

I-36

有限円板の衝撃応答解析

専修大学北海道短期大学 正員 三上 敬司
 室蘭工業大学 正員 松岡 健一
 室蘭工業大学 正員 岸 徳光
 日本大学生産工学部 正員 能町 純雄

1. まえがき

衝撃荷重を受ける平板の衝撃応答に関しては、多くの研究者によって解析および実験が行なわれている。また、衝撃応答解析で扱う板理論には、古典理論である薄板理論および薄板理論を板の回転慣性とせん断変形に関して修正した Mindlinプレート理論¹⁾などがある。古典理論における衝撃応答解析に関して、岩崎らは²⁾、弾性床土上の無限平板に球底の剛体を落下させた場合の板の局部変形を考慮した理論解析を行なっている。また、著者らは³⁾、同様な無限板へ錐底の重錘を落下させた場合の衝撃力および衝撃曲げモーメントを求めている。Shivakumarらは⁴⁾、複合材料でできた円盤上に低速度で衝撃力を作用させた場合の理論解析をエネルギー法を用いた方法 (E-B model)、接触バネを用いたバネ-質量モデル (S-M model) として解析を行ない、さらに、Grezczukの理論解と比較検討を行なっている。坪田ら⁵⁾は、4点支持されたRC床版上のロードセルへ重錘を落下させた場合の衝撃荷重と変位との関係を求めている。一方、理論解析に関しては、この実験結果のひずみ速度効果を考慮してデュアメル積分による非線形lumped-mass-systemによって解析している。Mindlinプレート理論における衝撃応答解析に関して、芳村らが⁶⁾、ロックシェッドに作用する落石の衝撃力を評価するために、ロックシェッドを古典板理論と修正板理論とを用いてモード解析を行って比較検討している。一方、岸らは⁷⁾、リング要素を用いた厚肉円盤の衝撃応答解析を行い、有限帯板法を用いた手法さらに電力中央研究所で行われた実験値と比較検討してリング要素法の妥当性を示している。

しかし、古典板理論と修正板理論とが荷重時間、荷重幅、板厚の変化によってどのように異なった挙動を示すかについてはあまり多く検討されていないようである。そこで、本論文では、有限円板に衝撃荷重を作用させた場合の古典板理論と修正板理論に関して解析を行い、これらが、荷重時間、荷重幅、板厚の変化がどのような影響を及ぼすか、さらに、実際問題として減衰作用が生じることから、減衰効果も考慮して比較検討を行った。

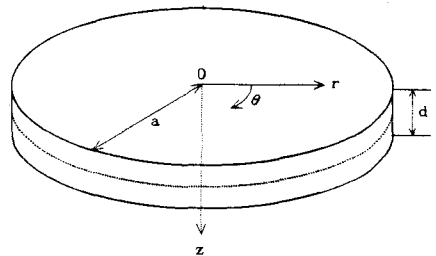


図-1 極座標と円板

2. 理論解析

図-1に示したように、密度 ρ 、半径 a 、板厚 d の有限円板に荷重幅 r_0 の分布荷重 $q(r, t)$ が古典理論と回転慣性、せん断変形を考慮した修正理論を用いた板に作用した場合の r 方向の応力 σ_r と鉛直方向の変位 w を求める。ただし、板の構造減衰を減衰係数 C とおく。

1) 古典板理論

極座標で表した軸対称円板の運動方程式は、次式となる。

$$D \nabla^4 w + C \nabla^4 \frac{\partial w}{\partial t} + \rho d \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q(r, t) \quad \dots \dots \dots (1)$$

ここで、 E を板の弾性係数、 ν をポアソン比とする。

$$\nabla^2 = \frac{\partial}{r \partial r} \left[r \frac{\partial}{\partial r} \right], \quad \text{板剛度 } D = \frac{E d^3}{12(1-\nu^2)}$$

境界条件は、ラプラス変換を容易にするために、以下に示す条件とする。

$$r=a \text{ において、 } w=0, \text{ 合モーメント } \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial}{\partial r} \right] = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

(1) 式を半径方向に関しては有限ハンケル変換、時間に関してはラプラス変換を施すと鉛直変位 w_i は

$$\mathbf{J}_0[\tilde{w}_i] = \frac{\tilde{q} \mathbf{J}_1(\xi_i r_a)}{\pi r_a \rho d (s^2 + 2h\omega_i \xi_i s + \omega_i^2) \xi_i} \quad \dots\dots\dots (3)$$

ところで、 ξ_i は、 $J_0(\xi_i a) = 0$ の根である。 $\mathbf{J}_0[f]$ はハンケル変換記号、 $\tilde{}$ はラプラス変換記号、 s はラプラス演算子である。

(3) 式をラプラス逆変換および有限ハンケル逆変換を施すと、(4)、(5) 式となる。

$$w_i = \frac{2/Ea}{\pi (r_a/a) (d/a) \sqrt{1-h^2}} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{I_i(t)}{(\xi_i a)^3 \bar{\omega}_i} \cdot \frac{J_1(\xi_i r_a) J_0(\xi_i r)}{\{J_1(\xi_i a)\}^2} \quad (4)$$

ここで、 $I_i(t) = \int_0^t q(\tau) e^{-h\bar{\omega}_i(t-\tau)} \sin \bar{\omega}_i(t-\tau) d\tau$ とおく。

$$\sigma_r = \frac{12/d^2}{\pi (r_a/a) \sqrt{1-h^2}} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\bar{\omega}_i I_i(t)}{(\xi_i a)^3} \cdot \frac{J_1(\xi_i r)}{\{J_1(\xi_i a)\}^2} \cdot F_i(\xi_i, r) \quad (5)$$

ところで、 $F_i(\xi_i, r) = J_0(\xi_i r) + \frac{\nu-1}{\xi_i r} J_1(\xi_i r)$ 、 $\bar{\omega}_i = \frac{(\xi_i a)^2 (d/a)}{\sqrt{12(1-\nu^2)}}$

$h = C(\xi_i a)^2 / 2\sqrt{\rho d D}$ 、 $\bar{\omega}_i = \bar{\omega}_i \sqrt{1-h^2}$ 、 $\omega_i = \sqrt{D/\rho d} \xi_i^2$

2) 修正板理論

回転慣性を考慮した場合の曲げモーメントによるたわみ角 ψ とせん断係数 κ 、せん断弾性係数 G とし、古典理論の場合と同様に極座標による軸対称円板の運動方程式は、次式のように表すことができる。

$$\left[D + C a^2 \frac{\partial}{\partial t} \right] \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\psi}{r^2} \right] - \kappa^2 G d \left[\frac{\partial w}{\partial r} + \psi \right] = \frac{\rho d}{12} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (6)$$

$$\left[\kappa^2 G d + C \frac{\partial}{\partial t} \right] \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\partial w}{r \partial r} \right] + \kappa^2 G d \left[\frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\psi}{r} \right] + q(r, t) = \rho d \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad \dots\dots\dots (7)$$

(6)、(7) 式をそれぞれラプラス、有限ハンケル変換を施すと、

$$\mathbf{J}_0[\tilde{w}_i] = \frac{r_a \{s^2 + a s + b\} q \mathbf{J}_1(\xi_i r_a)}{d (s + \alpha_1) (s + \alpha_2) (s + \alpha_3) (s + \alpha_4)} \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$\mathbf{J}_1[\tilde{\psi}_i] = \frac{12 r_a \kappa^2 G q \mathbf{J}_1(\xi_i r_a)}{\rho^2 d^3 (s + \alpha_1) (s + \alpha_2) (s + \alpha_3) (s + \alpha_4)} \quad \dots\dots\dots (9)$$

(8)、(9) 式をそれぞれラプラス逆変換、有限ハンケル逆変換すると、

$$w_i = \frac{2/Ea}{\pi (r_a/a) (d/a)} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^4 \frac{I_{ij}(t) J_1(\xi_i r_a) J_0(\xi_j r)}{(\xi_i a) \{J_1(\xi_i a)\}^2} \quad (10)$$

$$I_{ij}(t) = A_{ij} \int_0^t q(\tau) e^{-\omega_{ij}(t-\tau)} d\tau, \quad A_{ij} = \frac{1}{(\alpha_2 - \alpha_1) (\alpha_3 - \alpha_1) (\alpha_4 - \alpha_1)} \text{ etc.}$$

$$\sigma_r = \frac{12 (c_s/c)^2 / d^2}{\pi (r_s/a) (1-\nu^2)} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^4 \frac{(\xi_i a) K_{ij}(t) J_1(\xi_i r) F_1(\xi_i, r)}{J_1(\xi_i a) \{ \}^2} \quad (11)$$

$$K_{ij}(t) = B_{ij} \int_0^t q(\tau) e^{-\alpha_j(t-\tau)} d\tau, \quad B_{ij} = \frac{\alpha_j^2 - a \alpha_j + b}{(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_4 - \alpha_1)} \text{ etc.}$$

ところで、 $\alpha_j (j=1,2,3,4)$ は、4次の固有方程式の根である。

$$a = 12C (\xi_1 a)^2 / \rho d^3, \quad b = 12 (\kappa^2 G d + D \xi_1^2) / \rho d^3, \quad c_s = \sqrt{G/\rho}, \quad c = \sqrt{E/\rho}$$

3. 数値計算例

数値計算における板の物性値は、弾性係数 $E=2 \times 10^5$ (tf/m²)、ポアソン比 $\nu=1/6$ 、密度 $\rho=2.5$ (tf/m³) とし、コンクリートに衝撃荷重が作用した場合の応答性状を検討する。

1) 時間方向の荷重分布、荷重時間、荷重幅比

a) 台形分布荷重 (図-2 (a))

$$\begin{cases} \text{I) } t < 0 & : p(t) = 0 \\ \text{II) } 0 \leq t < t_1 & : p(t) = p_{\max} \tau / t_1 \\ \text{III) } t_1 \leq t < t_2 & : p(t) = p_{\max} \\ \text{IV) } t_2 \leq t < t_3 & : p(t) = p_{\max} (t_3 - \tau) / (t_3 - t_2) \\ \text{V) } t \geq t_3 & : p(t) = 0 \end{cases}$$

b) ステップ関数荷重 (図-2 (b))

$$\text{I) } t < 0 : p(t) = 0 \quad \text{II) } t \geq t_3 : p(t) = p_{\max}$$

c) 荷重時間

$$\begin{cases} \text{㉔} & t_1=0.1, \quad t_2=0.2, \quad t_3=1.0 \\ \text{㉕} & t_1=0.15, \quad t_2=0.3, \quad t_3=1.5 \\ \text{㉖} & t_1=0.3, \quad t_2=0.6, \quad t_3=3.0 \end{cases}$$

d) 荷重幅比 r_s/a

$$\begin{cases} \text{①} & r_s/a = 0.01 \\ \text{②} & r_s/a = 0.03 \\ \text{③} & r_s/a = 0.05 \end{cases}$$

2) 位相速度分散曲線

図-3は、波長 λ と板厚 d との比に対するせん断波速度 c_s と位相速度 c_r との比を表している。古典板理論での位相速度は、 d/λ が大きくなるに従って直線的に急勾配で増加する。しかし、修正板理論に関して、回転慣性のみの場合は、 $d/\lambda \rightarrow \infty$ になると1.5492に近づく。一方、せん断変形のみと両方を考慮した場合は $d/\lambda \rightarrow \infty$ になるとレーレー波となり、さらにいずれも $\kappa=0.9535$ となる。

3) 無次元固有円振動数と (板厚/板の半径)

図-4は、モード次数に対する修正板理論での無次元固有円振動数 ω_m と古典板理論での無次元円振動数 ω_b との比を表している。1次モードでは、古典理論と修正理論との著しい差が見られないが、モード次数、板厚と板の半径との比 (板厚比: d/a) が大きくなるに従って ω_m/ω_b が小さくなる。このこ

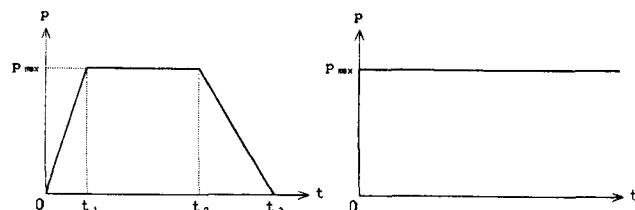
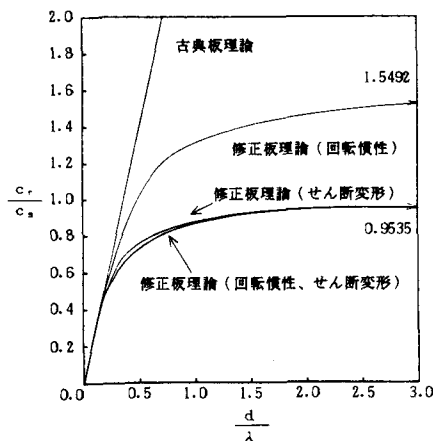


図-2 (a) 台形分布荷重 (b) ステップ関数荷重

図-3 位相速度分散曲線

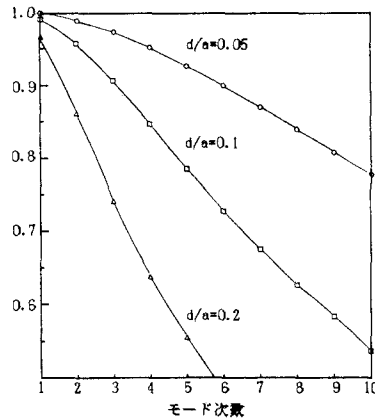
とは、板厚が厚くなると回転慣性およびせん断変形の影響を受けることを示している。

4) 半径方向の応力の収斂状況

時間方向の荷重分布は、図-2 (a) に示したように台形分布荷重を用いて、荷重時間を条件㉔とする。

図-5 (a)、(b)は、0次のベッセル関数の根である ξ_i の項数に対するそれぞれの古典板理論と修正

板理論による半径方向の応力の収斂状況を示している。パラメータとしては、最大応力に達する無次元時間 t_0 ($= c t / a$)、荷重分布幅 r_a と a との比 (荷重幅比: r_a/a) 条件①、②、③として計算を行っている。



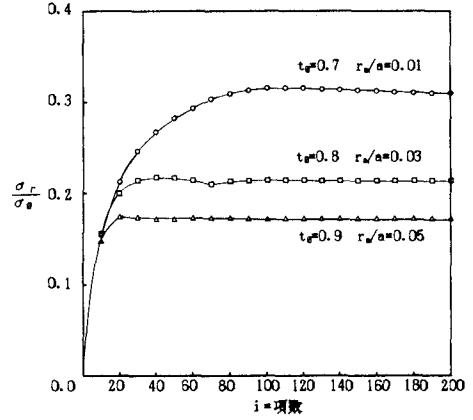
る。最大応力に達 図-4 モード数と無次元固有振動数する時間は荷重幅比が小さくなるに従って短くなる。さらに収斂状況に関しては、いずれの図においても荷重幅比を条件①の場合で $i=200$ 個、条件②の場合で 160 個、条件③の場合で 120 個ぐらいで良く収斂している。

5) ステップ関数の荷重

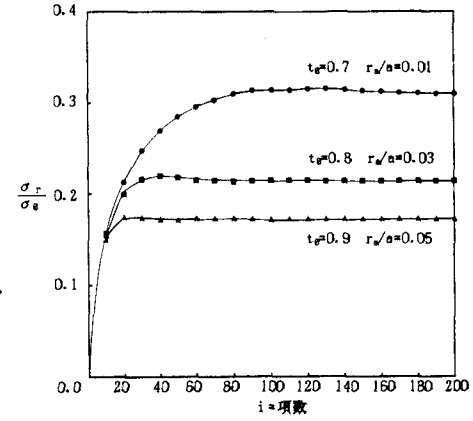
図-6 は、本理論における計算結果の妥当性を示すために荷重幅比を条件③、板厚比を 0.1 として中央点における変位を静的な値で割った応答倍率を求めている。古典理論は点線、修正理論は実線で表している。その結果、文献 9) に示されているように、いずれの理論値も静的変位に対する最大の応答倍率が 2 倍の値を示している。

6) 台形分布荷重

図-7 (a)、(b)、(c) は、いずれの理論も減衰定数 $h=0, 0.05, 0.1$ として、パラメーターとしては、荷重時間を条件②、荷重幅比を条件③、板厚比を 0.1 として、(5)、(11) 式を時間に対する $\sigma_{r,0}=6 p_{max}/d^2$ で割った応力比を示している。いずれの理論値は、減衰定数の値に関係なく、最大値を過ぎた $t_0=1.6$ ぐらいまでほぼ一致しているが、その後は、異なった応答値を示している。特に、 $h=0$ での実線の修正理論は、第 2 ピーク点すなわちせん断波による反射波が明確に現れるが、時間が経つにつれてかなり激しく上下に振動しているために実際的ではない。一方、 $h=0.1$ では、減衰が効き過ぎるために反射波が明確に現れない。ちょうど、 $h=0.05$ の場合は、せん断波も比較的確に現れ、減衰効果もそれほど大きく



(a) 古典板理論



(b) 修正板理論

図-5 応力比の収斂状況

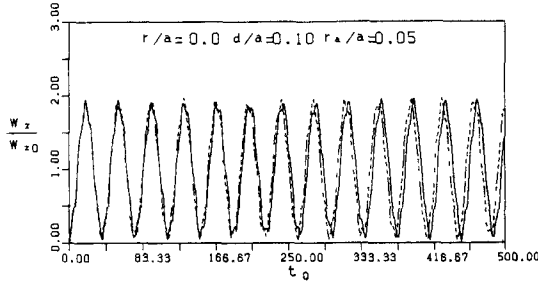


図-6 ステップ荷重による変位

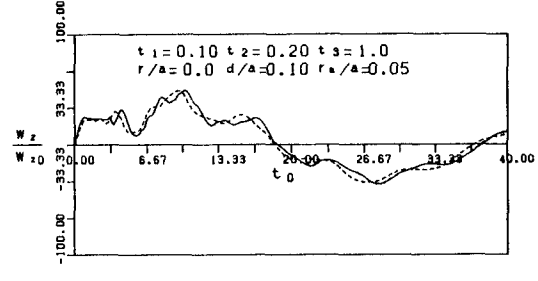
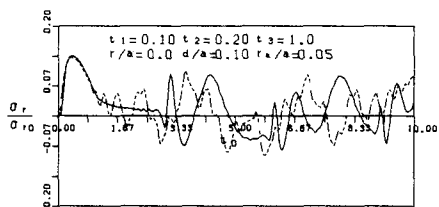
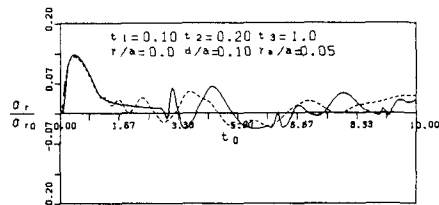


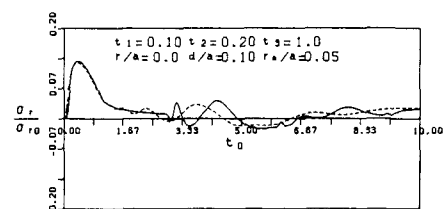
図-7 時間に対する鉛直変位



(a) $h=0.0$



(b) $h=0.05$



(c) $h=0.1$

図-8 時間方向の減衰状況

ないので本理論ではこの値を用いることにする。

図-8は、(4)、(10)式を p_{max}/Ea で割った変位比で表すことにする。荷重パターンは、で示したとおりである。古典理論と修正理論はほとんど同じ応答性状を示している。さらに無次元固有周期に関しては、それぞれ $t_0=37.11, 37.43$ でほぼ等しく、本理論における支持条件は、両端支持条件と単純支持条件との間にあるがかなり単純支持条件に近いところに存在している。

図-9は、6)と同じパラメータの場合の縦波とせん断波が半径方向への進行する状態を示している。古典理論では、コンクリートの縦波速度、修正理論では、コンクリートのせん断波速度で半径方向に伝播している状態を確認できる。

図-10 (a)、(b)と図-9 図-10 荷重幅の変化の状況 図-11 荷重時間の変化状況の一部 ($r/a=0$) は、荷重時間を条件③、板厚比を0.1として、荷重幅を条件①、②、③として変化させた場

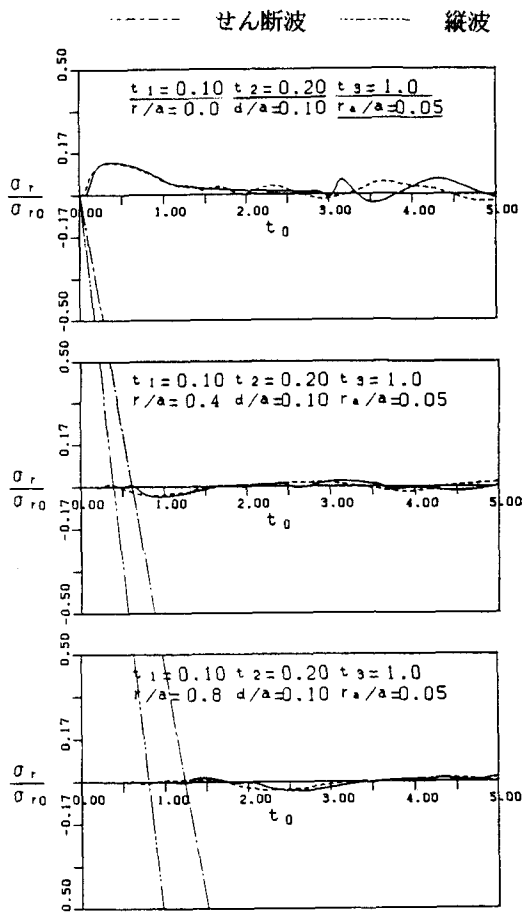
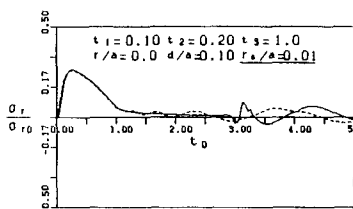
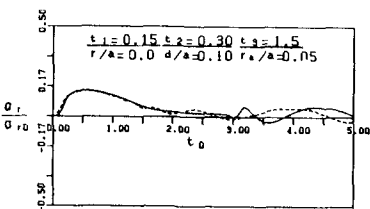


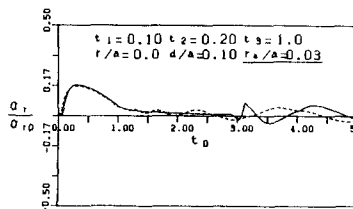
図-9 縦波とせん断波の伝播状況



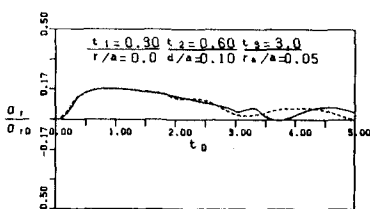
(a)



(a)



(b)



(b)

合の時間に対する中央点における応力比を示している。時間に関しては、いずれもほとんど同じ応答性状を示しているが、荷重幅が小さくなるに従って最大値が大きくなっている。このことは、より集中荷重に近づくためである。

図-11(a)、(b)と図-9の一部($r/a=0$)は、板厚比を0.1、荷重幅比を条件③、荷重時間を条件③、④、⑤と変化した場合の中央点における時間変化に対する応力比を示している。荷重時間が長くなるに従って最大値を過ぎた後は緩やかに減少し、荷重時間の条件⑤では、衝撃作用時間がせん断波が反射して戻ってくる時間より長いためにせん断波による反射波が明確に現れていない。

図-12は、図-9と同じ条件で、時間 $t_0=0.2, 0.38$ (最大値に達する時間)、0.5、1.0での半径方向の応力比の分布状態を示している。古典理論と修正理論とを比較すると修正理論の方がは、応力の伝播距離が短いことを示している。

4. あとがき

3の数値計算例の結果から次のことが言える。

- 1) 円板に関して、 $d/\lambda \rightarrow \infty$ になると、古典理論では無限大となり、修正理論の回転慣性のみの場合では、1.5492となり、せん断変形のみと両方を考慮した場合は $\kappa=0.9535$ となる。
- 2) 固有振動数とモード次数との関係に関しては、モード次数と板厚が大きくなるに従って古典理論と修正理論とかけ離れていく。
- 3) 衝撃波動では、せん断波の伝播性状がかなり重要となる。しかし、古典理論では、縦波のみだけでせん断波が存在しない。一方修正理論では、縦波およびせん断波のいずれも存在することが、反射波および半径方向の伝播性状によって確認することができた。また、半径方向の応力と鉛直変位に関して、荷重時間、荷重幅を変化させても両理論は、このような衝撃問題で重要な最大値を過ぎたところまでほとんど差がないことが分かった。

本理論における数値計算は、北海道大学大型計算機センターのHITAC-682Hを使用した。

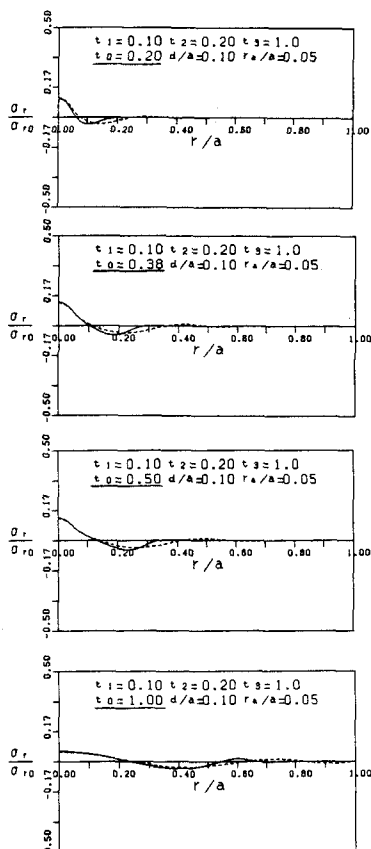


図-12 半径方向の応力分布

[参考文献]

- 1) MINDLIN, R.D.: Influence of Rotatory Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic, Elastic Plates, ASME, pp.31~38, 1951.
- 2) 岩崎正二: 衝撃荷重を受ける平板の動的応答解析、岩手大学工学部研究報告、Vol.37, 1984.
- 3) 三上敬司他: 剛体の落下衝撃力による平板の動的応答、土木学会北海道支部論文報告集、1989.
- 4) ABDEL-ROHMAN, M. etc.: Impact Effect on R.C. Slabs: Analytical Approach, ASCE, 1985.
- 5) Shivakumar, K.N. etc.: Prediction of Impact Force and Duration due to Low-Velocity Impact on Circular Composite Laminates, ASME, 1985.
- 6) Thubota, H. etc.: Nonlinear Analysis by Duhamel Integral of Reinforced Concrete Slabs Subjected to Impact Loadings, T.A.M., 1985.
- 7) 芳村仁他: ロックシェッドに作用する落石の衝撃力、土木学会北海道支部論文報告集、1985.
- 8) 岸徳光他: リング要素を用いた厚肉円板の衝撃応答解析、土木学会北海道支部論文報告集、1989.
- 9) 小坪清真: 土木振動学、森北出版、pp.251~264, 1973.