

I-32

折れ線近似した円弧梁の固有振動解析

北海道大学工学部 正員 林 川 俊 郎

北海道大学工学部 正員 角 田 典史雄

北海道大学工学部 学生員 猪 狩 卓 哉

1. まえがき

薄肉断面を有する曲線格子桁橋の固有振動解析は、部材軸線の曲率面外変位、すなわち鉛直方向変位と断面のねじり角が連成するため、直線桁橋に比べて非常に複雑になる。薄肉曲線桁の運動方程式（基礎微分方程式）を解析的に陽な形で解を求めることは、ある限られた境界条件の場合を除いて容易なことではない。そこで、本研究では曲げねじりを考慮した円弧梁を多角形に折れ線近似し、変位法（有限要素法）を併用し、固有値問題から固有円振動数を求め、その適用性について検討したものである。

2. 円弧梁の基礎微分方程式による解

直線梁と同様に部材軸に沿って座標 x を設定し、円弧梁の部材長を L 、中心角を α で表わせば、この梁に作用する面外鉛直荷重 q 、ねじりモーメント荷重 m と梁に生ず断面力、すなわち曲げモーメント M 、せん断力 Q およびねじりモーメント T との間に成立すべき力の平衡条件式は次の3式によって表わされる¹⁾。

$$\frac{dQ}{dx} + q = 0 \quad \text{----- (1)}$$

$$\frac{dM}{dx} - \frac{\alpha}{L} T - Q = 0 \quad \text{----- (2)}$$

$$\frac{dT}{dx} + \frac{\alpha}{L} M + m = 0 \quad \text{----- (3)}$$

上式(1)、(2)より、せん断力 Q を消去すれば、次式が導かれる。

$$\frac{d^2 M}{dx^2} - \frac{\alpha}{L} \frac{dT}{dx} + q = 0 \quad \text{----- (4)}$$

また、薄肉断面を有する円弧梁の鉛直たわみ w 、たわみ角 ϕ 、ねじり角 ψ 、そり変形を W と表わせば、これらの変位と応力との関係は次式で与えられる。

$$\phi = \frac{dw}{dx} \quad \text{----- (5)}$$

$$W = -\omega \left(\frac{d\psi}{dx} - \frac{\alpha}{L} \frac{dw}{dx} \right) \quad \text{----- (6)}$$

$$M = -EI \left(\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{\alpha}{L} \psi \right) \quad \text{----- (7)}$$

$$T = GJ \left(\frac{d\psi}{dx} - \frac{\alpha}{L} \frac{dw}{dx} \right) - EC_w \left(\frac{d^3 \psi}{dx^3} - \frac{\alpha}{L} \frac{d^3 w}{dx^3} \right) \quad \text{----- (8)}$$

$$M_w = EC_w \left(\frac{\alpha}{L} \frac{d^2 w}{dx^2} - \frac{d^2 \psi}{dx^2} \right) \quad \text{----- (9)}$$

ただし、 EI は曲げ剛性、 GJ はねじり剛性、 EC_w は曲げねじり剛性を表わす。また ω はねじり中心に関するそり関数で、種々の形状を有する薄肉断面に対してあらかじめ算定されるべき量である。 M_w は曲げねじりモーメントである。

ここで、 $x = L \cdot \eta$ ($\eta = x/L$) と x の無次元化を行ない、 $\bar{\phi} = L \phi$ 、 $\bar{\psi} = L \psi$ とおき、

Natural Vibration Analysis of Circular Beams Approximated by Polygonal Lines

by Toshiro HAYASHIKAWA, Yoshio KAKUTA and Takuya IGARI

式(7), (8)を式(3), (4)に代入し変形をほどこせば次の2式を得る。

$$\alpha \frac{EC_w}{L^2 EI} \frac{d^4 w}{d\eta^4} - \alpha \left(1 + \frac{GJ}{EI}\right) \frac{d^2 w}{d\eta^2} - \frac{EC_w}{L^2 EI} \frac{d^4 \bar{\psi}}{d\eta^4} + \frac{GJ}{EI} \frac{d^2 \bar{\psi}}{d\eta^2} - \alpha^2 \bar{\psi} + \frac{L^3}{EI} m = 0 \quad (10)$$

$$\left(1 + \alpha^2 \frac{EC_w}{L^2 EI}\right) \frac{d^4 w}{d\eta^4} - \alpha^2 \frac{GJ}{EI} \frac{d^2 w}{d\eta^2} - \alpha \frac{EC_w}{L^2 EI} \frac{d^4 \bar{\psi}}{d\eta^4} + \alpha \left(1 + \frac{GJ}{EI}\right) \frac{d^2 \bar{\psi}}{d\eta^2} - \frac{L^4}{EI} q = 0 \quad (11)$$

以上、2式が薄肉断面を有する円形曲がり梁を支配する弾性曲線の微分方程式である。

円弧梁の単位長さあたりの質量を ρ とし、ねじり回転慣性を微小として無視すれば、慣性力 q 、 m はそれぞれ次式で与えられる、

$$q = -\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad m = 0 \quad (12)$$

これらの式(12)を式(10), (11)に代入し、ねじり角 $\bar{\psi}$ を消去すれば、曲げねじりを考慮した円弧梁の面外自由振動に関する基礎微分方程式は次のように得られる。

$$\begin{aligned} & \frac{EC_w}{L^2 EI} \frac{\partial^8 w}{\partial \eta^8} + \left(2\alpha^2 \frac{EC_w}{L^2 EI} - \frac{GJ}{EI}\right) \frac{\partial^6 w}{\partial \eta^6} + \alpha^2 \left(\alpha^2 \frac{EC_w}{L^2 EI} - 2\frac{GJ}{EI}\right) \frac{\partial^4 w}{\partial \eta^4} - \alpha^4 \frac{GJ}{EI} \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \\ & + \frac{\rho L^4}{EI} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{EC_w}{L^2 EI} \frac{\partial^4 w}{\partial \eta^4} - \frac{GJ}{EI} \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \alpha^2 w \right) = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

ここで、円弧梁の固有円振動数を ω_0 として

$$w(\eta, t) = Y(\eta) * \sin \omega_0 t \quad (14)$$

とおくと、式(13)は関数 $Y(\eta)$ に関する8階の常微分方程式となる。しかし、この一般解を陽な形で求めることは非常に困難である。ただし、円弧梁の両端が単純支持の場合には、

$$Y(\eta) = \sin n\pi\eta \quad (15)$$

として、両端($\eta=0$, $\eta=1$)における境界条件を満足する関数が存在する。この場合の固有円振動数は式(14)と(15)を式(13)に代入することにより、次のように

$$\omega_0 = \frac{(n\pi) \{ (n\pi)^2 - \alpha^2 \}}{\{ (n\pi)^2 + \frac{\alpha^2}{\nu (n\pi)^2 + \mu} \}^{1/2}} \sqrt{\frac{EI}{\rho L^4}} \quad (16)$$

と求められる。ただし、

$$\mu = \frac{GJ}{EI}, \quad \nu = \frac{EC_w}{L^2 EI} \quad (17)$$

である。したがって、両端単純支持された円弧梁の固有振動モード $Y(\eta)$ および固有円振動数 ω_0 はそれぞれ式(15), (16)より計算できる。

3. 薄肉直線梁の剛性マトリックスと質量マトリックス

曲げねじりを考慮した円弧梁を多角形に折れ線近似し、それぞれの薄肉直線部材に対して変位法(有限要素法)を適用し、離散座標系による集中質量法および整合質量法を用いて面外固有振動解析を行なう。ここで、質量マトリックスの誘導方法として、前者は部材要素の片側半分の質量と質量モーメントを曲げ変形およびねじり変形に対してそれぞれ両節点に等しく置換する方法である。後者は軸変形には1次式、曲げ変形には3次式、St. Venantのねじり変形には1次式およびそり変形には3次式の変位関数を用いて部材要素の質量を分配する方法である。

したがって、薄肉直線梁の剛性マトリックスおよび質量マトリックスは次のように与えられる²⁾。

$$\{F\} = [K] \{U\}, \quad \{F\} = [M] \{U\}$$

$$\text{ここで、} \quad \{F\} = \{Q_{xi}, M_{yi}, M_{zi}, M_{wi}, Q_{xj}, M_{yj}, M_{zj}, M_{wj}\}^T \quad (18)$$

$$\{U\} = \{u_{xi}, \beta_{xi}, \theta_{zi}, \theta_{wi}, u_{xj}, \beta_{xj}, \theta_{zj}, \theta_{wj}\}^T \quad (19)$$

さらに、 $[K]$ は剛性マトリックスであり、 $[M]$ は質量マトリックスである。

4. 数値計算結果

数値計算例として、単純支持された曲線桁について考える。

計算に必要な断面諸元は以下の通りである^{3), 4)}。

$$R = 50\text{m}, \quad \alpha = 0.64\text{rad}$$

$$I_x = 9.820 \times 10^{-1} \text{m}^4$$

$$I_y = 1.633 \times 10^{-1} \text{m}^4$$

$$GJ = 2.733 \times 10^{-1} \text{m}^4$$

$$Cw = 4.942 \times 10^{-2} \text{m}^6$$

$$A = 0.633 \text{m}^2, \quad \gamma = 7.85 \text{t/m}^3$$

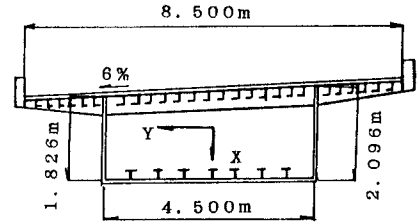


図-1 曲線桁の断面図

図-2は上記の円弧梁を多角形に折れ線近似し(要素分割数 $N=20$)、集中質量法および整合質量法によりそれぞれ求められた固有振動モードである。

この図-2より、第1次モードは面外対称1次モードであり、第2次モードは面外逆対称1次モードである。第3次モードは明確な面外変位は現われず、ねじり角が卓越したねじり1次モードと考えられる。第4次モードは面外対称2次モードであり、第5次モードはねじり2次モードである。第6次モードは面外逆対称2次モードであり、第7、8次モードはそれぞれ、ねじり3、4次モードである。第9次モードは面外対称3次モードであり、第10次モードはねじり5次モードであると考えられる。

一般的に、集中質量法および整合質量法により求められた固有振動モードには大きな差異は見受けられない。

同一の断面諸元を有する円弧梁の1次

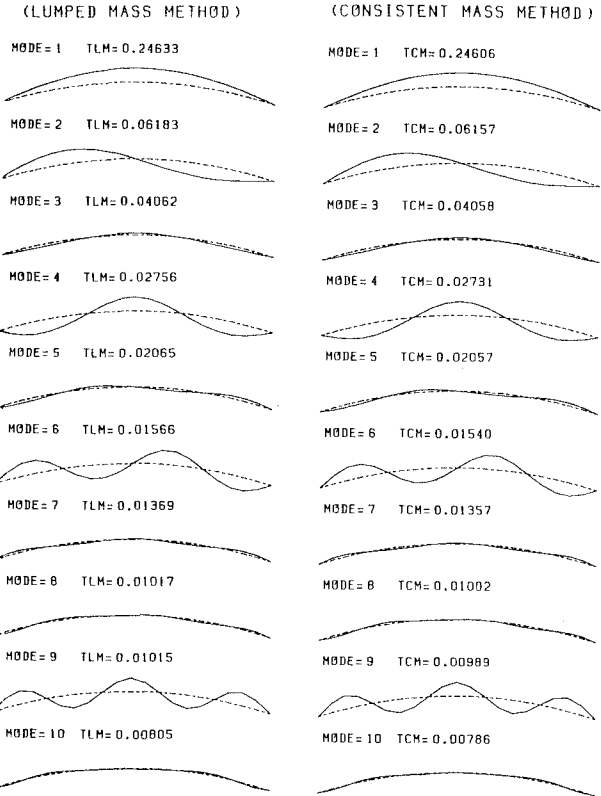


図-2 固有振動モード

同一の断面諸元を有する円弧梁の1次から5次までの計算された固有振動数が表-1に示されている。ここで本解析Aと本解析Bは、それぞれ折れ線近似による集中質量法および整合質量法による計算結果である。また、解析Iは曲線桁の軸線の曲率を考慮し、軸方向変位は1次の多項式で、その他の変位は3次の多項式で近似することにより、剛性マトリックスおよび質量マトリックスを求めて、固有振動解析した計算結果である³⁾。さらに、解析IIは、式(16)により求められた固有振動数である。この解析IIでは、図-2で示したねじり振動モードに対応する固有振動数を求めることができない。

本解析Aおよび本解析Bの固有振動数は、折れ線近似の要素分割数 N が比較的小さい値で十分収束していることがわかる。また、解析IIにより求められた固有振動数に比較して、本解析Bの値はやや大きめの値を与えている。さらに、本解析Aの固有振動数は本解析Bによる結果と比較して、やや小さい値となっていることがわかる。

図-3は固有振動数 f と要素分割数 N との関係を示したものである。

一般的に、本解析Aは他の解析法に比較して、要素分割数による収束が遅い。特に、高次振動モードになるにつれて、その収束性が悪くなる傾向にある。本解析Bは比較的収束が早く、ほぼ $N = 8$ 分割数で収束していることがわかる。

表-1 固有振動数 f (Hz)

解析法		MODE				
		1st	2nd	3rd	4th	5th
本解析A	$N=2$	3.649	11.482	16.213	19.735	22.029
	4	3.956	14.691	23.775	29.656	43.108
	6	4.016	15.518	24.328	33.188	46.427
	8	4.037	15.827	24.479	34.605	47.416
	12	4.052	16.054	24.573	35.693	48.093
本解析B	$N=2$	4.066	18.166	24.156	46.707	49.063
	4	4.064	16.295	24.653	37.228	48.667
	6	4.064	16.253	24.650	36.756	48.643
	8	4.064	16.245	24.647	36.663	48.632
	12	4.064	16.242	24.644	36.626	48.625
解析I	$N=2$	3.743	17.472	25.126	45.006	—
	4	3.727	15.755	25.122	36.090	—
	6	3.726	15.704	25.123	35.577	—
	8	3.726	15.695	25.123	35.482	—
	12	3.726	15.691	25.123	35.445	—
II		3.741	15.812	—	35.953	—

5. あとがき

本研究は、曲げねじりを考慮した円弧梁を多角形に折れ線近似し、求められた固有値の収束性および精度について検討したものである。本解析Bにより求められた固有振動数は少ない要素分割数で収束し、比較的良好な値を与えることがわかった。今後の課題として、多径間曲線格子桁の固有振動解析に応用できるものと考えられる。なお、本研究の数値計算には、北海道大学大型計算機センターのHITAC M-682とS-80 システムを利用した。

(参考文献)

- 1) 山崎、崎山：薄肉断面を有する円形曲がり梁の面外自由振動、九大工学集報、第41巻、第4号、1968.
- 2) 鷺津、宮本、山田、山本、川井：有限要素法ハンドブック、I 基礎編、培風館、1981.
- 3) 鋳、薄木、稼農：薄肉曲線けた橋の振動解析、土木学会第33回年次学術講演会、1978.
- 4) 小松、中井：Study on Free Vibration of Curved Girder Bridges、土木学会論文報告集、第136号、1966.

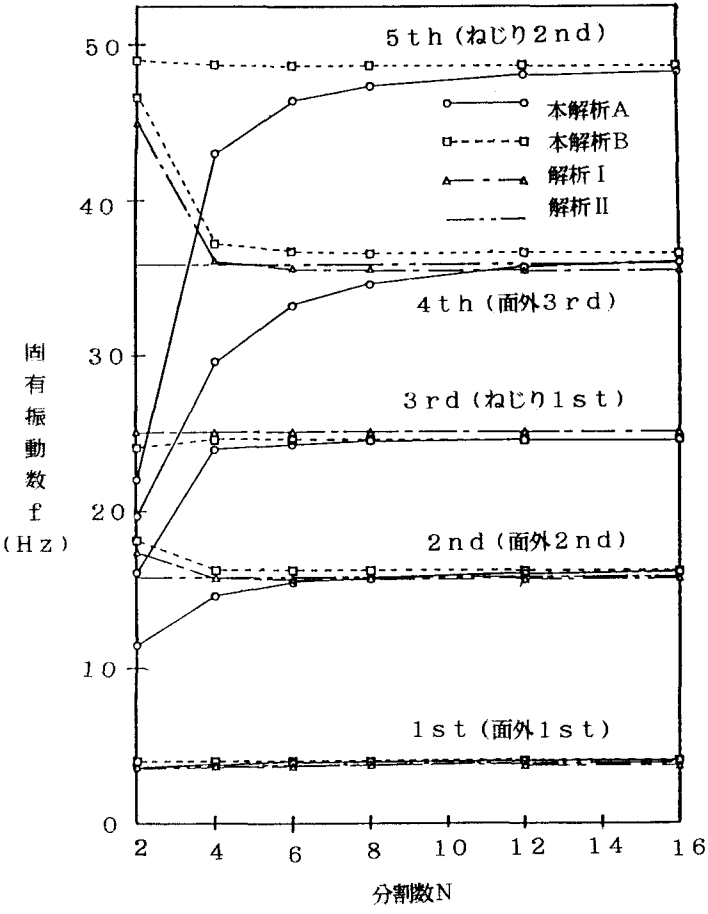


図-3 固有振動数と要素分割数の関係