

I—33 多径間連続桁の固有値とその振動特性について

北海道大学工学部 正員 林 川 俊 郎
 北海道大学工学部 正員 角 田 與史雄
 北海道大学工学部 学生員 鷹 巢 志 乃

1. まえがき

最近、道路線形上および走行安定性の観点から、多径間連続桁の構造形式が採用されることが多くなってきた。このような多径間連続桁の固有振動解析としては、動力学三連モーメント法¹⁾、伝達マトリックス法²⁾、および固有剛性マトリックス法^{3,4)}などがある。本研究では、桁の自由振動に関する基礎微分方程式の一般解（固有関数）を用いて境界条件を処理し、その固有関数の係数を比較する（ここでは、係数比較法と呼ぶ）ことにより、多径間連続桁の固有値を求める方法について述べる。さらに、多径間連続桁の固有値に与える径間数、境界条件およびスパン比等の影響について詳細に検討する。

2. 係数比較法

図-1に示すような多径間連続桁について考えてみよう。この連続桁の各径間部材要素の鉛直たわみに伴う曲げ振動に関する基礎微分方程式は次のように与えられる。

$$EI \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

ここで、 $W = w(x) \sin \omega t$ とすると、

$$w = A \cos \beta x + B \sin \beta x + C \cosh \beta x + D \sinh \beta x \quad (2)$$

ここで、 $\beta^4 = m \omega^2 / EI$ 、 EI ：曲げ剛性、 m ：単位長さあたりの質量、 ω ：固有円振動数。

次に、境界条件とその条件式は図-2に示されている。ここで、多径間連続桁の両縁端部が単純支持の場合について考えてみよう。

(1)左端の境界条件

$$w_1(0) = 0$$

$$EI_1 w_1''(0) = 0$$

(2)中間支持点の境界条件

$$w_{i+1}(l_{i+1}) = 0$$

$$w_{i+1}'(l_{i+1}) = w_i'(0)$$

$$EI_{i+1} w_{i+1}''(l_{i+1}) = EI_i w_i''(0)$$

$$w_i(0) = 0$$

(3)右端の境界条件

$$w_n(1_n) = 0$$

$$EI_n w_n''(1_n) = 0$$

上記の境界条件式に式(2)を代入し、積分定数A、B、C、Dについて整理すると、最終的に次のようなマトリックス関係式

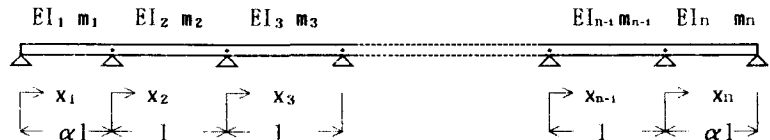


図-1 多径間連続桁

		Left	Right	Boundary Condition
1	SYMPLE SUPPORTED			$w_i(x) = 0, EI_i w_i''(x) = 0$
2	CLAMPED			$w_i(x) = 0, w_i'(x) = 0$
3	FREE			$EI_i w_i''(x) = 0, EI_i w_i'''(x) = 0$

図-2 境界条件式

Eigenvalues of Multispan Continuous Beams and Characteristics

By Toshiro HAYASHIKAWA, Yoshio KAKUTA and Shino TAKASU

が得られる。

$$[A]\{a\} = \{0\} \quad (3)$$

ここで、 $\{a\} = \{A_1, B_1, C_1, D_1, \dots, A_n, B_n, C_n, D_n\}^T$
係数マトリックスAの大きさは、 $4n \times 4n$ (n は径間数)である。さらに、 $a \neq 0$ であるから振動数方程式は次のように求められる。

$$\det |A| = 0 \quad (4)$$

式(4)は、固有円振動数 ω を含んだ超越方程式となるが、Regula-Falsi法⁵⁾により容易に解を求めることができる。

3. 数値計算結果

数値計算として、図-1に示した多径間連続桁の両縁端部における境界条件およびスパン比の影響について検討する。支間長は両縁端部の支間を除いてすべて同じ長さとし、1とする。両端の支間長は1との比、 α で表す(パラメータ α と呼ぶ)。ただし、2径間連続桁の場合は、左側の部材の長さが α 、右側の支間長を1とする。座標は各径間の左端をそれぞれ原点とする。したがって、第 i 径間の原点 $x_{i-1}=0$ は、第 $i-1$ 径間の $x_{i-1}=1$ と同じ点を意味することになる。

数値計算例として、ここでは両縁端部における支承の境界条件の組み合わせとして図-3に示すように6通り、スパン比は $\alpha=0.5, 0.6 \sim 1.0$ のパラメータ6通りについて、径間数は単径間から9径間までについて行う。

表-1は、境界条件が(1,1)の場合における、等断面等スパン比($\alpha=1.0$)の1~9径間の連続桁の1次から20次までの固有値を、小数点3桁を四捨五入してまとめたものである。ただし、表の値は固有値 λ を π で割ったものである。この表から縦、斜め方向に $n\pi$ の値が規則的に並んでいるのがわかる。また、縦に小数点以下の数値を追っていくと、径間数 n と同じ n 個おきに、周期的に同じ値を繰り返すという興味深い性質がある。この性質は、(1,1)の場合のみならず、 $\alpha=1.0$ であれば図-3に示したどの境界条件についても成り立つ。ただし、 $\alpha=0.5$ の場合は n 個おきとは限らず、2,3径間では

	Left	Right
(1,1)		
(1,2)		
(1,3)		
(2,2)		
(2,3)		
(3,3)		

図-3 境界条件の組み合わせ

表-1 固有値

上段: $\alpha=1.0$ 下段: $\alpha=0.5$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
2	2.00	1.25	1.13	1.08	1.05	1.04	1.03	1.02	1.02
3	3.00	2.00	1.37	1.25	1.18	1.13	1.10	1.08	1.06
4	4.00	2.25	2.00	1.42	1.32	1.25	1.20	1.16	1.13
5	5.00	3.00	2.14	2.00	1.45	1.37	1.30	1.25	1.21
6	6.00	3.25	2.36	2.08	2.00	1.46	1.40	1.34	1.29
7	7.00	4.00	3.00	2.25	2.06	2.00	1.47	1.42	1.37
8	8.00	4.25	3.13	2.42	2.18	2.04	2.00	1.48	1.44
9	9.00	5.00	3.37	3.00	2.32	2.14	2.03	2.00	1.49
10	10.00	5.25	4.00	3.08	2.44	2.25	2.10	2.02	2.00
11	11.00	6.00	4.13	3.25	3.00	2.36	2.20	2.08	2.02
12	12.00	6.25	4.37	3.42	3.06	2.46	2.30	2.16	2.07
13	13.00	7.00	5.00	4.00	3.18	3.00	2.40	2.25	2.14
14	14.00	7.25	5.13	4.08	3.32	3.04	2.47	2.34	2.21
15	15.00	8.00	5.37	4.25	3.44	3.13	3.00	2.42	2.29
16	16.00	8.25	6.00	4.42	4.00	3.25	3.03	2.48	2.36
17	17.00	9.00	6.13	5.00	4.06	3.37	3.10	3.00	2.43
18	18.00	9.25	6.37	5.08	4.18	3.46	3.20	3.02	2.48
19	19.00	10.00	7.00	5.25	4.32	4.00	3.30	3.08	3.00
20	20.00	10.25	7.13	5.42	4.44	4.04	3.40	3.16	3.02

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	—	0.57	0.62	0.57	0.54	0.53	0.52	0.51	0.51
2	—	1.00	1.00	0.68	0.62	0.59	0.57	0.55	0.54
3	—	1.18	1.12	1.00	0.71	0.66	0.62	0.60	0.58
4	—	1.57	1.25	1.07	1.00	0.72	0.68	0.65	0.62
5	—	2.00	1.63	1.18	1.04	1.00	0.73	0.70	0.67
6	—	2.18	2.00	1.25	1.12	1.03	1.00	0.74	0.71
7	—	2.57	2.13	1.57	1.21	1.09	1.02	1.00	0.74
8	—	3.00	2.25	1.68	1.25	1.16	1.07	1.02	1.00
9	—	3.18	2.63	2.00	1.54	1.22	1.12	1.05	1.01
10	—	3.57	3.00	2.07	1.63	1.25	1.18	1.10	1.04
11	—	4.00	3.13	2.18	1.71	1.53	1.23	1.15	1.08
12	—	4.18	3.25	2.25	2.00	1.59	1.25	1.20	1.12
13	—	4.57	3.63	2.57	2.04	1.66	1.52	1.23	1.17
14	—	5.00	4.00	2.68	2.13	1.72	1.57	1.25	1.21
15	—	5.18	4.13	3.00	2.21	2.00	1.62	1.52	1.24
16	—	5.57	4.25	3.07	2.25	2.03	1.68	1.55	1.25
17	—	6.00	4.63	3.18	2.54	2.09	1.73	1.60	1.51
18	—	6.18	5.00	3.25	2.63	2.16	2.00	1.65	1.54
19	—	6.57	5.13	3.57	2.71	2.22	2.02	1.70	1.58
20	—	7.00	5.25	3.68	3.04	2.25	2.07	1.73	1.62

(n+1) 個、3 ～9 径間では2(n-1) 個おきに繰り返している。

図-4 は、境界条件が(1,1), (2,2), (3,3), (2,3) の連続桁および単純桁の固有値をそれぞれ1次から3次までの固有値と径間数との関係について示したものである。この図-4より、1次の固有値 λ_1 は径間数が増すと境界条件にかかわらず、0.5 π または π に収束している。

0.5 π に収束しているのは、(3,3) の1,2次と(2,3) の1次の3つである。その他の境界条件については、おおよそ3径間から徐々に収束する傾向にある。両縁端部以外の支承はすべて単純支持なので、径間数が増すほど両縁端部の支持の違いによる影響が少ない。つまり、径間数が増すと、両縁端部の境界条件が固有値に与える影響は非常に小さくなるといえる。

同じように、径間数の増加による固有値の特性を見るために、図-3の6通りの境界条件における固有値 λ/π が図-5に示されている。

ただし $\alpha=1.0$ 。1次モードに関して、両端単純支持、両端固定、一端単純支持他端固定の3通りの場合は5径間以上になると両縁端の支承の違いによる影響がほとんどないということがわかる。2次モード

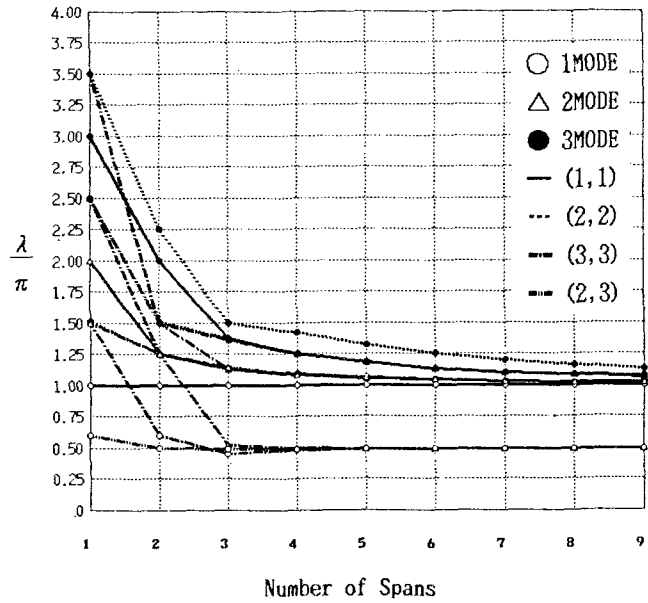


図-4 固有値と径間数の関係

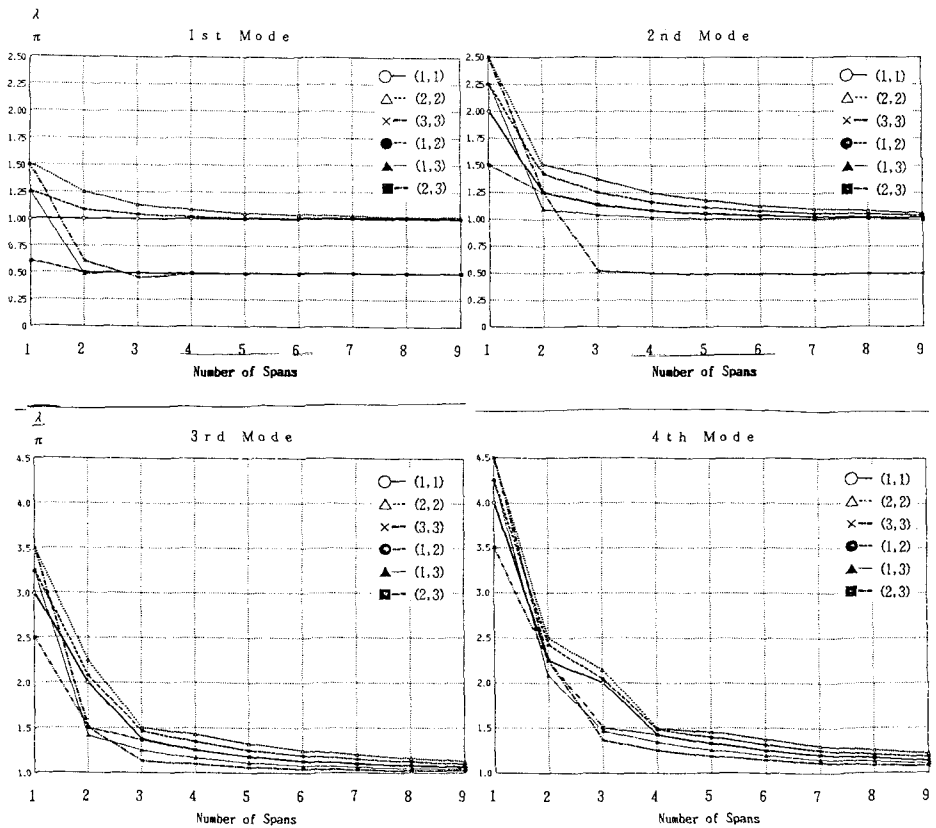


図-5 固有値と径間数の関係

に対しては、両端自由の場合を除いては他のすべての境界条件において、同様のことがいえる。3次、4次、5次においても6通りすべての境界条件において同様のことがいえるが、高次になるに従って収束の幅が広がっていく傾向にある。

図-6と図-7は、パラメータ α による固有値 λ の変化を、3径間と6径間の連続桁についてそれぞれ10次、19次モードまで示したものである。図中で下から順に1次、2次の固有値となっている。1径間目の固有値 λ_1 は α が減ると、すなわち端部の支間長が中間の支間長より短くなるほど小さくなることがわかる。また、グラフの右端に注目してみると、3径間連続桁の場合では、1次モードの値から順に3個ずつ固有値の群をなしている。6径間では、同様に6個ずつ固有値の群をなしている。次に左端に注目してみると、3径間では2,3,4次で一群、6,7,8次で一群をなし、その間に1,5,9次の固有値が存在している。6径間の固有値は5~10次、15~20次で6個ずつ群をなし、間に1~4次、11~14次で4個ずつ群をなしていることがわかる。

4. あとがき

本研究では、多径間連続桁の固有値を係数比較法により数値計算し、さらに、固有値の特性について考察したものである。得られた結果および今後の研究課題についてまとめると次のようになる。

- 1) 多径間連続桁の径間数が増すと、両縁端部における境界条件が固有値に与える影響は非常に小さくなる。
- 2) 連続桁の固有値はいずれの境界条件においても、径間数に応じた規則性があり、一つの群をなしている。
- 3) 一般的に、パラメータ α が小さくなると、つまり、両縁端部の支間長が中央部の支間長に比べて短くなると、固有値 λ は小さくなる傾向がある
- 4) 今後の研究課題として、ここで得られた固有値および固有関数を用いて、有限帯板法⁶⁾により多径間連続板の曲げ解析、座屈問題および振動問題に応用して行きたい。

(参考文献)

1. 岡本舜三：建設技術者のための振動学，オーム社，1976.
2. Pestel, E.C. and Leckie, F.A.: Matrix Method in Elastomechanics, McGraw-Hill, 1963.
3. Hayashikawa, T. and Watanabe, N.: Dynamic Behavior of Continuous Beams with Moving Loads, Proc. of ASCE, Vol. 107, No. EM1, 1980.
4. Hayashikawa, T. and Watanabe, N.: Free Vibration Analysis of Continuous Beams with Moving Loads, Proc. of ASCE, Vol. 111, No. EM11, 1984.
5. Wendroff, B.: Theoretical Numerical Analysis, Academic Press, 1966.
6. Y. K. Cheung: Finite Strip Method in Structural Analysis, Pergamon, 1976.

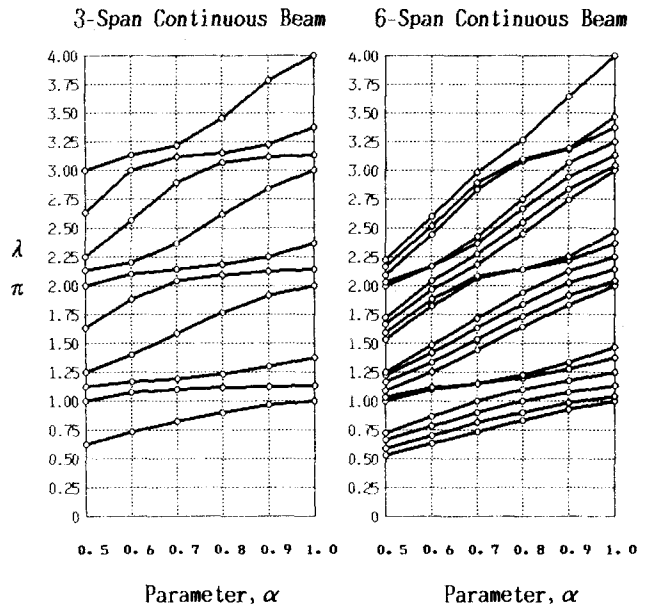


図-6 3径間連続桁

図-7 6径間連続桁