

II—15

粉砕・摩耗過程と分級作用を考慮した 河床砂礫の粒度分布の形成に関する研究

北海道大学工学部 正 員 山田 正
北海道大学大学院 学生員 大前 智敬

1. はじめに

従来の研究より、砂礫河川の流下方向における縦断粒径分布の特性変化は、次にあげられる二つの要因によって説明されてきた。(1) 粒径のより細かい土砂が優先的に下流方向へ運ばれ、大きい粒径土砂が順に上流に残されるという選択分級作用。(2) 個々の土砂が衝突したり、擦れ合ったりして、粒径が減じるという粉砕・摩耗作用。また、風化等による粒径減少などがある。Sternberg (1) は、砂礫が流下方向に移動する間に粒径が指数関数的に減少するという摩耗説を説いた。また、矢野・土屋・道上 (2) により実測および理論的研究がなされ、流下方向の粒径特性変化は分級作用に強く依存していると述べている。現在、この分級作用の考え方が支配的になっているが、この考えでは河床は上昇傾向になくなくてはならない。これに対して、小玉・池田・伊勢屋 (3) により破碎・摩耗効果の重要性が述べられ、実測および実験により検証されている。また、Parker (4) により摩耗と分級の二つの組合せの効果が、山本 (5) によりセグメント (ほぼ同一勾配を持つ区間) の形成による河川の縦断形および河床材料の縦断方向の変化が述べられている。粒径特性に関しては、岩種が大きく作用することが述べられている。

本研究は、粉砕および摩耗の効果と分級作用の両方の立場より理論式を導入し、粒径特性変化の傾向を見ようとするものである。本研究はまず定常状態で固定床の場合を考え、式の持つ特性を見るものとする。結果として、粉砕に関する関数の特性により、粒径特性が変化することがわかった。

2. 粒度特性を表す基礎式

粒度特性を考えるにあたって、粉砕・摩耗および分級の二つの作用が相絡み合っていることがわかる。そこで、これらの作用を同時に含む一般的な基礎式を導く。粉砕過程の数学的表現においては、粉体工学の分野で発展してきた物質収支に基づく微積分方程式を用い、これに分級の効果を粒径別移流速度の違いとして表現する方程式を新たに提案する。

2-1 粉砕過程を表す基礎式

粉砕確率を粒径の関数として、物質収支式を適用する。粉砕時間 t における粒径 r 以下の質量分率を $D(r, t)$ とする。そこで、粒径 r から $r+dr$ の間の割合は、

$$W = \left\{ \frac{\partial D(r, t)}{\partial r} \right\} \quad (1)$$

と表すことができる。時間 t から $t+dt$ の間に W の中で粉砕されるものの全体に対する割合を dW' とすると、 dW'/dt と W の比 $S(r)$ は、単位時間当りの粒径 r の粉砕される割合を表す。

$$S(r) = \frac{dW'/dt}{W} \quad (2)$$

また、粒径 p のものがこわれて粒径 r 以下になる割合を $B(r, p)$ とすれば、 dW' の中で r より小さい量は、(1)、(2) 式より、

$$B(r, p) dW' = \left\{ \frac{\partial D(p, t)}{\partial p} \right\} S(p) B(r, p) dp dt \quad (3)$$

と表される。以上より、粉砕過程を表す物質収支式は、次式のように、時間 $t=0$ において r より小さいものの

On the particle size distribution of River Bed Materials

by Tadashi YAMADA and Satoyuki OOMAE

質量分率と t 時間の粉碎によって r より大きい粒径のものから生成した割合との和によって表される。

$$D(r, t) = D(r, 0) + \int_0^t \int_r^{r_{\max}} \left\{ \frac{\partial D(p, t)}{\partial p} \right\} S(p) B(r, p) dp dt \quad (4)$$

また、 dt 時間に着目した粒径 r と $r+dr$ の間にある粒子の質量分率変化は、その部分から粉碎されて出ていくものと、 r より大きい各粒子が粉碎されてその着目した部分にはいつてくるものの総和との和によって表される。よって、(4)の収支式は、次のように書き表すことができる。

$$\frac{\partial^2 D(r, t)}{\partial t \partial r} = - \frac{\partial D(r, t)}{\partial r} S(r) + \int_r^{r_{\max}} \frac{\partial D(p, t)}{\partial p} S(p) \frac{\partial B(r, p)}{\partial r} dp \quad (5)$$

ここで、

$$f(r, t) = \frac{\partial D(r, t)}{\partial r} \delta, \quad C(r, p) = \frac{\partial B(r, p)}{\partial r} \quad (6a, b)$$

とおくと、(5)式は次のように書き表される。

$$\frac{\partial f(r, t)}{\partial t} = -f(r, t) S(r) + \int_r^{r_{\max}} f(p, t) S(p) C(r, p) dp \quad (7)$$

ここで、 δ は掃流層厚で $\int_{r_{\min}}^{r_{\max}} f(r, t) dr = \delta$ 、 $C(r, p)$ は $p \geq r$ で p がこわれて r から $r+dr$ になる割合で $\int_{p_{\min}}^p C(r, p) = 1$ である。このように、粉碎過程は、 $S(r)$ と $C(r, p)$ の二つの関数を定義することにより記述することができる。

2-2 粒径別連続式

粒径別に以下の連続式が成り立つ。単位幅で考えて、

$$\frac{\partial h(r)}{\partial t} + \frac{\partial q(r)}{\partial x} = 0 \quad (8)$$

ここで、 $h(r)$ は粒径別掃流層厚、 $q(r)$ はある断面を通過する粒径別流砂量である。よって、掃流層厚 δ および全流砂量 q_s は、

$$\delta = \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} h(r) dr, \quad q_s = \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} q(r) dr \quad (9a, b)$$

となる。(8)式を変形すると、

$$\frac{\partial q(r)}{\partial t} + c(r) \frac{\partial q(r)}{\partial x} = 0 \quad (10)$$

となる。ここで、 $c(r) = \frac{\partial q(r)}{\partial h(r)}$ であり、土砂の粒径別伝播速度である。(10)式において分級作用の効果が含まれていることがわかる。

2-3 粒度特性を表す基礎式

流砂量 q および粒径の質量分率 f は、粒径 r 、距離 x 、時間 t の関数である。 q と f の関係は、

$$q(r, x, t) = v(r) f(r, x, t) \quad (11)$$

となる。ここで、 $v(r)$ は粒径別流砂速度である。よって、(7)、(10)、(11)式より、粒度特性を表す一般的な基礎式は次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(r, x, t)}{\partial t} + c(r) \frac{\partial f(r, x, t)}{\partial x} \\ = -f(r, x, t) S(r) + \int_r^{r_{\max}} f(p, x, t) S(p) C(r, p) dp + K \frac{\partial^2 f(r, x, t)}{\partial x^2} + \text{source} + \text{sink} \end{aligned} \quad (12)$$

また、以後の計算において、粒径別伝播速度 $c(r)$ と粒径別流砂速度 $v(r)$ は近似的に等しいとする。

3. 粒度特性の表現

定常状態の固定床の場合について考える。(12)式は次のようになる。

$$c(r) \frac{\partial f(r, x)}{\partial x} = -f(r, x) S(r) + \int_r^{r_{max}} f(p, x) S(p) C(r, p) dp \quad (13)$$

(13)式において、先に述べたように、関数 $C(r, p)$ 、 $S(r)$ を定義することにより粉碎過程を記述することができる。またこのことは、粒径特性変化の傾向を見ることを意味する。特に、 $C(r, p)$ の定義によりその傾向は顕著に現れる。要するに、 $C(r, p)$ を変えることにより、岩種別の粉碎の効果を表すことになる。

3-1 粉碎・摩耗の三表現

粉碎・摩耗の形態は、図-1に示すような三つの場合が考えられる。それを式に表すと、

$$C(r, p) = m \left(\frac{r}{p} \right)^m \frac{1}{r} \quad (14, A)$$

$$C(r, p) = \frac{1}{p} \frac{1}{B(q, s)} \left(\frac{r}{p} \right)^{q-1} \left(1 - \frac{r}{p} \right)^{s-1} \quad (14, B)$$

$$C(r, p) = \frac{1}{p} \frac{1}{Be} \cdot Rp \quad (14, C)$$

となる。ここで、 $Be = B(q_1, s_1) + B(q_2, s_2) - bB(q_3, s_3)$ 、 $Rp = \left(\frac{r}{p} \right)^{q_1-1} \left(1 - \frac{r}{p} \right)^{s_1-1} + \left(\frac{r}{p} \right)^{q_2-1} \left(1 - \frac{r}{p} \right)^{s_2-1} - b \left(\frac{r}{p} \right)^{q_3-1} \left(1 - \frac{r}{p} \right)^{s_3-1}$ である。図-2-A、B、Cは、(14, A)、(14, B)、(14, C)式の関数形を表す。次に、 $S(r)$ および $c(r)$ を定義する。

$$S(r) = k \left(\frac{r}{r_{max}} \right)^n, \quad c(r) = v_0 \exp(-\alpha r) \quad (15a, b)$$

$r = r_{max} \bar{r}$, $x = l \bar{x}$, $f(r, x) = \frac{\delta}{r_{max}} g(\bar{r}, \bar{x})$ および (15a, b) 式を考慮して、(13)式を書き換えると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial g(r, x)}{\partial x} = & -\exp(Ar \cdot \bar{r}) Br \cdot \bar{r}^n g(\bar{r}, \bar{x}) \\ & + \exp(Ar \cdot \bar{r}) Br \int_r^{r_{max}} \frac{1}{p} C(r, p) r_{max} g(\bar{p}, \bar{x}) dp \end{aligned} \quad (16)$$

となる。ここで、 $Ar = \alpha r_{max}$ 、 $Br = \frac{kL}{v_0}$ である。(16)式を基にして数値計算を行う。図-2は、その結果を示したものである。境界条件は、全ての粒径に対して $g(r, 0) = 1$ である。A-a、B-a、C-aは、それぞれの関数形に対して粒径別伝播速度 $c(r)$ を一定とし、A-b、B-b、C-bは、 $v_0 = 1$ 、 $\alpha = 5$ として粒径ごとに $c(r)$ を変えた場合を計算したものである。縦軸は粒径特性の質量分率、横軸は粒径である。各図面の下の図は、 ϕ スケールで表示したものである。これらの図より以下のことがわかる。(1) A-aは単調に増加しているが、B-a、C-aはある粒径においてピークをもつ。このことは、A-bとB-b、C-bにおいても同じことがいえる。(2) B-aとC-a、B-bとC-bを比べると、分布の形状は似ているがC-a、C-bの方が細かい粒径の割合が大きく、ピークは粒径の小さい方に移る。(3) 各々の場合、各 x に対して、 $\phi = -6 \sim -8$ ($r = 0.064 \sim 0.256$)で、 g が同じような値になる。(4) x の値が大きくなるにつれ、ピークの値が粒径の小さい方に移っていくのがわかる。(5) 粒径別に $c(r)$ が違う場合、大きい粒径は速度が遅いため、ある断面(x の値)を通過するまでにほとんど粉碎されてしまう。(6) 流砂量は(11)式に表されるように、速度に関するものであるので、速度一定の場合よりは g の値はかなり小さい。図-3は、図-2-A-aの条件において、境界条件を変えたものである。粒径特性変化の傾向自体は変わらないことが

わかる。このことは、いずれの場合についても同じことがいえる。図-4は、 $r=0.5$ の粒径に着目して図2-A-aの条件で距離 x と g の関係を求めたものである。この図より、 g の値は x に対して指数的に減少しているのがわかる。また、 $c(r)=\text{const}(\alpha=0)$ 、 $m=n$ で(14,A)式の場合の解析解を求めると次式のようにになる。

$$g(r, x) = \exp(-Br \cdot r^n x) [1 + nBr(1-r)r^{n-1}x] \quad (17)$$

$n=0.4$ 、 $Br=0.00005$ ($v_0=1$ 、 $k=5 \times 10^{-10}$ 、 $L=100 \times 10^3$)とすると、図-2-A-aと同じ図になる。

以上の図より遷移確率 $c(r, p)$ の形状の違いにより、粒度分布 $g(r)$ の流下方向の変化は大きくなっていることがわかる。すなわち、図1-Aに示す、単調減少タイプの $c(r, p)$ をとるときには、粒径の小さいものが流下につれて急激に増大する。一方図1-B、図1-Cに示す単峰形あるいは双峰形の $c(r, p)$ をとるときには、粒度分布は粒径の小さいある値の近傍でピーク値をもつ単峰形を示す。次に粒径ごとに異なった伝播速度を有する場合の図2-○-bと図2-○-aを比較すると、分級作用のため大粒径の石礫は急速に減少していることがわかる。 $g(r)$ に及ぼすその他の効果は分級作用を考慮しない場合とする場合では大差のない結果となっている。さらに図3に示す境界条件の違いは、大粒径の部分で大きな違いを生じさせているものの、小粒径の部分ではどのような上流端の境界条件を用いてもその違いは小さい結果となっている。また図4に示すように1つの粒径に着目してその存在割合を流下距離ごとに示すと、 $c(r, p)$ の形状を支配するパラメータ m, n 値の大小にかかわらずほぼ指数関数的に減少していることがわかる。

おわりに

本研究は河川における河床材料の流下方向の粒度分布の変化を説明する試みの第一歩として、固定床、定常状態における粒度分布の流下方向変化を支配する方程式を提案した。本研究により粉碎、摩耗を表現する数学表現としては本文中に示した $c(r, p)$ であり、結果はその関数形に大きく依存している。一方分級効果は粒径別移流速度の違いとして表現し得ることが分かった。今後は上記の基礎方程式に移動床としての効果を取り入れ、歴史スケールの時間間隔における河床変化、地形変化等を解析していく予定である。

謝辞 本研究の遂行に当たり著者は文部省科学研究費、重点領域研究(1)(代表 山田正、北海道大学)の補助を受けている。ここに記して感謝の意を表す。

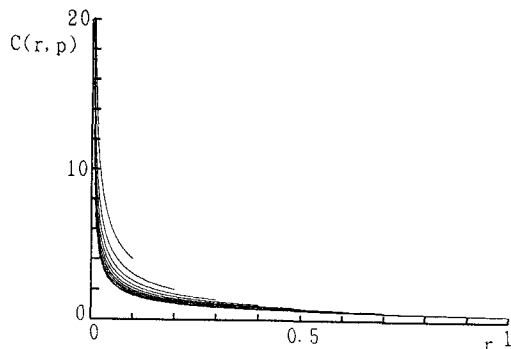


図1-A 粒子の粉碎遷移確率 $C(r, p)$ の1例

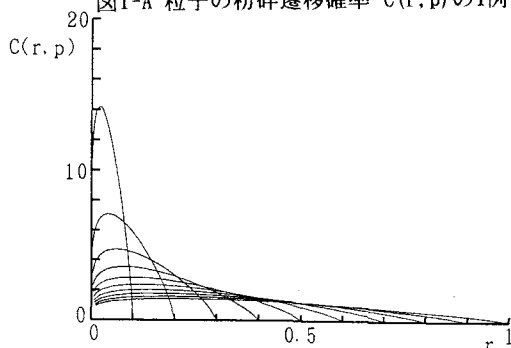


図1-B 粒子の粉碎遷移確率 $C(r, p)$ の1例

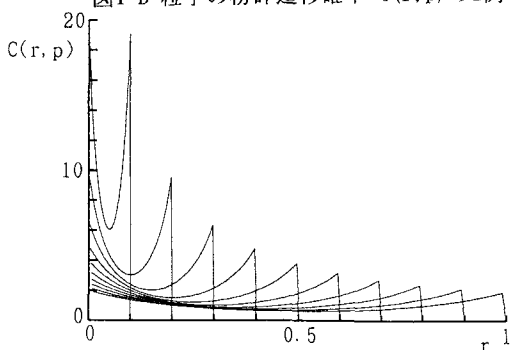


図1-C 粒子の粉碎遷移確率 $C(r, p)$ の1例

流下距離 x をパラメーターとして表した粒度分布 $g(r)$ (下図は ϕ モードでの表現)

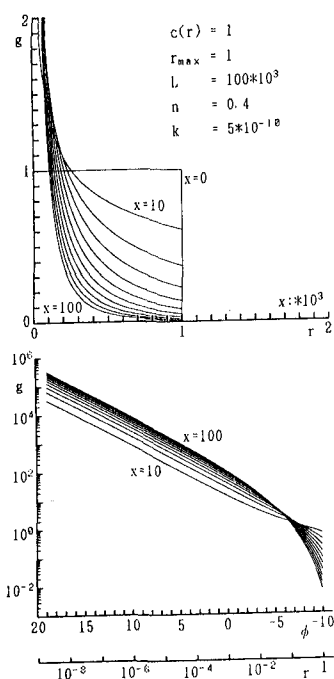


図2-A-a

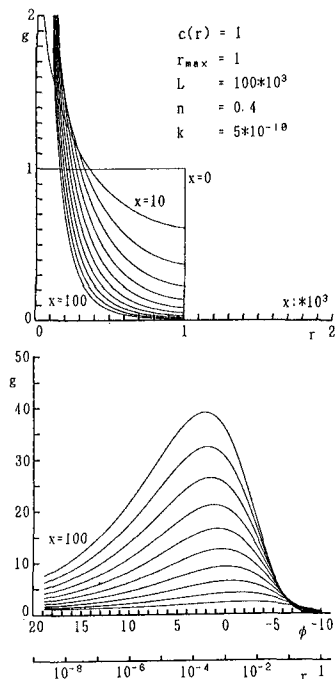


図2-B-a

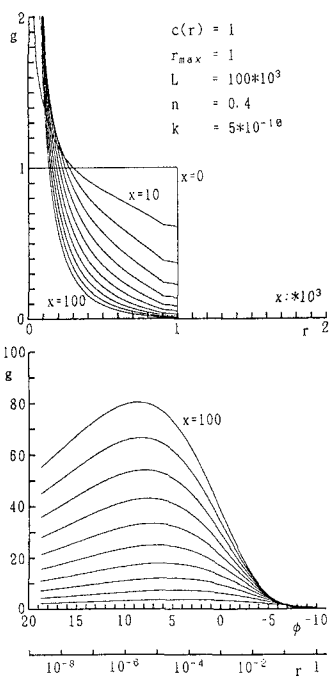


図2-C-a

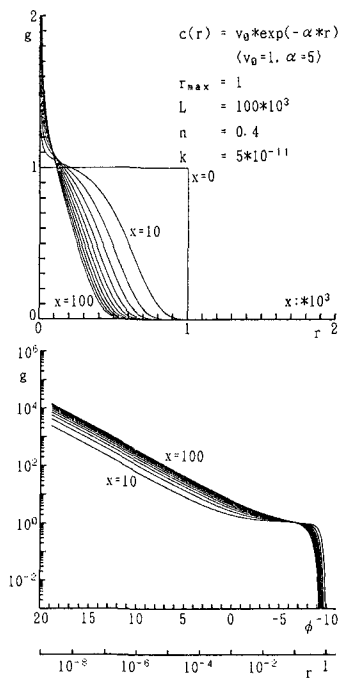


図2-A-b

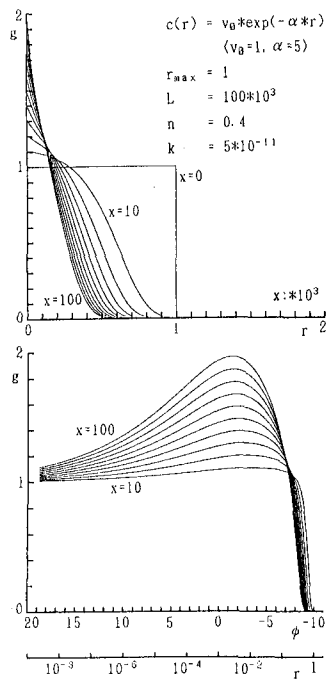


図2-B-b

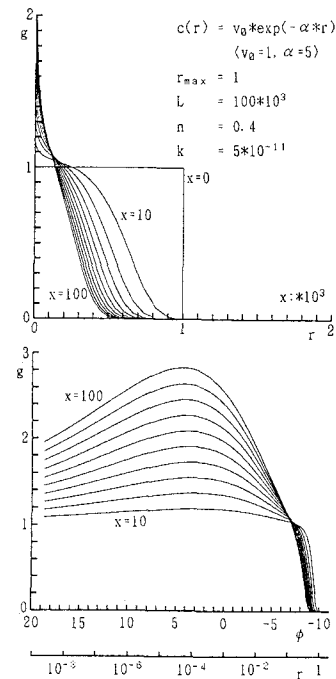


図2-C-b

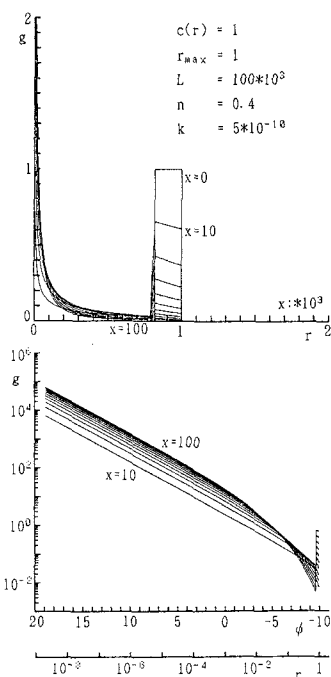


図-3 流下距離 x をパラメーターとして表した

粒度分布 $g(r)$

(上流端の条件は図2とは異なっている。)

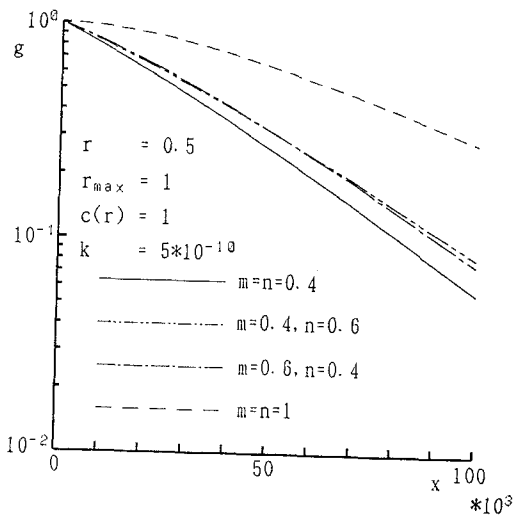


図-4 $r=0.5*r_{max}$ の粒径をもつ粒子の存在割合の
流下方向 x への変化

参考文献

- 1) Sternberg, H.: Untersuchungen über Längen und Querprofil geschiebe führender Flüsse, Zeitschrift für Bauwesen Jahrg. xxv., pp. 484~506, 1875.
- 2) 矢野勝正・土屋義人・道上正規: 沖積河川における河床砂礫の特性の変化について、京大防災研年報、第14号13, 1969.
- 3) 小玉芳敬・池田宏・伊勢屋ふじこ: 渡良瀬川における粒径別岩種植生地の縦断的变化。ー沖積礫小河川における砂礫の破碎摩耗効果の重要性ー、筑波大学水理実験センター報告、No. 13, pp. 13~25, 1989.
- 4) Andrews, E. D. and G. Parker: Formation of a Coarse surface Layer as the Response to Gravel Mobility, Sediment Transport in Gravel-bed Rivers, pp. 269~324, John Wiley & Sons Ltd, 1987.
- 5) 山本晃一: ミニ河川講座 [1] ~ [5]、(財) 河川情報センターニュース、1988~1989.
- 6) 藤田重文・東畑平一郎: 「化学工業Ⅱ、機械的操作」、東京化学同人。