

II-17

山地河川における分岐・合流流れの数値計算法

北海道大学工学部 正員 長谷川和義

北海道大学大学院 学生員 石川 伸

1 はじめに

山地河川は、降雨の集中運搬路であり、沖積河川に対する土砂生産、供給の場である。また、各種開発が山間地域までおよび、防災等への感が高まっている。これらのことをふまえ、山地河川の形態および流れの構造に関する研究が盛んに行われるようになった。著者らも札幌市近郊豊平川支流の小川、冷水川、白水川において、山地河川の流路形態の調査を行い、同時に流れの構造についても考察を加えてきた。¹⁾²⁾ 山地河川の流路形態は大規模な地形的制約を受ける形態から階段状河床のような小規模な形態まで、様々な要因がからみ合い非常に複雑なものになっている。分岐・合流流路も山地河川の特徴であり、これまで調査した山地河川でも数多く見うけられた。分岐・合流流路は変動が激しく、しばしば新河道・廃棄河道を生み出すが、その変動の際に大量の土砂移動が起こっている。したがって、分岐・合流部の流れの性質を知ることが重要であり、いかなる機構によって分岐・合流が生じ、またそれらが変化するかを知る必要がある。一方、射流域での分岐・合流という課題は水理学的に興味深いものであり、これまでに研究例は少ない。

本論文は、分岐・合流流路の流れを特徴づける分岐流量比、分岐・合流角、流路幅変化および勾配が流れに及ぼす影響について検討を加えたものであり、あわせて山地河川に普遍的な常流・射流混在流れを考慮した、分岐・合流流れの数値計算法を提示している。

2 分岐・合流流れの性質

式 (1) (2) は分岐・合流に伴う横流出を考慮したときの連続式と運動方程式である。³⁾

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial (Au)}{\partial x} + q = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial (\beta Au)}{\partial t} + \frac{\partial (\beta Au^2)}{\partial x} + q w \cos \theta = -g A \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\tau_0}{\rho} s \quad (2)$$

ここで、 A =断面積、 u =流下方向流速、 q =単位幅当りの横流出流量（流出を正）、 w =横流出流速、 θ =流出および流入角度、 H =水位 ($=h+Z$)、 β =運動量補正係数、 τ_0 =せん断力、 s =潤辺である。分岐・合流流れは上の2式を基礎式とする。両式中に q が含まれるのは当然であるが、式 (2) には、流出角度 θ が含まれ、一次元解析の場合 θ は流路の分岐角度で表される。また、流路幅、勾配の変化は従来どおり重要な要因である。このように分岐・合流流れを解析する上で、その流路の幾何形状が重要となってくる。

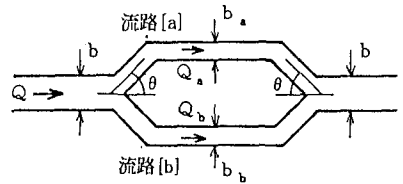


図1 分岐・合流流路モデルの平面形状

図1は分岐・合流流路の平面形状をモデル化したものである。本流から分岐角 θ で分かれた流路は下流で再び合流する。本流部、分岐部での流路幅を b 、 b_a 、 b_b とすると、 $\eta = (b_a + b_b)/b = \eta_a + \eta_b$ 、 $\eta_a = b_a/b$ 、 $\eta_b = b_b/b$ と流路幅に関する3つのパラメーターを導入することができる。また上流からの流量を Q とし、分岐部での流量をそれぞれ Q_a 、 Q_b とすると、 $Q = Q_a + Q_b$ であり、分岐部での流量配分比 r を用いて $Q_a = rQ$ 、 $Q_b = (1-r)Q$ と表しうる。分岐・合流を議論する上で、この分岐流量は非常に重要なファクターである。

著者らは、分岐部の上下流断面に運動量方程式を適用することによって、下流水深の上流水深に対する比に関する解の存在条件を調べ、流量配分比が、その条件に重要な影響を与えることを確かめている。詳細は

A numerical calculation method for supercritical flow in braided channels of mountainous river
by Kazuyoshi HASEGAWA and Shinn ISHIKAWA

紙面の都合上別報に譲ることにするが、上流側で与えたフルード数に対し、解の存在しうる流量配分比は1つではなく、ある範囲内で任意にとりうるものが明らかになっている。とり得る流量配分比の範囲は分岐角度、流路幅等の幾何形状によって決定されるようである。

3 分岐・合流流れの不等流計算

従来、河川の不等流計算を行う場合、流れが常流の場合は下流から上流へ向かって射流の場合は上流から下流へ向かって計算するのが常道であった。この方法を常流・射流が混在する、特に射流域が支配的な山地河川へ適用すると、非常に煩雑なものになってしまう。また開水路の射流では衝撃波や、常流に遷移するときに現れる跳水など、不連続になる場合がある。このような流れを解くために保存形の微分方程式を用いる必要がある。保存形とは式 (3) の形をした非線形方程式で、この型に書ける微分方程式は保存則である。保存則は衝撃波のような不連続の解（弱解）をも認める。

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + S = 0 \quad (3)$$

式 (1) (2) もそれぞれ質量保存則、運動量保存則であり、分岐・合流の計算はこの2式を差分化して行う。このような保存形を利用した開水路流れの差分計算は、かなり最近になって始まったものであり、清水ら⁴⁾、渡邊ら⁵⁾によって積極的に利用されている。

3-1 計算方法

渡邊ら⁵⁾は保存則差分法の1つである、two-step Lax-Wendroff 法をもとに、定常を仮定し常射流混在場での不等流計算法を示した。ここではその方法を分岐・合流流れに適用することにする。定常を仮定し、式 (2) を変形すると

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\tau_0}{\rho h} + \frac{1}{A} (q u - q w \cos \theta) \quad (4)$$

ただし $\beta=1$ 。式 (4) および連続式を図2に示す計算格子に従って差分化すると、

$$\hat{u}_j \frac{u_j - u_{j-1}}{\Delta x} + g \frac{H_j - H_{j-1}}{\Delta x} = -\frac{\sqrt{d_M}}{6.5^2} \frac{u_j \hat{u}_j}{2} \left(\frac{1}{h_j^{3/2}} + \frac{1}{h_{j-1}^{3/2}} \right) + \frac{2q u_j}{(h_j + h_{j-1}) b_j} (1 - \cos \theta) \quad (5)$$

$$Q_{j+1} - Q_j + \Delta x q = 0 \quad (6)$$

上式において、 $\hat{\cdot}$ は繰り返し計算の1つ前のステップの値を示す。また式 (5) のせん断力項の表現は、礫床河川の平均流速式として実測値ともよく適合する Hey 式の射流に対する式 (式 (7)) を、式 (8) のように近似して与えた。

$$\frac{u}{\sqrt{g h I}} = 5.75 \log \left(\frac{a h}{d_M} \right) \quad (7)$$

$$\frac{u}{\sqrt{g h I}} = 6.5 \left(\frac{h}{d_M} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (8)$$

ただし、 d_M は河床構成礫の84%粒径で、白水川の現地調査の結果²⁾ から $d_M = 0.25$ (m) を与えた。式 (7) 中の a は定数で矩形水路の場合 $a = 11.16$ である。境界条件は上流端で流速を下流端で水深を与える。まず上流から下流に向かって式 (5) を用い流速を計算し、次に式 (6) を用い下流から上流へ水深を計算する。以後これを繰り返し、全ての格子点の流量が与えた流量に一致したら計算を打ち切る。図1のような流路では計算の経路が2つあるので、上流端から下流端までそれぞれの経路で計算をすすめる。格子点重複するところでは、諸量が一致しなければならないので、他の経路で計算された量と置き換え、両者が一致するまで計算を続ける。また、分岐流路での流量は流量配分比を最初に仮定することによって与えた。

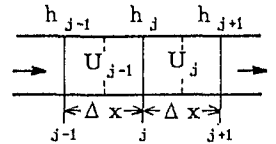


図2 計算格子

3-2 条件設定および結果

2章で述べたとおり、分岐・合流流れの重要なファクターはⅠ) 流量配分化であり、それを決定づけるのは流路の幾何形状である。ここでは分岐流路の幾何形状をⅡ) 分岐・合流角度、Ⅲ) 流路幅、Ⅳ) 勾配と3つに絞り、それぞれの要因について表のような条件を設定した。ただし2つの分岐流路長は一定としている。また、主流路の勾配は現地調査の実績から1/20とし、与えた流量は出水時を想定し20 (m³/s) とした。ここに挙げた要因の全ての組み合わせについて計算を行ったが、それぞれの要因に着目して結果を示す。

Ⅰ) 流量配分比による影響 まず最も基本となるのは $\theta=0^\circ$ 、 $\eta=1$ 、勾配一定の場合である。その場合の結果を図3 (a) (b) に示す。それぞれ流量配分比がちがひ、 $r=\eta_a/\eta$ 、 $r>\eta_a/\eta$ の場合に対応する。図中の実線が主流路と分岐流路[a]の水面、破線が分岐流路[b]の水面であり、点線は等流水深である。分岐部は $x=19$ (m) であり、合流部は $x=60$ (m) である。図には分岐後の2つの流路の水面形を重ねて示している。図3 (a) のように、流路配分比が幅比に等しいという条件すなわち $r=\eta_a/\eta$ であれば、全域等流水深で流れる。この流量配分比より、大きい場合を計算したところ図3 (b) のような結果が得られた。この場合、分岐流路の等流水深が違い、それぞれその水深で流れようとする傾向を示す。また、分岐点の上流に弱い跳水が認められるほか、2つの分岐流路のうち等流水深の低い方の流路の合流点上流においても弱跳水が生じている。この現象は、射流どおしの接続でも、下流側の等流水深が大きい場合に起るようであり、一度跳水によって常流化した後に常流→射流へと遷移する。また、任意の配分比のもとで全て計算が可能なのではなく比の値によって計算が出来たり出来なかったりする。先に述べた配分比のとりうる範囲が、計算上でも現れているようである。

Ⅱ) 分岐・合流角度の影響 図4は、 $\theta=90^\circ$ 、 $\eta=1$ 、勾配一定の場合で、分岐・合流角度による影響をみたものである。流量配分比をそれぞれ変えた結果も得ているが、その影響は図3 (a) (b) に示したものと本質的に同じである。紙面の都合上、それらは省略する。図4を見ると合流部直前に跳水が発生する。式(1) (2) から明らかなよ

Ⅰ) 流量配分比	1. $r=\eta_a/\eta$ 2. $r>\eta_a/\eta$ 3. $r<\eta_a/\eta$
Ⅱ) 分岐・合流角度	1. $\theta=0^\circ$ 2. $\theta=90^\circ$
Ⅲ) 流路幅変化	1. $\eta=1$ 2. $\eta=1.25$ 3. $\eta=0.8$
Ⅳ) 勾配 (分岐流路)	1. 一定 2. 凹型 (0.075→0.025) 3. 凸型 (0.025→0.075)
$Q=20\text{ (m}^3\text{/s)}$ $I=0.05$ $b=20\text{ (m)}$ $b_a=12\text{ (m)}$ $b_b=8\text{ (m)}$	
$\eta = \frac{b_a + b_b}{b}$ $r = \text{流量配分比}$	

表 計算条件一覧

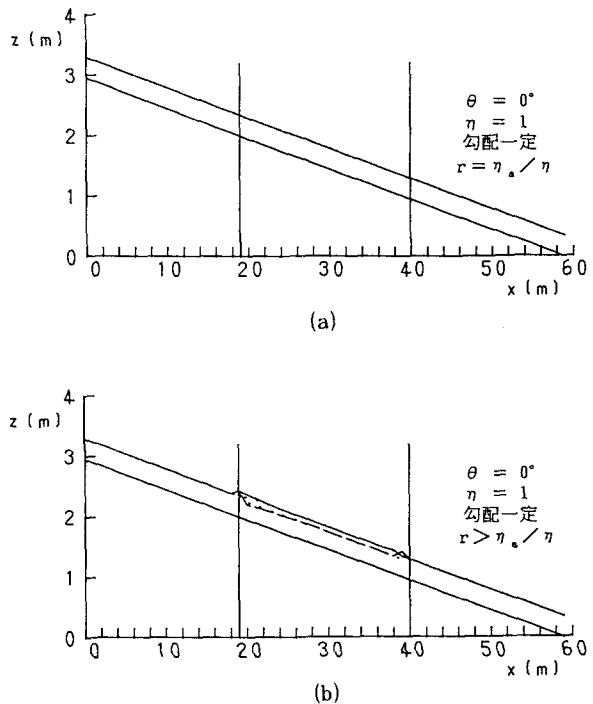


図3 流量配分比による水面形への影響
 — 主流路、分岐流路[a]の水面形
 - - 分岐流路[b]の水面形
 等流水深

うに流入流出量に関する項が式 (1) では残るが式 (2) では消えてしまう。この影響が顕著に現れているものといえる。また椿³⁾によると分岐部では $w \cos \theta = u$ としてよく、ここでもそれを採用している。

Ⅲ) 流路幅変化の影響 図5、6は流路幅が変化する場合でそれぞれ $\eta = 1.25$ 、 $\eta = 0.8$ に対応している。図5では分岐部上流で水深が上がり弱跳水が現れており、合流部では水深が下がる。図6はその逆である。 $\eta > 1$ は、単一の直線流路が急縮してその後急拡するのと同質的に同じである。そのような流路で計算を試みたところ、急縮部で水深が上がり、急拡部で下がるという結果を得た。これは図5、6と同じ結果である。ところで、急拡部での水深の減少は不連続であり、不自然な結果となっている。急拡部での流れは本来、三次元的である。すなわち、隅部に剥離が生じ、壁から強い衝撃波が起こって、水路断面積と実際に流体が流れている断面積に違いが生まれる。このため一次元的解析法では断面積が過大に評価されている可能性がある。運動量補正係数でこの点を改善するとするという方法も考えられるが、その値は流況によって大きく異なるものと思われ、このへんに一次元解析の限界があるものといえる。

Ⅳ) 勾配変化の影響 図7は分岐流路の1つの勾配が変化する場合(凹形)の結果である。本来、流れが射流であれば下流側の諸量の変化の影響が上流へ伝わらないはずである。実際、図においても分岐流路の勾配変化に対応するその場の水面の変化が見られるが、それによる影響は分岐部にまで及んでいない。このことは、凸形河床の場合についても言える。

以上、表に示した個々の要因が水面形に与える影響を見てきた。2、3の要因を組み合わせた例を図8に示す。同図から分かるように、水面形はそれぞれの要因の影響が絡み合い複雑なものとなっている。しかし、水深の変化は分岐点の上流部および合

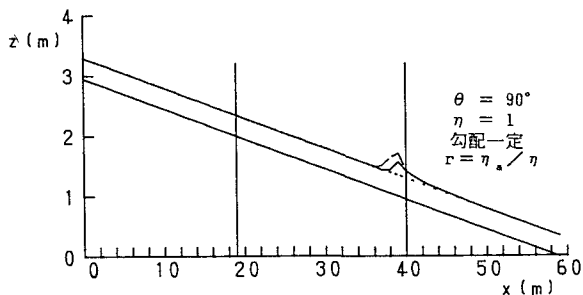


図4 分岐・合流角度による影響

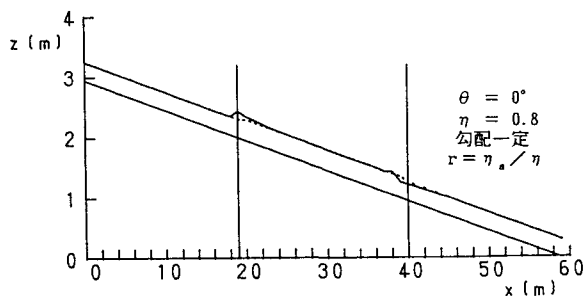


図5 流路幅による影響 ($\eta < 1$)

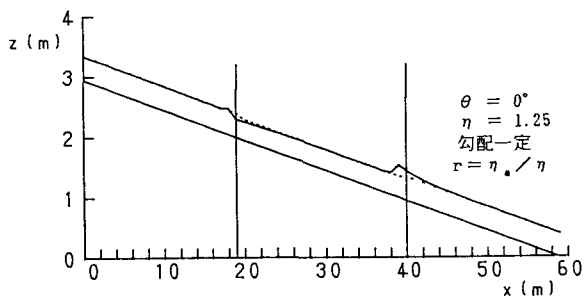


図6 流路幅による影響 ($\eta > 1$)

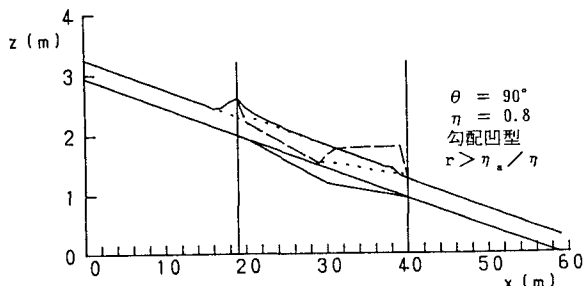


図7 勾配変化による影響
($I=1/13.3 \rightarrow 1/30$)

流点の上流部に集中してした現れており、これは、砂礫の移動を考慮したとき、重要な意味を持つものと思われる。すなわち、この部分での水深、流速の変化は、砂礫の運搬、堆積に大いにかかわってくる。分岐流路が出水時に突発的に変化することを、このことから説明できるかも知れない。このことは、今後の課題である。

3-3 MacCormac法⁶⁾による検討

前述の方法は、本来なら非定常で扱う方程式に定常を仮定しているの、厳密に保存形をなしているとはいえない。そこで保存形差分法である MacCormac法を用い、前述の方法の適合性を検討する。

MacCormac法はtow-step Lax-Wendroff法の一つで時間、空間方向ともに2次精度の差分スキームであり、格子点上の値だけでスキームを記述できるので扱いが便利である。基礎式は式(3)であり、その内容は式(9)、(10)、(11)である。

$$U = \begin{bmatrix} A \\ A u \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$E = \begin{bmatrix} A u \\ (u^2 + g H) A \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$S = \begin{bmatrix} q \\ q w \cos \theta + \frac{u^2}{6.5^2} \left(\frac{d_M}{h} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{A}{h} - g H \frac{\partial A}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (11)$$

スキームを式(12)、(13)にしめす。

<予測子段階>

$$\bar{U}_j = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \{ (E_j^n - E_{j-1}^n) - (Q_j^n - Q_{j-1}^n) \} - \Delta t S_j^n \quad (12)$$

<修正子段階>

$$U_j^{n+1} = \frac{1}{2} (U_j^n + \bar{U}_j) - \frac{\Delta t}{2 \Delta x} \{ (\bar{E}_{j+1} - \bar{E}_j) + (\bar{Q}_{j+1} - \bar{Q}_j) \} - \Delta t \bar{S}_j \quad (13)$$

ただし、

$$Q_j^n = \frac{k}{8} (U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n) \quad (14)$$

$$\bar{E}_j = E(\bar{U}_j)$$

式(11)は高次の人工粘性項であり、kは定数である。

前述の方法との比較を可能にするために計算条件は一致させてある。計算はCFL条件、von Neumanの安定条件を満足するように $\Delta t = 0.1$ (sec)、 $\Delta x = 1.0$ (m)とし⁶⁾⁷⁾、定常になったところで計算を打ち切った。結果を図9(a)、(b)に示す。図9(a)は図3(a)と計算条件が同じであり、図9(b)は図5と同じである。図9(a)と図3(a)を比較してみると、図3(a)では全域等流水深で流れるのに対して、図9の分岐部と合流

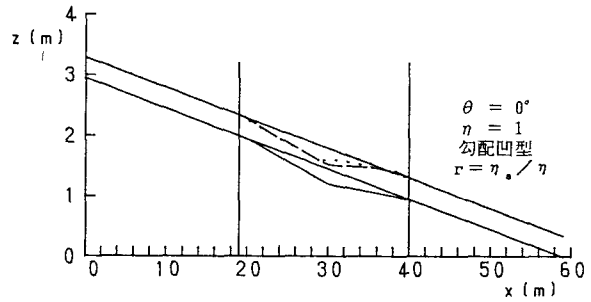


図8 流量配分比、角度、幅変化及び勾配変化を考慮した計算例

部に振動が認められる。MacCormac法の欠点は衝撃波の前後に数値的振動が発生することである。これは打ち切り誤差のなかの奇数微係数の項の分散作用によるものであり、 Δt を小さくすると著しくなる。分岐・合流部では、流出または流入流量による項がデルタ関数的に作用するので、図中の振動はこのような性質のものであると考えられる。また、他の部分にも数値的なふらつきが見られる。これを除けば、図3 (a)、図5と比較してそれほど大きな違いは認められず、定常を仮定した前述の方法でも十分現象を再現できるようである。

4 おわりに

山地河川に数多く見受けられる分岐・合流流路について、その流れの数値計算法を提示し、その結果から様々な要因の水面形に対する影響を考慮した。ここに示した定常を仮定したtwo-step Lax-Wendroff法は、扱いが簡単で、河床変動計算に積極的に応用されている。⁴⁾⁵⁾ 今後は河床変動を取入れ、分岐・合流流路の突発的な変動、さらには分岐・合流流路の形成過程を解明したいと考えている。

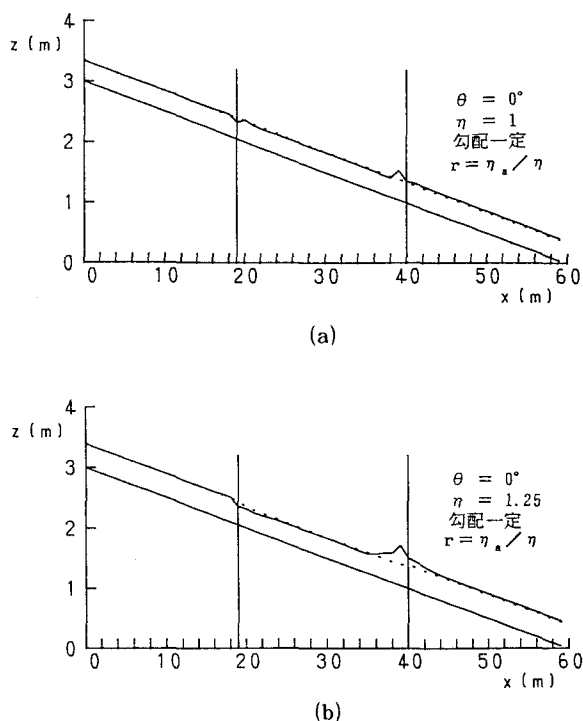


図9 MacCormac法による計算結果

謝辞：本研究は平成元年度文部省科学研究費一般(c)の補助を受けた。また、北海道大学森明巨氏、北海道開発局渡邊康玄氏から保存形差分法について多くの教示を頂いた。末尾ながら深謝の意を表す次第である。

【参考文献】

- 1) 長谷川和義：山地河川の形態と流れ、水工学シリーズ88-A-8、1988
- 2) 長谷川和義・石川伸・高橋一浩：山地河川の分岐流路形態とその変動－白水川調査より、土木学会北海道支部論文報告集第46号、1990
- 3) 椿東一郎：水理学Ⅰ、基礎土木工学全書6、森北出版、1973
- 4) 清水康行・板倉忠興：河川における二次元流れと河床変動の計算、北海道開発局土木試験所報告、No. 85、1986
- 5) 渡邊康玄・許士達広・村上泰啓・崇田徳彦：常流・射流混在場での不等流計算と河床変動計算、北海道開発局土木研究所月報、No436、1989
- 6) 流れの数値シミュレーション、日本機械学会編、コロナ社、1986
- 7) 土木工学における数値解析／基礎編、土木学会編、サイエンス社、1974