

II—8 数値解析における、開放境界での無反射スキームについて

北海道大学工学部

古屋 温美

北海道大学工学部

正員 浜中 建一郎

1 まえがき

波動の数値シミュレーションでは、開放境界での境界条件の与え方が、計算の精度や経済性のために重要となっている。これまでも長波近似式を使ったり、その他いろいろな工夫がなされている。今回、日本の太平洋岸を1つの境界とする広い範囲での潮流の流れのシミュレーションを行うにあたり、開放境界での条件を与える必要があった。最近、日野、仲座(1987(a)(b), 1988(c)(d))らにより提案された非常に簡単な無反射境界スキームなるものがあることを知った。しかしながらそこでは、どの程度無反射性が満たされているのかが特に二次元伝播においてあまり明確ではない。そこで本論文では、そのスキームを使った場合の誤差評価を簡単な長波近似を用いて行い波の入射角と位相による誤差の検討をしようと思う。なお今回検討したのはLeap-frog法の差分スキームだけである。

2 日野、仲座のスキーム

今、時間ステップ $n(t=n\Delta t)$ までの計算が完了したとする。次の $(n+1)$ 時間ステップでの、 x 軸に垂直な境界での水位の境界値 $\eta(i, n+1)$ を無反射境界として求める。

2・1 仮想固体境界

時間ステップ n において、境界が瞬間的に仮想的に固体境界におき変わったとする。このとき波の入射方向には関係なく

$$M'_{i+1}^n = 0$$

これを連続の式の差分形

$$\frac{\eta_i^{n+1} - \eta_i^{n-1}}{\Delta t} = \frac{M_{i-1}^n - M_{i+1}^n}{\Delta x} \quad (1)$$

に代入して、時間ステップ $(n+1)$ における水位

$$\eta_i^{n+1}$$

を求める。

ここで求められた仮想固体境界における重複波水位 η_i^{n+1} の $1/2$ が時間ステップ $(n+1)$ における進行波水位であり、これに境界外からの入射波水位を加えたものが無反射境界の境界値である。つまり

$$\eta_i^{n+1} = \frac{1}{2} \eta_i^{n+1} + \eta_{inc}^{n+1} \quad (2)$$

2・2 一次元伝播の検討

今、計算領域内では長波とし、水位と流量は次式であたえられる。

Numerical scheme of non-reflection open boundary

by Astumi FURUYA and Ken-ichiro HAMANAKA

$$\left. \begin{aligned} \eta &= a \sin(kx - \omega t) \\ M &= aC \sin(kx - \omega t) \end{aligned} \right\} \quad C \text{は波速} : C = \omega / k \quad (3)$$

日野のスキームより $(M_{i+1}^n = 0)$

$$\begin{aligned} \eta_i^{n+1} &= \frac{\Delta t}{\Delta s} M_{i-1}^n + \eta_i^{n-1} \\ &= \frac{\Delta t}{\Delta s} \{aC \sin(k(i-1)\Delta x - \omega n\Delta t) + a \sin(ki\Delta x - \omega(n-1)\Delta t)\} \end{aligned} \quad (4)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} \theta &= ki\Delta x - \omega n\Delta t, \quad \Delta t/\Delta s = 1/C \\ \omega\Delta t &\ll 1, \quad k\Delta x \ll 1 \text{ として } \sin \omega\Delta t = \omega\Delta t, \quad \sin k\Delta x = k\Delta x \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

とすると

$$\begin{aligned} \eta_i^{n+1} &= a \sin(\theta - k\Delta x) + a \sin(\theta + \omega\Delta t) \\ &= 2a \sin \theta = 2\eta_i^n \end{aligned} \quad (6)$$

となって仮想重複波波高は n ステップの重複波波高を与える。

したがって、 $(n+1)$ ステップでの与えるべき η_i^{n+1} は、(5)の近似のもとに外からの入射成分を無視すれば

$$\eta_i^{n+1} = \eta_i^n + (\eta_i^n - \eta_i^{n-1}) = 2\eta_i^n - \eta_i^{n-1} = \eta_i^{n+1} - \eta_i^{n-1} \quad (7)$$

となる。

3 2次元伝播の検討

二次元伝播における無反射条件の具体的スキームは日野等の論文では明確でなかったため個人的な問い合わせにより原理的に二通りの方法を考えていることがわかった。そこでここではそれをスキーム1とスキーム2と呼ぶ。

潮流は、 δ の方向より領域内に進入する。

波数ベクトルを $k = (l, m)$ とすると

$$\left. \begin{aligned} \eta &= a \sin(lx + my - \omega t) \\ M &= \frac{1}{k} C \eta = \frac{1}{k} aC \sin(lx + my - \omega t) \\ N &= \frac{m}{k} C \eta = \frac{m}{k} aC \sin(lx + my - \omega t) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$\eta_{i,j}^{n+1} - \eta_{i,j}^{n-1} = \frac{\Delta t}{\Delta s} (M_{i-1,j}^n - M_{i+1,j}^n + N_{i,j-1}^n - N_{i,j+1}^n) \quad (10)$$

3・1 スキーム1

η は、 x 方向と y 方向の流れによる水位を分離しえると仮定し、それぞれ別に推定し加えるものとする

$$\eta_0 = \eta_x + \eta_y$$

(10)式で $M_{i+1,j}^n = 0$ とおいて

$$(\eta_x + \eta_y) = \frac{\Delta t}{\Delta s} (M_{i-1,j}^n + N_{i,j-1}^n - N_{i,j+1}^n) + \eta_{i,j}^{n+1} \quad (11)$$

ここで $\eta_{i,j}^{n-1}$ の扱い方によって η_0 の計算には2つの方法があると思われる。1つは $\eta_{i,j}^{n-1}$ はx方向にのみ寄与するかあるいはy方向にのみ寄与するとして計算する方法で、2つめは $\eta_{i,j}^{n-1}$ はx,y方向に等しく寄与するとした方法である。
そこで次の(12), (13)式を与える。

$$\left. \begin{aligned} \eta_x &= \frac{1}{2} \frac{dt}{ds} M_{i-1,j}^n = \frac{1}{2} (a \cos \delta \sin \theta - \cos^2 \delta a \omega dt \cos \theta) \\ \eta_y &= \frac{dt}{ds} (N_{i,j-1}^n - N_{i,j+1}^n) + \eta_{i,j}^{n-1} = -\sin^2 \delta \omega dt \cos \theta + \frac{1}{2} (a \sin \theta + a \omega dt \cos \theta) \end{aligned} \right\} (12)$$

$$\left. \begin{aligned} \eta_x &= \frac{1}{2} \frac{dt}{ds} M_{i-1,j}^n + \frac{1}{2} \eta_{i,j}^{n-1} = \frac{1}{2} (a \cos \delta \sin \theta - \cos^2 \delta a \omega dt \cos \theta + a \sin \theta + a \omega dt \cos \theta) \\ \eta_y &= \frac{dt}{ds} (N_{i,j-1}^n - N_{i,j+1}^n) + \frac{1}{2} \eta_{i,j}^{n-1} = -\sin^2 \delta \omega dt \cos \theta + \frac{1}{2} (a \sin \theta + a \omega dt \cos \theta) \end{aligned} \right\} (13)$$

一方、(8)式による η の真値は

$$\eta = \eta_{i,j}^{n+1} = a \sin \theta - a \omega t \cos \theta$$

$$\text{ここで } \theta = \text{lis} + \text{mis} + \omega n t, \sin \delta = -\frac{m}{k}, \cos \delta = -\frac{1}{k} \quad : \delta \text{ は入射角}$$

であって明らかに(12), (13)で与えられる推定値とは異なる。そこでつぎの章では、 η_0 と η との比較を上2通りについてそれぞれ行う。

3. 2 誤差評価

$\eta_1 = \eta_0 - \eta$ として、 δ と θ を変化させ η_1 の変動を考察する。(図-1, 2)

$$\text{ただし } 0 \leq \theta \leq \pi, -\frac{\pi}{2} \leq \delta \leq \frac{\pi}{2}, a=1$$

ここで使われる定数 ω, dt は、実際のシミュレーションで使われるものと同じとし

$$\omega = 2\pi/T \text{ (1/s)}, T=20 \text{ (s)}, dt=0.25 \text{ (s)}$$

4 スキーム2

スキーム1では、 η_0 をx方向とy方向成分に分離し得るという仮定に少し無理があったそのためこのスキーム2では、x方向、y方向ともに仮想的に完全反射するものとして $n+1$ ステップでの水位を求めその1/2を進行波の水位とする。

$$\begin{aligned} \eta_{i,j}^{n+1} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{dt}{ds} (M_{i-1,j}^n + N_{i,j-1}^n) + \eta_{i,j}^{n-1} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ -\frac{1}{k} a \sin \theta - \frac{1}{k} a \cos \theta + \frac{m}{k} a \sin \theta - \frac{m}{k} a \cos \theta + a \sin \theta + a \omega t \cos \theta \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{k} + \frac{m}{k} + 1 \right) a \sin \theta = D a \sin \theta \\ D &= \frac{\{\sqrt{2} \cos(\delta - \pi/4) + 1\}}{2} \end{aligned} \quad (14)$$

ここで(8)式から $\eta_{i,j}^{n+1} = a \sin \theta$ なので、(14)式から推定された $\eta_{i,j}^{n+1}$ は $\eta_{i,j}^{n+1}$ の真値に係数Dをかけたものとなっている。

したがってDの形から明らかなように、このスキームでも入射角による影響は無視し得ない。

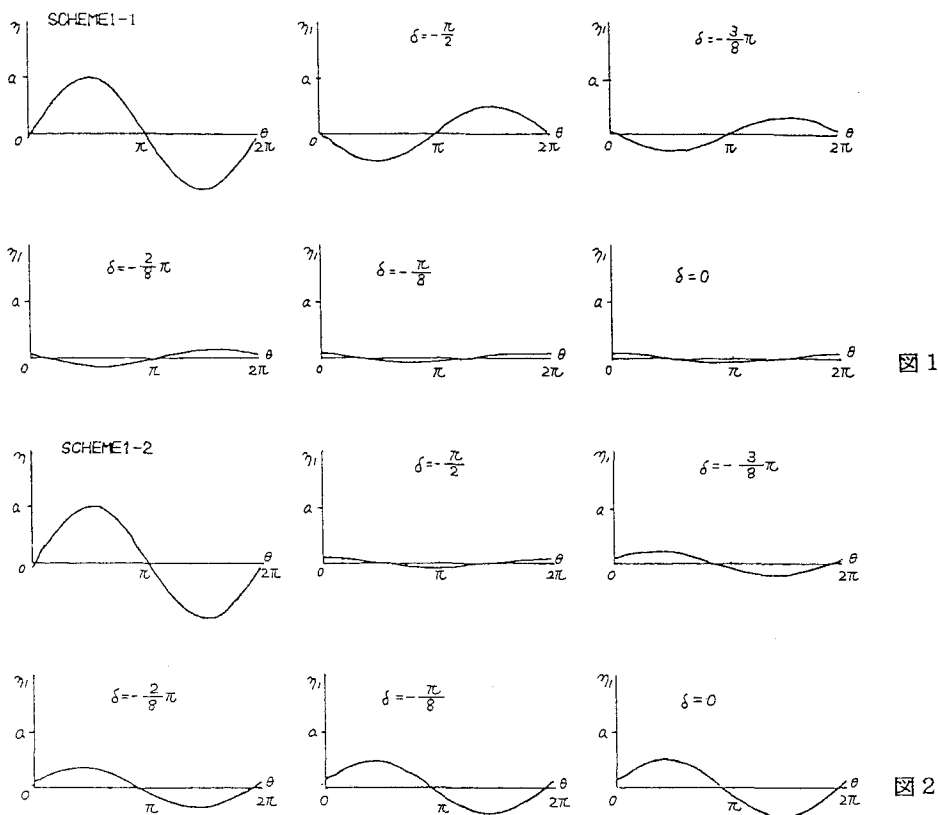


図1、図2はともに誤差評価である。(ただし左上の図は縦軸を真値 η として θ との関係を示している) 縦軸を η_1 、横軸を θ として $-\pi/2 \sim 0$ までの δ を4等分して δ に対応する η_1 と θ との関係を示している。図よりスキーム1-1では波が境界に直角に入射した場合に誤差が小さい。スキーム1-2では波が境界にほぼ平行に入射した場合に誤差が小さい。

図3はスキーム2における D と δ との関係を示す。 δ は $-\pi/2 \sim \pi/2$ までの値を取り、 D が1に近い $\delta = 0 \sim \pi/2$ の角度で境界に向かって入射してくる場合に誤差が小さい。

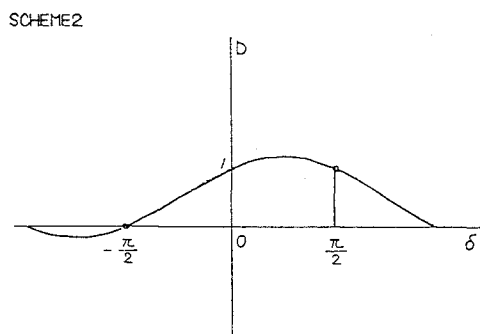


図3

参考文献

日野幹雄(1987(a)):解放境界における波の無反射透過条件の極めて簡単な計算スキームの提案 東工大 土木工学科研究報告 No38. 日野幹雄,仲座栄三(1987(b)):水理計算における新しい"無反射境界"の数値的検討 東工大 土木工学科研究報告 No38. 日野幹雄(1988(c)):解説-波の無反射透過境界の数値スキームについて 東工大 土木工学科研究報告 No39. 日野幹雄,仲座栄三(1988(d)):数値波動解析における新しい無反射境界スキームの平面二次元問題への適用 第35回海岸工学講演会論文集