

流域は斜面と河道の2要素から構成されている。斜面は降雨量を流量に変換する場であり、河道は斜面からの流出量を合成、運搬する場である。館谷、藤田¹⁾は、河道における集水過程を河道網理論を用いて解析し、さらに、実用的観点から貯留関数法に含まれるパラメータを河道網の特性量より決定している。本論文も同様な視点から貯留関数法のパラメータを河道網理論を用いて決定しようとするものである。河道網理論より得られる特性量はいずれも期待値である。一方、実流域は一つの実現値と考えられるので、一般に河道網理論より得られる特性量と実流域のそれは一致していない。本研究では、特にこの点に留意して実流域への適用条件について考察している。

II 河道網の基礎理論

本章では、今後の解析の基礎となる河道網理論について簡単に述べる。

リンク-マグニチュード方式による河道網理論では、水源を有する河道を外部リンク、合流点間を結ぶ河道を内部リンクと区別し、流域内に含まれる外部リンクの数をマグニチュードと呼んでいる。マグニチュードがNの流域においては内部リンクが(N-1)個、外部リンクがN個あり、合計(2N-1)個の河道が存在することになる。

また、特に左支川、右支川の区別をしない場合、異なる河道網配列パターンを例を図-2.1に示す。例えば、マグニチュードが4の時、図-2.1に示すように2個のパターンがある。()内はそのパターンの生起確率を示している。この生起確率は次の仮定のもとに得られたもの

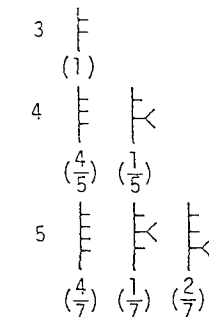


図-2.1 河道網の配列パターンとその生起確率

である。「新しい河道が発生する確率は、河道網を形成する営力が流域全体にわたって等分布しているとした時、どのリンクにおいても均一で

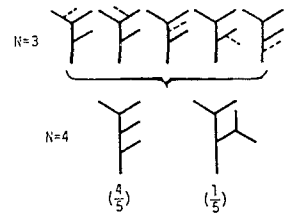


図-2.2 河道網の形成過程

ある。」図-2.2はマグニチュード3の河道網に新しく河道が発生して(破線の河道)、マグニチュード4の河道網になる過程を説明している。

図-2.3に示すようにマグニチュードNの河道網の最下流の合流点において河道網を二つに分割し、それぞれの河道網のマグニチュードがi, N-iとなる河道網パターン群の生起確率P(i, N)は次式により求まる。

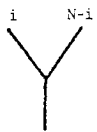


図-2.3

$$P(1, N) = \frac{N}{2N-3}$$

$$2 \leq i \leq [N/2], \quad N \neq 2m$$

$$P(i, N) = \frac{2(2i-3)!N!(N-2)!(2N-2i-2)!}{(i-2)!i!(N-i)!(2N-3)!(N-i-1)!}$$

$$P(m, 2m) = \frac{8m}{(4m-2)!} \left\{ \frac{(2m-1)!(2m-3)!}{m!(m-2)!} \right\}^2 \quad (2.1)$$

P(i, N)を用いると、本流に合流する支流数の平均値 $\bar{M}_n$ は次式より得られる。

$$\bar{M}_1 = \bar{M}_2 = 1, \quad \bar{M}_3 = 2, \quad N \geq 4$$

$$[N/2] \quad (2.2)$$

$$\bar{M}_n = \sum_{i=1}^{[N/2]} P(i, N) (\bar{M}_{n-i} + 1)$$

本流長は $\bar{M}_n$ 個の内部リンクと1個の外部リンクから構成されているので、平均本流長 L_m は次のように表すことができる。ここに、 L_{ex} , L_{in} は平均外部リンク長、平均内部リンク長を示している。

$$L_m = L_{ex} + \bar{M}_n \cdot L_{in} \quad (2.3)$$

一方、Hackは、本流長と集水面積 A_t 間の関係式として次式を提案している。

$$L_m = 1.273 A_t^{0.6} \quad (2.4)$$

式(2.3)において、 $L = L_{ex} = L_{in}$ とすると、式(2.3)、(2.4)より平均リンク長に関して次式を得る。

$$\bar{L} = \frac{1.273 A_t^{0.6}}{(M_n + 1)} \quad (2.5)$$

また、リンクに付随している平均面積 $\bar{A}$ は、式(2.6)で与えられる。

$$\bar{A} = A_t / (2N - 1) \quad (2.6)$$

次節の解析の基本量となる $\bar{L}$ 、 $\bar{A}$ は、集水面積 A_t と流域のマグニチュード N が与えられると計算できるところに特徴がある。

III 河道網における集水過程

河道網における集水過程を一般的に論じるために、河道末端から等しいリンクだけ離れた位置にある小流域数（各リンクに付随している流域数）について考える。例えば、図-2.1の $N=4$ の河道網について述べると

パターン1（生起確率4/5） パターン2（生起確率1/5）

$$C(4, 1) = 1 \quad C(4, 1) = 1$$

$$C(4, 2) = 2 \quad C(4, 2) = 2$$

$$C(4, 3) = 2 \quad C(4, 3) = 4$$

$$C(4, 4) = 2 \quad C(4, 4) = 0$$

ここに、 $C(N, J)$ はマグニチュード N の河道網において河道末端より J 個だけリンクを遡った位置にある小流域数である。したがって、マグニチュード4の河道網では期待値として次の値を得る。

$$C(4, 1) = 1$$

$$C(4, 2) = 2$$

$$C(4, 3) = 12/5$$

$$C(4, 4) = 8/5$$

このように定義した $C(N, J)$ は、次の式により定義できる。

$$C(N, 1) = 1, \quad C(N, 2) = 2, \quad C(3, 3) = 2$$

$$C(N, J) = 0 \quad ; N < J$$

$$2 \leq J \leq N-1, \quad N \geq 4$$

$$C(N, J+1) = \sum_{i=1}^{[N/2]} P(i, N) \{C(i, J) + C(N-i, J)\} \quad (3.1)$$

また、上式の一般式として次式を得た。

$$C(N, J) = \frac{2^{J-2} J (N-2)! (2N-J-1)!}{(2N-3)! (N-J)!} \quad (3.2)$$

$C(N, J)$ に関しては、次式が常に成立していることを付記しておく。

$$\sum_{J=1}^N C(N, J) = 2N-1 \quad (3.3)$$

各リンクに付随している小流域を単位流域と考え、単位流域からの流出量 $q_u(t)$ ($m^3/s/km^2$)が河道を一定の伝はん速度 V で流下するものと仮定すると、マグニチュード N の流域末端における流出量 $Q(t)$ (m^3/s)は次のようになる。

$$Q(t) = \bar{A} \sum_{J=1}^N q_u \left(t - \frac{(J-1)\bar{L}}{V} \right) C(N, J) \quad (3.4)$$

IV 貯留関数法の適用

本節では、前節で得られた河道網における集水過程を貯留関数法に置換する。貯留関数法は、周知のように遅滞時間 t_ℓ 、貯留係数 K 、貯留指数 p の3個のパラメータをもっている。

$$S_\ell(t) = \int_0^{t-t_\ell} r(t) dt - \int_0^t Q(t) dt = K Q(t)^p \quad (4.1)$$

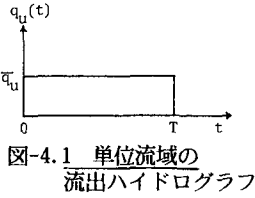
式(4.1)の $r(t)$ として、全ての単位流域からの流出量を用い、 $Q(t)$ として式(3.3)を用いた。単位流域から

$$r(t) = (2N-1)\bar{A} q_u(t) \quad (4.2)$$

の流出量 $q_u(t)$ を与えると、式(3.4)より流域末端における流出量 $Q(t)$ が得られるので、これらから得られる $S_\ell(t) - Q(t)$ 曲線の二価性をできるだけ減少させるように t_ℓ を定めた。

理論的解析を容易にするため、 $q_u(t)$ として図-4.1に示す矩形の流出量を与えた。継続時間 T に関して

は、次式を満たすように定めた。式(4.3)は、到達時間より十分に長い継続時間を有する降雨を対象にしていることを示している。



$$T > (N-1)L/V \quad (4.3)$$

式(3.4)において、単位流域からの流出量 $q_u(t)$ が矩形をしているとき河道末端の流出量 $Q(t)$ は、次のようになる。

$$Q(t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^X C(N, i) \bar{A} \bar{q}_u & [(X-1)L/V \leq t < XL/V] \\ (2N-1) \bar{A} \bar{q}_u & [(N-1)L/V \leq t < T] \\ \sum_{i=Y}^Y C(N, i) \bar{A} \bar{q}_u & [T + (Y-1)L/V \leq t < T + YL/V] \end{cases} \quad (4.4)$$

$$\begin{cases} X=1, 2, 3, \dots, N-1 \\ Y=1, 2, 3, \dots, N-1 \end{cases}$$

式(4.1)、(4.4)を用いて $S_\ell(t) - Q(t)$ 曲線を描くと図-4.2のようになる。 $q_u(t)$ が矩形でも $S_\ell(t) - Q(t)$ 曲線はかなり複雑な挙動を示している。貯留量 $S_\ell(t)$ は式(4.5)のようになる。

$$\bar{S}_\ell(t) = \begin{cases} 0 & [0 < t \leq t_\ell] \\ (2N-1) \bar{A} \bar{q}_u (t - t_\ell) - \int_0^t Q(t) dt & [t_\ell < t \leq T + t_\ell] \\ (2N-1) \bar{A} \bar{q}_u T - \int_0^t Q(t) dt & [t > T + t_\ell] \end{cases} \quad (4.5)$$

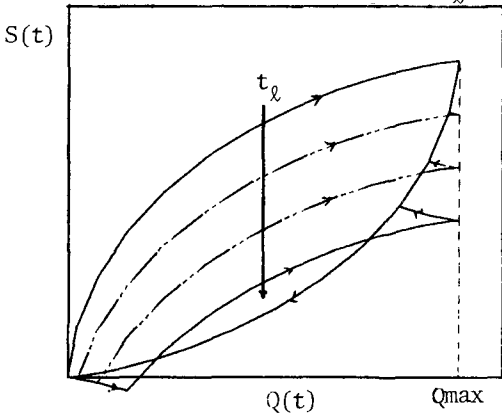


図-4.2 遅滞時間に伴う $S_\ell(t) - Q(t)$ 曲線の移動とその挙動

理論解析を容易にするために $S_\ell(t) - Q(t)$ 曲線を偏平化する最適の t_ℓ は、次式を満足しているものとする。

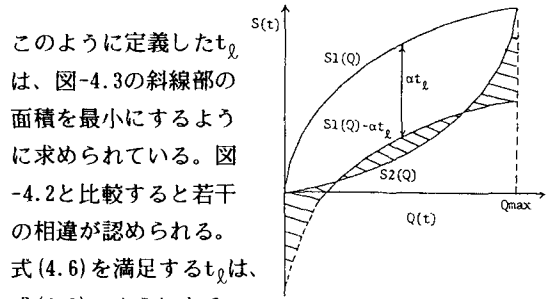
$$\frac{d}{dt_\ell} \left[\frac{1}{Q_{\max}} \int_0^{Q_{\max}} \{S_1(Q) - \alpha t_\ell - S_2(Q)\}^2 dQ \right] = 0 \quad (4.6)$$

ただし、 $S_1(Q)$ 、 $S_2(Q)$ は、 $t_\ell=0$ としたときの増水期、減水期の $S_\ell(t) - Q(t)$ 曲線で、式(4.5)より次のように与えられる。

$$S_1(Q) = (2N-1) \bar{A} \bar{q}_u t - \int_0^t Q(t) dt$$

$$S_2(Q) = (2N-1) \bar{A} \bar{q}_u T - \int_0^t Q(t) dt$$

$$\alpha = (2N-1) \bar{A} \bar{q}_u t_\ell \quad (4.7)$$



式(4.6)を満足する t_ℓ は、式(4.8)のようになる。図-4.3 $S_l(t) - Q(t)$ 曲線の偏平化

$$t_\ell = \frac{1}{(2N-1) \bar{A} \bar{q}_u Q_{\max}} \int_0^{Q_{\max}} \{S_1(Q) - S_2(Q)\} dQ \quad (4.8)$$

式(4.4)、(4.7)を用いて若干の計算後、次式を得る。

$$t_\ell = \frac{0.4L}{V} \sum_{J=1}^N (J-1) \frac{C(N, J)}{(2N-1)} \quad (4.9)$$

いま、式(4.9)において

$$Lme = L \sum_{J=1}^N (J-1) \frac{C(N, J)}{(2N-1)} \quad (4.10)$$

とおくと Lme が遅滞時間 t_ℓ に重要な役割を果たしていることが示された。式(3.3)を考慮すると、次式が成立しているので、 Lme は単位流域より河道網末端にまで至る距離の期待値を意味している。

$$\sum_{J=1}^N \frac{C(N, J)}{2N-1} = 1 \quad (4.11)$$

先に示した図-4.2と図-4.3の若干の差を修正して、最終的に t_{ℓ} として次式を得た。

$$t_{\ell}=\frac{0.5}{V} Lme$$

(4.12)

$$t_{\ell}=0.139Lme/V$$

$V ; \text{ m/s} \quad Lme ; \text{ km}$

貯留関数のパラメータ値 p 及び K の決定に際し、従来は $S_{\ell}(t)-Q(t)$ 曲線を最も偏平化させた状態で、曲線全体に最小二乗法を適用していたが、計算の結果むしろその上昇部についてのみ着目した方が良かった。図-4.4は、 q_u を種々変化させて上昇部の $S_{\ell}(t)-Q(t)$ 曲線を図示したものである。この曲線の包絡線から K, p を求めた。

$$\begin{cases} K=0.159Lme/V & V ; \text{ m/s} \quad Lme ; \text{ km} \\ p=1.0 \end{cases}$$

(4.13)

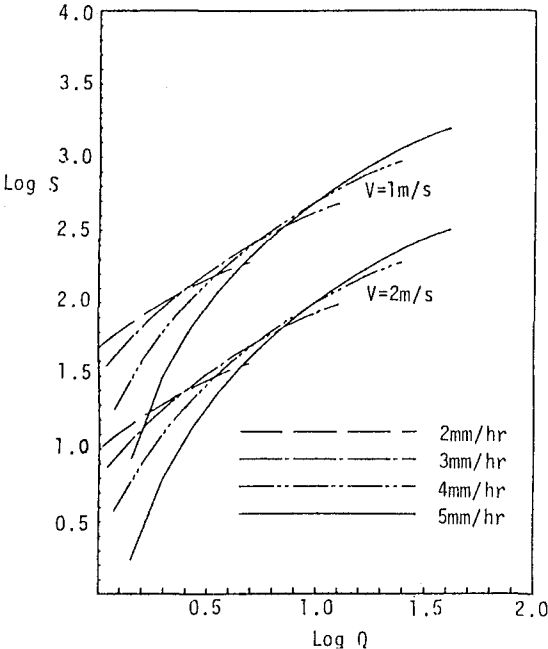


図-4.4 q_u を変化させた $S_{\ell}(t)-Q(t)$ 曲線（上昇部）

V. 実流域における解析

集水面積 A_i 及びマグニチュード N が与えられると全ての貯留関数のパラメータが定まる。ここでは、表-5.1に示す3河川について解析した（五万分の一の地形図を使用）。 Lme' は、実河道網より得られた単位流域から流域末端まで至る河道長の平均値で、次式により求まる。

$$Lme'=\sum_{i=1}^{2N-1} L_{i1}/(2N-1)$$

(5.1)

L は i 番目の単位流域から河道末端まで至る距離である。ここでは、河道網理論より得られる Lme と区別するために「'」を付している。

表-5.1 解析対象河川の流域特性量

	At (km ²)	Mag.	Lme (km)	Lme' (km)
美瑛川	719.03	131	34.52	34.03
徳富川	314.81	62	20.83	21.96
当別川	355.01	47	22.28	42.07

表-5.1によると美瑛川、徳富川は、河道網理論より得られた平均河道長 Lme と実河道網より得られたその値はほぼ等しいが、当別川では異なっている。

一方、マグニチュード N の実河道網に関して、河道末端の流出量として次式を得る。

$$Q'(t)=\sum_{i=1}^{2N-1} A_i q_u(t-L_i/V)$$

(5.2)

式(5.2)は、河道網理論より得られる式(3.2)の $Q(t)$ と区別するために「'」を付している。また A_i は、 i 番目の単位流域の面積である。

いま、単位流域からの流出量 $q_u(t)$ として図-5.1

に示す三角形流出波形を採用する。

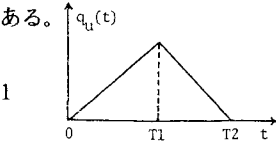


図-5.1 単位流域の流出ハイドログラフ

各河川の貯留関数法のパラメータ値を表-5.2に示す。

表-5.2 解析対象河川のパラメータ ($V=1\text{m/s}$)

	河道網理論			実河道網		
	t_{ℓ}	K	p	t_{ℓ}	K	p
美瑛川	4.80	5.49	1.0	4.73	5.41	1.0
徳富川	2.90	3.31	1.0	3.05	3.49	1.0
当別川	3.10	3.54	1.0	5.85	6.69	1.0

図-5.2 5.4abは、 $T1=15(\text{hr}), T2=30(\text{hr})$ $V=1(\text{m/s})$, $V=2(\text{m/s})$, $T1$ のときの最大流出量を $3.6(\text{mm/hr})$ として、貯留関数法より得られた結果と $Q'(t)$ を比較したものである。貯留関数法より得られた結果を $Q(t)$ 、 $Q'(t)$ と区別するために、ここでは「 $Q''(t)$ 」とした。

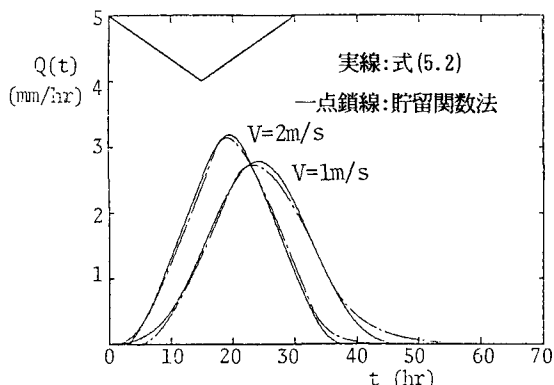


図-5.2 美瑛川における計算例

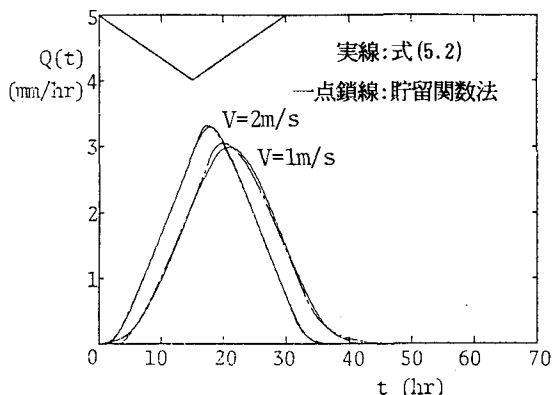


図-5.3 徳富川における計算例

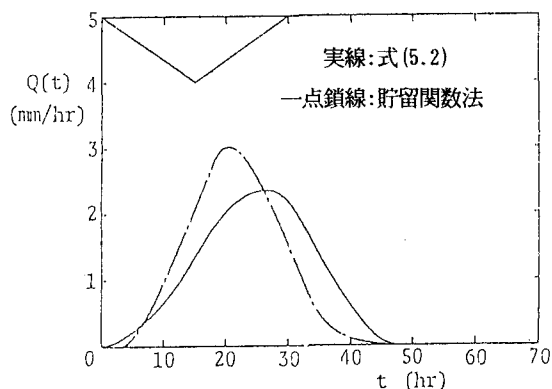


図-5.4a 当別川における計算例 (V=1m/s)

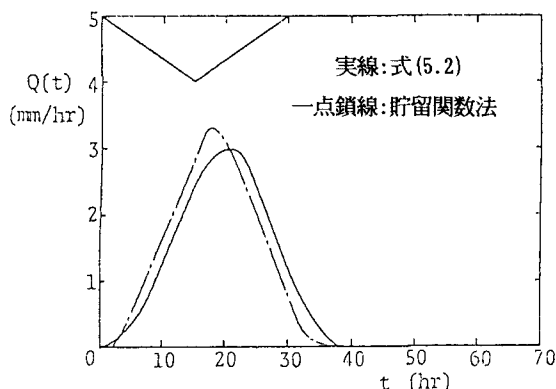


図-5.4b 当別川における計算例 (V=2m/s)

一点鎖線が $Q''(t)$ 、実線が $Q'(t)$ を示している。

Lmeの期待値と実現値がほぼ等しい美瑛川、徳富川については、良好な結果が得られた。一方、これがかなりくい違当別川について、あまり良好な結果は得られない。

リンク-マグニチュード方式による流域特性の把握、特に流域の分割について藤田ら²⁾³⁾によって既に述べられている。図-5.5は、解析対象河川のマグニチュードと流域面積の関係を示す図（以後、N-Area図と呼ぶ）を示している。藤田らは、N-Area図が単一の直線で表されるとき、その流域は流域全体にわたってその特性が均一であり、折曲点がある場合には、その点で流域特性が変化していると述べている。

LmeとLme'がほぼ等しい美瑛川、徳富川では図-5.5b、5.5cに示すようにN-Area図を単一の直線で近似できることが注目される。図-5.5aの当別川の場合には単一の直線で近似できないことは明らかである。当別川の場合、図-5.5aに示される↓の位置で流域を分割した。

図-5.6a、5.6bは、当別川について（N=40の地点で）流域分割を行い得られた結果である。実線は $Q'(t)$ 、一点鎖線は流域分割をしない場合、二点鎖線は流域分割をした場合の $Q''(t)$ である。分割しない時と比較するとかなり改善されており、藤田らの主張を裏づけている。

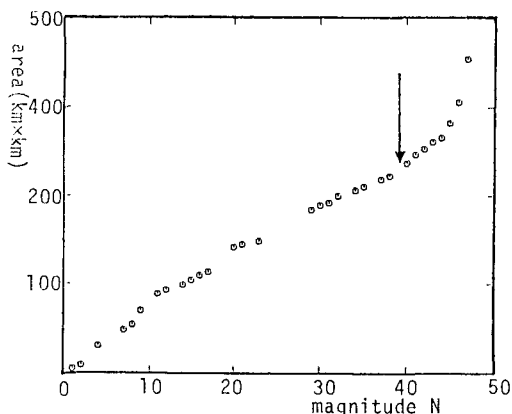


図-5.5a 当別川におけるN-AREAの関係

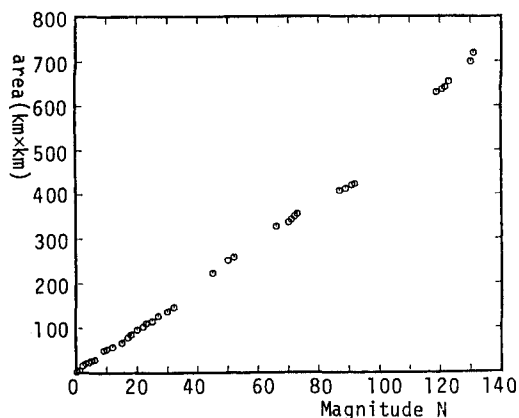


図-5.5b 美瑛川におけるN-AREAの関係

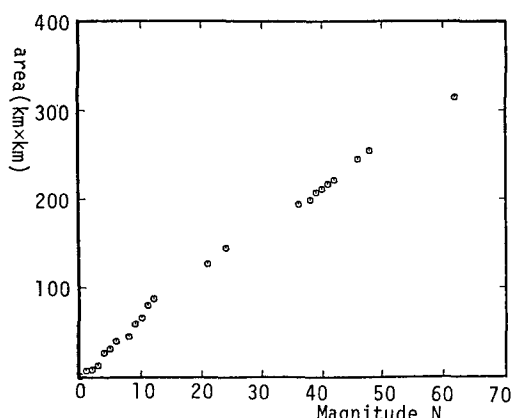


図-5.5c 徳富川におけるN-AREAの関係

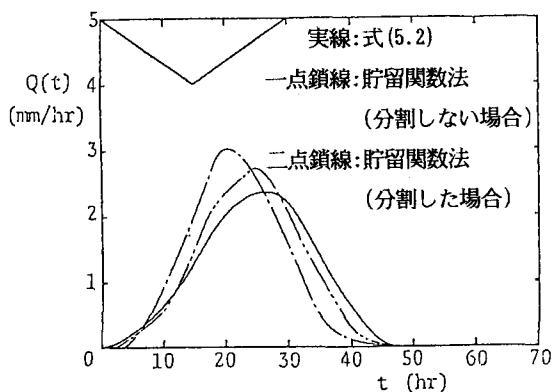


図-5.6a 当別川の解析結果 (V=1m/s)

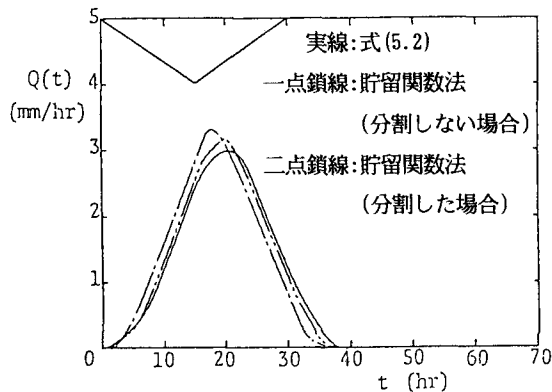


図-5.6b 当別川の解析結果 (V=2m/s)

VI まとめ

河道網理論に基づいて貯留関数法を用い、次の結果を得た。これらの式は、集水面積と流域のマグニチュードが与えられると一義的に定まる。

$$t_l = 0.139Lme/V$$

$$p=1.0$$

$$K=0.159Lme/V$$

$$V ; m/s : Lme ; km$$

遅滞時間 t_l 、貯留係数 K が Lme の関数になることは、館谷らの数値計算例で報告されているが本論文では、これを理論的に証明した。

また、上式を実流域に適用するには、本流に沿って測定した集水面積とマグニチュードの関係図を作成し、この図の折曲点で流域を分割して計算すると、妥当な結果が得られることを示した。

洪水流の伝ばん速度の増大にともない、貯留関数法による解と式(5.2)の $Q'(t)$ は次第に一致する傾向にあることを確かめた。

参考文献

- 1) 館谷 清, 藤田 睦博: 河道網特性と貯留関数法に関する研究, 水文 水資源学会誌, Vol. 2, No. 2, 1989
- 2) 館谷 清, 藤田 睦博, 道口 敏幸: 国土数値情報を用いた流域特性の評価について, 水文 水資源学会研究発表会要旨集, 1989
- 3) 館谷 清, 藤田 睦博, 道口 敏幸: 河道網理論に基づく流域特性について, 第44回土木学会年次講演会論文集, II, 1989