I －27　　円筒殻と内部・外部液体の連成振動解析

北海道大学工学部　正　員　芳村　仁
北海道大学工学部　正　員　三上　隆
北海道大学大学院　学生員　岩橋　雅幸

1．はじめに

円筒殻と液体が成す連成系の動的挙動の解明は、さまざまな工学分野において重要な問題である。その中でも特に固有振動数の決定は構造物の耐震性などを検討する上で不可欠な要因である。著者らはこれまで、液体が殻の内部あるいは外部に存在する内部・外部問題における解析について報告してきた[1,2]。ここでは内部液体と外部液体が同時に円筒殻に接する場合の振動解析、振動特性について報告する。

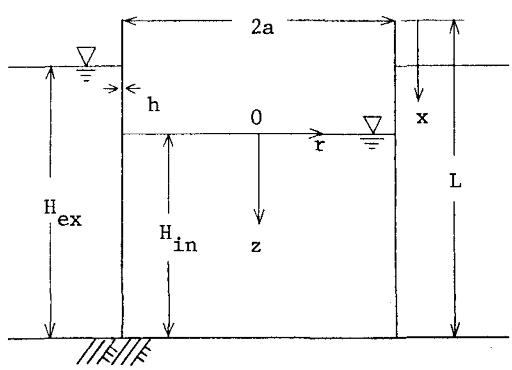
2．解析モデルと基礎方程式

1)液体の基礎方程式

図－1に示すように、液体高さH_i(i=in,ex)（in：内部問題，ex：外部問題）まで液体に接している、高さL，厚さh，半径aの固定式の円筒殻の自由振動問題を考える。E，ν，ρ_sを殻の弾性係数，ポアソン比，密度とし、ρ_fを液体の密度とする。

液体領域の座標系は、静止水面と殻の回転軸の交点を原点、鉛直下方にｚ軸をとる円筒座標系(r，θ，z)で表す。液体運動は非圧縮、非粘性で渦無し流れを仮定すれば、流体系の基礎方程式は次のように表される。

Interior and Exterior problem



図－1　　解析モデル

$$\Phi_{,rr}+\Phi_{,r}/r+\Phi_{,\theta\theta}/r^2+\Phi_{,zz}=0 \quad \cdots\cdots(1)$$

$$\Phi_{,z}|_{z=H}=0 \quad \cdots\cdots(2) \qquad \Phi_{i,r}|_{r=a}=W_{,t}\quad (i=in,ex) \quad \cdots\cdots(3)$$

$$p|_{z=0}=0 \quad \cdots\cdots(4) \qquad \Phi|_{r\to\infty}\to 0 \quad \cdots\cdots(5)$$

ここで、Φは流体速度を与える速度ポテンシャル、コンマに続く下添字は偏微分を表す。式(1)は液体のラプラス方程式、式(2)は水底条件式、式(3)は速度の連続性を表すinterface条件式（Wは後述する殻の半径方向変位）、式(4)は自由表面条件式（重力の影響を無視）、式(5)は外部問題に対する遠方条件である。式(4)中のｐは圧力で、線形化ベルヌーイ式より次のように表される。

$$p=-\rho_f\Phi_{,t} \quad \cdots\cdots(6)$$

2)液体に接する円筒殻の基礎方程式

殻の運動方程式は変形が小さく、せん断変形・回転慣性の影響を取り入れた修正理論に従うものとする。u，v，wをそれぞれ経線方向(x)，周方向(θ)，半径方向(r)の変位成分、β_x，β_θをそれぞれ曲げのみによる回転角成分とする。

液体と殻の連成系は、円周方向波数ｎおよび円振動数ωの調和振動をするものと仮定する。式(1)～(5)をΦについて解き、さらに式(6)より動水圧を求め、適当な無次元量を導入すれば、液体に接する円筒殻の運動方程式は次のように表される。

Free Vibration Analysis of Cylindrical Shells in Contact with External and Internal Liquids
by Jin YOSHIMURA, Takashi MIKAMI and Masayuki IWAHASHI

$$[C]\{X''\}+[D]\{X'\}+[E]\{X\}=\Omega^2([F]\{X\}+\{P_{in}\}+\{P_{ex}\}) \quad \cdots\cdots(7)$$

ここに、$(\quad)'=d(\quad)/d\xi$，$\xi(=[0,1])$は液体と殻の接触、非接触領域で独立に定義される経線方向座標xの無次元化座標である。[C],[D],[E]および[F]は、殻の諸元のみで表される5×5次の行列、Ω^2 は液体－円筒殻系の固有円振動パラメータであり、次式で表される。

$$\Omega^2=\rho_s(1-\nu^2)a^2\omega^2/E \quad \cdots\cdots(8)$$

さらに、

$$\{X\}^T=(u,\ v,\ w,\ \beta_x,\ \beta_\theta),\ \{P_i\}^T=(0,\ 0,\ p_{wi},\ 0,\ 0)\quad (i=in,ex) \quad \cdots\cdots(9)$$

であり、$\{P_i\}$ は流体との相互作用により発生する外圧力ベクトルで、その非零成分は次式で表される。

$$p_w=(\rho_f/\rho_s)(a/h)\cdot p_i \quad (i=in,ex) \quad \cdots\cdots(10)$$

ここで、

$$p_{in}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2I_n(\lambda_k)}{\lambda_k I_n'(\lambda_k)}\sin(\lambda_k H\eta/a)\int_0^1 w\sin(\lambda_k H\eta/a)d\eta \quad \cdots\cdots(11.a)$$

(Interior problem)

$$p_{ex}=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2K_n(\lambda_k)}{\lambda_k K_n'(\lambda_k)}\sin(\lambda_k H\eta/a)\int_0^1 w\sin(\lambda_k H\eta/a)d\eta \quad \cdots\cdots(11.b)$$

(Exterior problem)

ただし、$\lambda_k=(2k-1)\pi a/2H$, $\eta=z/H\ (=[0,1])$, I_n, K_nはそれぞれ第１種変形、第２種変形Bessel関数であり、I_n' ,K_n' はそれぞれλ_kに関する一階微分である。

式(7),式(11.a,b)より明らかなように、液体に接する円筒殻の自由振動問題は、未知関数wの積分を含む微積分方程式を殻の端末で規定される境界条件の基で解く問題に帰着された。

３．解析手法

基礎方程式（式(7)）は、微分項と積分項からなる微積分方程式である。ここでは、微分項に対しては Legendre多項式の零点を選点とする選点法、積分項に対しては分点が選点を共有する補間型積分則を用いて離散化し、解析するが、その詳細は文献2)を参照されたい。

４．数値計算

特に断わりのない限り、殻及び液体の材料定数には、$E=2.1\times10^6$kg/cm^2，$\nu=0.3$，$\rho_s=7.84\times10^{-3}$kg/cm^3 $\rho_f=1.0\times10^{-3}$kg/cm^{3}を用いた。

1)解の精度の検討

円周方向波数n=1，内部と外部の液体高さ(Hi,i=in,ex)と殻の高さ(L)が等しい場合の基本固有周期(T)を他の結果と比較する。比較に用いた結果は、文献3)で提案した内部問題および外部問題の基本固有周期略算式を利用するもので次式より算定できる。

$$T=2\pi\sqrt{\rho_s a^2/E}\ \sqrt{F^2+(\rho_{IN}/\rho_s)(a/h)G^2_{IN}+(\rho_{EX}/\rho_s)(a/h)G^2_{EX}} \quad \cdots\cdots(12)$$

ここで、

$$F=0.6301+0.8174(L/a)+0.2868(L/a)^2+0.5738\times10^{-2}(L/a)^3 \quad \cdots\cdots(13.a)$$

$$G_{IN}=0.3413+0.5131(L/a)+0.1197(L/a)^2+0.1602\times10^{-1}(L/a)^3 -0.6161\times10^{-3}(L/a)^4 \quad \cdots\cdots(13.b)$$

$$G_{EX}=0.2432+0.4747(L/a)+0.9966\times10^{-1}(L/a)^2+0.1544\times10^{-1}(L/a)^3 -0.5266\times10^{-3}(L/a)^4 \quad \cdots\cdots(13.c)$$

であり、ρ_{IN}およびρ_{EX}はそれぞれ内部液体および外部液体の密度を表す。

表－１に、$\rho_{IN}=\rho_{EX}(=\rho_f)$の場合の周期Tを種々のL/a, h/aに対して示す。これによれば、本計算値は略算解によく一致していることがわかる。

2)振動特性

殻の高さをL/a＝0.5～8.0の範囲で変化させ、円周方向波数n=1, 5の場合について、内部・外部液体が基本固有周期Tに与える影響を見る。諸元は殻厚比(h/a=)0.005である。

次の４つの場合の、$T/2\pi\sqrt{\rho_s a^2/E}$ の値の変化を、経線方向モード次数m=1について図-2, 図-3に示す。なお、H_{0i}, H_{0e}はそれぞれ、内部、外部の液高比H_{in}/L, H_{ex}/Lである。

Case 1) H_{0i}=1.0, H_{0e}=1.0

Case 2) H_{0i}=1.0, H_{0e}=0.0

Case 3) H_{0i}=0.0, H_{0e}=1.0

Case 4) H_{0i}=0.0, H_{0e}=0.0

図-2の波数n=1の場合、L/aが大きくなるに伴い、基本固有周期Tは単調増加の傾向がみられる。また、図-3のn=5の場合、一定値に収束する傾向があり、内部問題と外部問題でほぼ同じ値となる。この事より固有振動解析は、波数が大きいとき内部問題（外部問題）の研究より外部問題（内部問題）の固有周期の推定が可能になる。L/a=1.0, 4.0 の点で内部あるいは外部だけに液体が存在する場合と、両方に存在する場合とで、$T/2\pi\sqrt{\rho_s a^2/E}$ の値を比較するとおよそ35％の固有周期の増加がみられる。

次に、L/a=1.0, 4.0として、内部・外部に液体が存在する場合について解析する。円周方向波数n=1、経線モード次数m=1とし、次の３つの場合について、図-4, 図-5に示す。

Case 5) H_{0i}=1.0　　, H_{0e}=variable

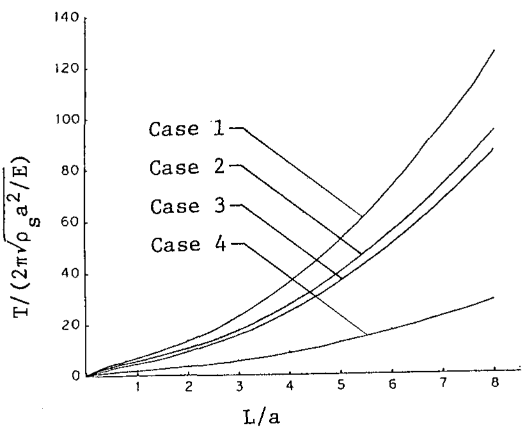
Case 6) H_{0i}=variable, H_{0e}=1.0

Case 7) H_{0i}= H_{0e}=variable

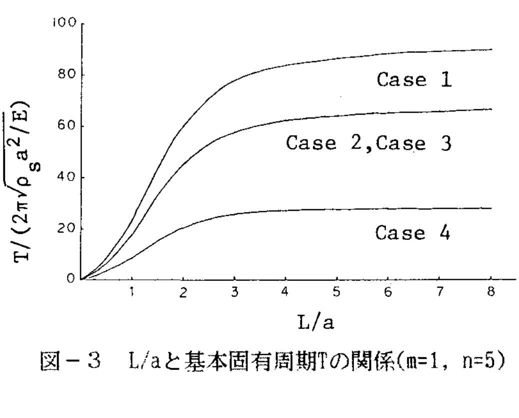
図-2でもわかるように、固有周期に与える影響は外部流体によるものに比べて、内部流体によるものの方が大きい。このことは、外部と内部に液体が同時に存在する場合でもいえることである。

表－１　解の比較 $[T/2\pi\sqrt{\rho_s a^2/E}]$

L/a	解法	h/a=0.0005	h/a=0.005	h/a=0.01
0.5	本計算値 略算解	13.15 12.96	4.00 4.23	2.96 3.09
1.0	本計算値 略算解	21.29 20.72	6.78 6.76	4.87 4.93
2.0	本計算値 略算解	41.92 41.70	13.59 13.59	9.87 9.91
4.0	本計算値 略算解	110.80 110.83	36.00 36.04	26.18 26.24
8.0	本計算値 略算解	384.83 384.87	124.63 124.67	90.38 90.24



図－２　L/aと基本固有周期Tの関係(m=1, n=1)



図－３　L/aと基本固有周期Tの関係(m=1, n=5)

5．おわりに

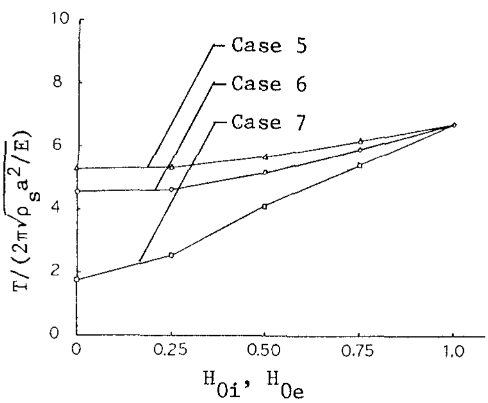
本報告では、液体が殻の内部・外部に存在する場合の固有振動解析を行い、液体の固有周期に与える影響を調べた。それによれば、液体の周期に与える影響は大きく、特に波数が小さいときは、内部液体の影響が著しい。

参考文献

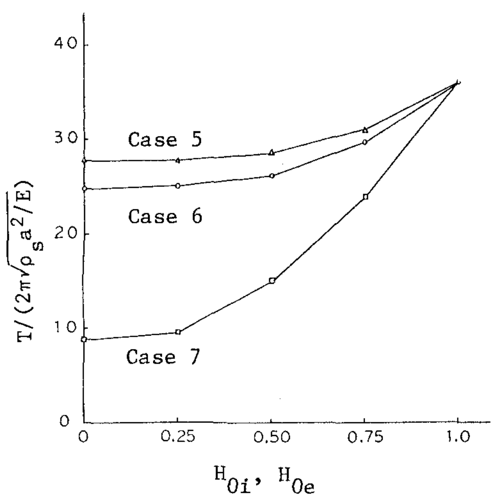
1)三上隆・芳村仁：液体－回転殻構造連成系の自由振動解析，構造工学における数値解析法シンポジウム論文集，第12号，pp.347-352，1988

2)三上隆・芳村仁：液体に接する円筒殻の自由振動，構造工学論文集，第34A号，pp.785-796，1988

3)三上隆・芳村仁：液体に接する円筒殻の固有周期略算式，土木学会北海道支部論文報告集，第45号，pp. 161-164,1989



図－4　Hoと基本固有周期の関係(L/a=1.0)



図－5　Hoと基本固有周期の関係(L/a=4.0)