II—10　水と砂の混相流に対する支配方程式について

北海道大学工学部　正　員　浜中　建一郎

1．はじめに

流体中に砂粒子等の他の物質が混入した状態で流れる流れを混相流といい、多くの研究分野の中で重要な問題の一つになっている。山田・日野（1986）はこの問題に関するこれまでの多くの研究を整理し、混相流研究のアプローチの仕方を分類している。その中でも述べられているように、混相流の定式化としては大きく分けてふたとうりある。すなわち、混入物質と流体を一体化した懸濁液として取り扱う一流体モデルと、各々を別の連続体として取り扱う多流体モデルである。

本研究はそのうち後者の場合の一例である Kobayashi and Seo（1985）によって提案された砂と水の混相流に対する支配方程式を取り上げ、そこには述べられていない平均化と連続体化についての著者の考えを述べ、その見方に基ずき支配方程式をあらためて見直し、そこに含まれている問題点を指摘しながら混相流の力学を考えるきっかけを得ようとするものである。

2．多流体モデルに於ける平均化と連続体化

多流体モデルに於ける基本的な考え方は、本来連続ではない速度場を（砂は離散的に存在し、水は砂によって排除された穴を伴って存在する）なんらかの方法で平均化しそれによって連続体とみなすことにより力学的保存則を微分方程式で記述しそれを解くことにより混入物質及び流体各々の挙動を調べようとするのもであると言えよう。そこで、はじめにこの平均化と連続体化について述べる。

混相流体内に体積 V のコントロールボリュームを考える。そのうち砂の占める体積を V_s 、流体の占める体積を V_f とする。このとき境界面上にある砂粒はコントロールボリューム内部に含まれる部分だけを考える。すなわち図１のように、

$$V = dx_1\,dx_2\,dx_3 = V_s + V_f \quad , \quad V_s = \Sigma\, V_{si} \quad , \quad V_f = V - V_s$$

次に、各相（流体で作られる空間と砂で作られる空間）での体積濃度を定義する。

$$c_s = \lim_{V\to 0} \frac{V_s}{V} = \lim_{V\to 0} \frac{\Sigma\, V_{si}}{V} \quad , \quad c_f = \lim_{V\to 0} \frac{V_f}{V} = 1 - c_s \qquad (1)$$

ここで、c_s ：砂相の体積濃度　，　c_f ：流体相の体積濃度

このとき、$V\to 0$ の極限を考える前の各々の体積比を V の関数と見ると、砂粒は離散的に含まれているから、決して滑らかな関数とはなっていない。従ってその極限も厳密には存在しない。しかしながらここでは V の関数とみた体積比が十分滑らかな関数で近似出来ると仮定し、その極限で考えている点の濃度を定義しようとするものである。あるいは言葉を変えるなら、V を適当な大きさからゼロに近ずける時その途中で体積比が一定値の回りで変化していると見なせる状態があると仮定しその値をその中心点の濃度と考えるとも言えるだろう。多くの現実の流体はおおかれすくなかれこのような平均化の基で連続体として扱われていると考えられる。

次に、各相での速度場を考える。

Governing equation of multi-phase flow by Ken-ichiro HAMANAKA

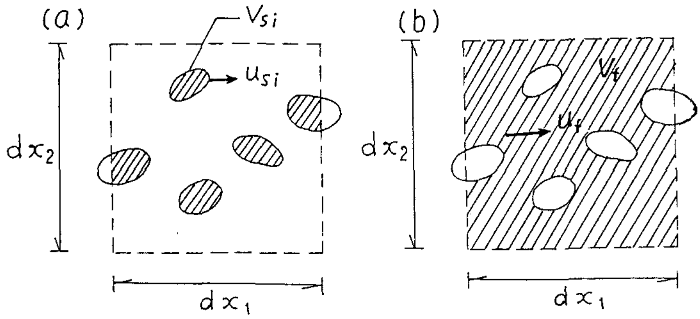

図1

$$u_s = \lim_{V\to 0} \frac{\Sigma u_{si}}{N} \quad , \quad u_f = \lim_{V\to 0} \frac{\int^{V_f} u_f \, dV}{V_f} \tag{2}$$

ここで、u_s : 砂相の速度　, u_f : 液相の速度

すなわち、砂相の速度はコントロールボリューム内に含まれる砂粒の平均速度の極限であり、液相の速度は同ボリーム内に含まれる液体部分の平均速度のそれである。又、極限操作の意味は濃度の場合と同じである。この様にして砂相、液相各々について濃度と速度が全空間で定義されると、各々の相の濃度と密度の積をその仮想連続体の仮想密度として、速度と共に質量保存則や運動量保存則が考えられる。

3．質量保存則、運動量保存則

砂の粒径を一定とし、各々の相で、砂の密度と水の密度を一定とすると質量保存則は、

$$\frac{\partial c_s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} c_s u_{sj} = 0 \quad , \quad \frac{\partial c_f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} c_f u_{fj} = 0 \tag{3}$$

ここで、$c_s + c_f = 1$ の制約条件を用いると、Kobayashi 等のものと一致する。又、同じ制約条件から、

$$\frac{\partial}{\partial x_j} c_s u_{sj} + \frac{\partial}{\partial x_j} c_f u_{fj} = 0 \tag{4}$$

すなわち、砂が多く出ていくなら水が多く入るという連続の式を表す。

次に、各相の i 方向の運動量保存則は、

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_s c_s u_{si} + \frac{\partial}{\partial x_j} \rho_s c_s u_{si} u_{sj} = \frac{\partial}{\partial x_j} \gamma_{ij} - \rho_s c_s g_i + f_i \tag{5}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_f c_f u_{fi} + \frac{\partial}{\partial x_j} \rho_f c_f u_{fi} u_{fj} = - \frac{\partial}{\partial x_i} c_f p - \rho_f c_f g_i - f_i \tag{6}$$

ここで、ρ_s ρ_fは砂と水の密度、γ_{ij} は単位時間に単位体積あたりの砂同士がぶつかり合って及ぼす力、g は重力加速度、p は水中での圧力、f は単位体積あたりの砂が回りの水体から受ける力である。この時、γ や f は厳密には離散的な量であるから、濃度や速度の場合と同様の平均化を考えることにより滑らかな連続量として取り扱う。又、砂の相と水の相は f を通して運動量のやり取りを行い互いに干渉しあう。この時、連続体化したことにより f は互いの相に対しあたかも外力ように働き会う。

(5)式と(6)式は、(6)式の右辺の圧力項に水の濃度がかけられている点を除き Kobayashi等の式と一致する。次に、この圧力項の表現の違いについて述べる。

f は Kobayashi等と同様圧力による力と粘性による力との合力と考える。図２の矢印はその内圧力によるものだけを表しているとする。

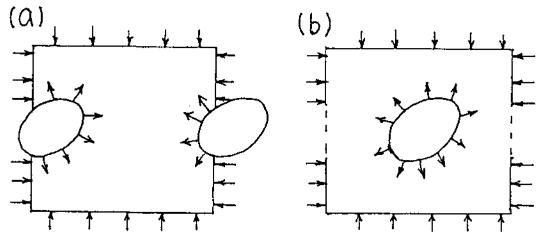

図２

境界面上にある砂に対しては平均的に見ればその対称的位置ににも別の砂があると考えて良いから（図２a）、境界面上の砂がコントロールボリューム内の水に与える力はコントロールボリューム内にある砂が与える力に置き換えられる（図２b）。従って単一粒径の砂を考える時は単にその濃度だけを考えれば良い。すなわち v_0 を１個の砂粒の体積、f_0 をそれに働く力の i 成分とすると、

$$f_i = c_s f_0 / v_0$$

一方境界面上にある砂粒のコントロールボリューム内の面に働く圧力は上に述べた様に f の中に見積られているから (6)式の圧力項は境界面上で水同士が接している面だけを考えなければならない。この時 c_{12} を x_1, x_2 平面での水の面積濃度とすると、体積 $dx_1dx_2dx_3$ 内にある水の体積は

$$c_{12}\, dx_1dx_2dx_3 = c_f\, dx_1dx_2dx_3 \quad 従って、\quad c_f = c_{12} = c_{23} = c_{31}$$

となり、(6)式の圧力項の表現が得られる。

なお (6)式から分かるように水同士の粘性は無視されているが、砂粒に働く粘性力は考慮されているから底部での摩擦力は考えることが出来る。

又、砂粒の回転が回りの流体の運動に及ぼす影響が無視出来ない時は、角運動量の保存則を考慮しなければならない。

４．乱流場での表現

この節では乱流場での混相流を考える。各変量を時間平均量とそれからの偏差に分けて、

$$u_{si} = U_{si} + u'_{si}\,,\quad u_{fi} = U_{fi} + u'_{fi}\,,\quad c_s = C_s + c'_s\,,\quad c_f = C_f + c'_f\,,\quad p = P + p' \quad (7)$$

ただし、$c_s + c_f = 1$ より $C_s + C_f = 1$, $c'_s + c'_f = 0$

２次元定常乱流で x方向には一様な混相流とする。流速成分は図３の様にとる。

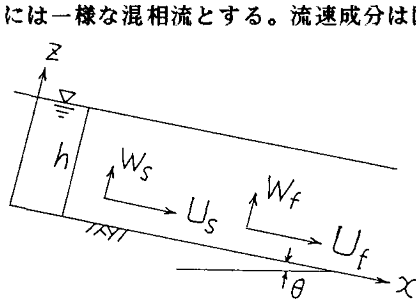

図３

質量保存則を表す(3)式に(7)式を代入して時間平均をとると、

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(C_s W_s + \overline{c_s' w_s'} \right) = 0 \quad , \quad \frac{\partial}{\partial z}\left(C_f W_f + \overline{c_f' w_f'} \right) = 0 \tag{8}$$

となる。(8)式の両相について、水面または砂層の下の固定底では z 方向の流速成分は零であるから、

$$C_s W_s + \overline{c_s' w_s'} = 0 \quad , \quad C_f W_f + \overline{c_f' w_f'} = 0 \tag{9}$$

となり、濃度変動と流速変動に正の相関があれば乱れ成分によって上向きに物質が運ばれそれを補うように下向きの定常流が存在する。又、逆も真である。このことは、波動運動によって発生する質量輸送とそれを補うために発生する戻り流れとの関係に良く似ている。

運動量保存則 (5)式(6)式に(7)式を代入し時間平均を取ることにより、同様の表現が得られるが、その内 (5)式に関しては Kobayashi等同じであるから省略して (6)式についてだけ表示すると、x方向z方向各々について、

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_f C_f U_f W_f \right) = \frac{\partial \tau_f}{\partial z} + \rho_f C_f g \sin\theta - F_x$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_f C_f W_f^2 \right) = \frac{\partial \sigma_f}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\left(C_f P + \overline{c_f' p'} \right) + \rho_f C_f g \sin\theta - F_z$$

となり、圧力項の表現だけが異なっている。すなわち圧力によって運ばれる運動量は濃度にも関係し又その変動成分によっても運ばれる。

5．結論

以上、前節までで混相流の定式化に於ける平均化と連続体化について述べ、その支配方程式について Kobayashi等のものと比較しつつ考察を試みたが、実際に解くには与えられた外的条件の基で方程式の各項を具体的に評価しなければならないことは言うまでもなく、そこにはさらに多くの問題が含まれているであろうことは十分想像できるが、その際にも支配方程式をより良く理解しておくことは重要であろう。

最後に、前節では砂粒は均一粒径として扱ったが、粒度分布のある場合の定式化について若干の考察を試みる。粒径をϕとすると砂の濃度はϕの関数だから

$$c_s = \int c_s(\phi)\, d\phi \quad , \quad \int c_s(\phi)\, d\phi + c_f = 1$$

となり、質量保存則、運動量保存則は粒度毎に考える。すなわちこの場合無限個の相を考えることになる。その時質量保存則は (3)式と形式的に同じとなるが、運動量保存則では (5)式の砂粒子間の干渉を表す項は二つの粒径の関数となり

$$\gamma_{ij} = \int \gamma_{ij}(\phi, \phi')\, d\phi' \qquad ただし \quad \gamma_{ij}(\phi, \phi') = -\gamma_{ij}(\phi', \phi)$$

又、水と砂との干渉項もϕの関数となり (6)式では

$$-f_i = -\int f_i(\phi)\, d\phi$$

となるだろう。

参 考 文 献

山田・日野(1986):混相流の数学モデル，第５回混相流シンポジュウム講演会論文集，pp 81-116

Kobayashi,N. and Seo,S.N.(1985): Fluid and sediment interaction over a plane bed, Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, Vol.111, No.6, pp 903-921