

I-26

円筒パネルの振動・座屈特性

北海道大学 正 員 芳村 仁

北海道大学 正 員 三上 隆

北海道大学 学生員 朴 勝振

1. まえがき

円筒パネルは、土木・航空など工学の多くの分野で利用されているが、その振動・座屈特性の資料は、平板などに比べて極めて少ないように思われる。そこで本報告では、直線辺が単純支持、円弧辺が単純支持もしくは固定の2種類の境界条件の円筒パネルを解析し、振動・座屈特性を明らかにする。なお、解析手法は *Galerkin* 法を用い、特に固定条件を含むパネルに対しては、試行関数として三角関数のみで表わされる場合および双曲線関数で表わされる梁の固有関数を用いて解析し、試行関数の解に与える影響も明らかにする。

2. 基礎式および境界条件

図-1に示すように、高さ a 、弧に沿った長さ b 、一様厚さ h 、曲率半径 R の等方等質な円筒パネルの振動と座屈問題を考える。円筒パネルの中央面上に x, y 軸を、それらに垂直に z 軸を定める(図-1)。初期応力を受ける円筒パネルの基礎微分方程式は、ひずみエネルギー、運動エネルギーおよび初期応力による仕事を用い、*Hamilton* 原理より次式のように得られる。

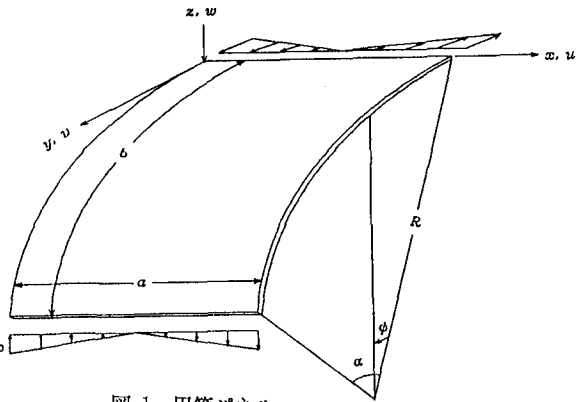


図-1、円筒パネル

$$L1(u, v, w) = R^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{2}(1-\nu) \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{R}{2}(1+\nu) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \phi} - \nu R \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\rho}{E}(1-\nu^2) R^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \sigma_0 \frac{1}{E}(1-\nu^2) \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0 \quad \text{--- (1)}$$

$$L2(u, v, w) = \frac{R}{2}(1+\nu) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \phi} + \frac{R^2}{2}(1-\nu) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \phi^2} + K \left[R^2(1-\nu) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \phi^2} \right] - \frac{\partial w}{\partial \phi} + K \left[R^2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \phi} + \frac{\partial^3 w}{\partial \phi^3} \right] + \frac{\rho}{E}(1-\nu^2) R^2 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \sigma_0 \frac{1}{E}(1-\nu^2) \left[v + \frac{\partial^2 v}{\partial \phi^2} \right] = 0 \quad \text{--- (2)}$$

$$L3(u, v, w) = \nu R \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \phi} + K \left[-R^2(2-\nu) \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial \phi} - \frac{\partial^3 v}{\partial \phi^3} \right] - w - K \left[R^4 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2R^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial \phi^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial \phi^4} \right] + \frac{\rho}{E}(1-\nu^2) R^2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \sigma_0 \frac{1}{E}(1-\nu^2) \left[w + \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} \right] = 0 \quad \text{--- (3)}$$

上式において、 $K=12(h/R)^2$ 、さらに E, ν, ρ, t はヤング率、ポアソン比、密度、時間を表す。

(1)、(2)、(3)式において応力 σ_y^0 を0とすると振動問題、慣性項を0とおくと座屈問題に関する基礎式が得られる。なお、 $y=0$, b の辺上に作用する初期応力は次式で表わされるとする。

$$\sigma_y^0 = \sigma_0 \left(1 - \theta \frac{x}{a}\right) \quad \text{--- (4)}$$

ここで、 θ は初期応力の形状を表すパラメータであり、 $\theta=0$ は一様圧縮、 $\theta=2$ は純曲げの状態である。境界条件としては4辺単純支持と、直線辺が単純支持および円弧辺が固定の2つの場合を考える。

● 4辺単純支持の場合

○ $x = 0, a$ の辺で

$$N_x = M_x = v = w = 0$$

○ $\alpha = 0, \phi$ の辺で

$$N_\phi = M_\phi = u = w = 0$$

● 2辺単純2辺固定の場合

○ $x = 0, a$ の辺で

$$u = v = w = \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

○ $\alpha = 0, \phi$ の辺で

$$N_\phi = M_\phi = u = w = 0$$

$$\begin{aligned} \text{ここで、} \quad N_x &= \bar{K} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + v \left(\frac{\partial v}{R \partial \phi} - \frac{w}{R} \right) \right] & N_\phi &= \bar{K} \left[\frac{\partial v}{R \partial \phi} - \frac{w}{R} + v \frac{\partial u}{\partial x} \right] \\ M_x &= -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + v \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \phi} + \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} \right) \right] & M_\phi &= -D \left[\frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \phi} + \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} \right) + v \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \\ \bar{K} &= \frac{Eh}{1-\nu^2} & D &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \end{aligned}$$

3. 試行関数

基礎微分方程式(1)、(2)、(3)式の解 u, v, w を各場合の境界条件を考慮して、三角関数の試行関数を使った場合と梁の試行関数を使った場合の二つの試行関数を考える。

$$\begin{aligned} u(x, \phi, t) &= \sum_m \sum_n a_{mn} U_{mn}(x, \phi) e^{i\omega t} \\ v(x, \phi, t) &= \sum_m \sum_n b_{mn} V_{mn}(x, \phi) e^{i\omega t} \quad (m, n=1, 2, 3, \dots) \quad \text{--- (5)} \\ w(x, \phi, t) &= \sum_m \sum_n c_{mn} W_{mn}(x, \phi) e^{i\omega t} \end{aligned}$$

ただし、 ω は円振動数、座標関数 U_{mn}, V_{mn}, W_{mn} は、各場合に対して次の式で与えられる。

(1) 4辺単純支持の場合

$$U_{mn} = \cos \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{a} \phi \quad V_{mn} = \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \cos \frac{n\pi}{a} \phi \quad W_{mn} = \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{a} \phi \quad \text{--- (6)}$$

(2) 2辺単純2辺固定の場合

三角関数で表わされる式(7)および梁の固有関数の式(8)を採用する。

$$\begin{aligned} U_{mn} &= \left[\sin \frac{m-1}{a} \pi x - \sin \frac{m+1}{a} \pi x \right] \sin \frac{n\pi}{a} \phi & V_{mn} &= \left[\cos \frac{m-1}{a} \pi x - \cos \frac{m+1}{a} \pi x \right] \cos \frac{n\pi}{a} \phi \\ W_{mn} &= \left[\cos \frac{m-1}{a} \pi x - \cos \frac{m+1}{a} \pi x \right] \sin \frac{n\pi}{a} \phi \quad \text{----- (7)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_{mn} &= \left[\cos \frac{\mu_m}{a} x - \cosh \frac{\mu_m}{a} x + \alpha_m \left\{ \sin \frac{\mu_m}{a} x + \sinh \frac{\mu_m}{a} x \right\} \right] \sin \frac{n\pi}{a} \phi \\ V_{mn} &= \left[\sin \frac{\mu_m}{a} x - \sinh \frac{\mu_m}{a} x - \alpha_m \left\{ \cos \frac{\mu_m}{a} x - \cosh \frac{\mu_m}{a} x \right\} \right] \cos \frac{n\pi}{a} \phi \quad \text{----- (8)} \end{aligned}$$

$$W_{mn} = \left[\sin \frac{\mu_m}{a} x - \sinh \frac{\mu_m}{a} x - \alpha_m \left\{ \cos \frac{\mu_m}{a} x - \cosh \frac{\mu_m}{a} x \right\} \right] \sin \frac{n\pi}{a} \phi$$

ここで、 $\alpha_m = (\sin \mu_m - \sinh \mu_m) / (\cos \mu_m - \cosh \mu_m)$ であり、 μ_m は次式をみたす値である。

$$\cos(\mu_m) \cdot \cosh(\mu_m) = 1 \quad \text{-----} (9)$$

4. 数値計算例

以下に示す結果は、振動問題では無次元化基本固有円振動数 Ω 、座屈問題では座屈係数 κ_{or} である。

$$\kappa_{or} = \frac{12(1-\nu^2)\sigma_0 a^2}{E\pi^2 h^2} \quad \Omega^2 = \frac{\rho(1-\nu^2)\omega^2 a^2}{E}$$

(1) 解の精度および試行関数の解に及ぼす影響

円筒パネルの諸元は、 $\nu=0.3$ 、縦横比 $a/b=1$ とし、曲率パラメータ $b^2/Rh=0$ (平板)、10、20の場合を解析の対象とする。

(a) 4辺単純支持の場合

結果を表1～表3に示す。これによれば、解は振動・座屈問題によらず5,6項程度で収束し、その値は他の解法¹⁾の結果によく一致している。

(b) 2辺単純2辺固定の場合

結果を表4～表6に示す。式(7)の三角関数のみで表わされた試行関数の結果は、7～9項程度で収束し、その値は選点法の解とよく一致している。しかし、式(8)の梁の固有関数を用いた結果は、項数に大きく依存し、大きな項数で解析すれば急に乱れる傾向にある。これは、試行関数に双曲線関数が含まれるので、丸め誤差のため係数行列の精度が悪くなるためと思われる。以後の計算は式(7)の試行関数を用いることにする。

表-1, 振動(4辺単純支持)の場合

$\begin{matrix} m, n \\ b^2/Rh \end{matrix}$	Galerkin法				選点法
	1	3	5	7	
0	0.0285	0.0285	0.0285	0.0285	0.0285
10	0.0371	0.0371	0.0371	0.0371	0.0371
20	0.0555	0.0555	0.0555	0.0555	0.0555

表-2, 座屈(4辺単純支持, $\theta=0$)の場合

$\begin{matrix} m, n \\ b^2/Rh \end{matrix}$	Galerkin法				選点法
	1	3	5	7	
0	4.0000	4.0000	4.0000	4.0000	3.999
10	6.8021	6.3614	6.3614	6.3614	6.359
20	15.2110	6.6955	6.6955	6.6955	6.696

表-3, 座屈(4辺単純支持, $\theta=2$)の場合

$\begin{matrix} m, n \\ b^2/Rh \end{matrix}$	Galerkin法				選点法
	2	4	6	8	
0	27.758	25.536	25.529	25.529	25.512
10	28.611	26.350	26.338	26.337	26.323
20	31.143	28.751	28.742	28.742	28.736

表-4, 試行関数の固有振動数に与える影響

(a) 三角関数を用いた場合

δ^2/Rh \ m, n	Galerkin法							選点法
	1	3	5	7	9	11	13	
0	0.0427	0.0420	0.0418	0.0418	0.0418	0.0418	0.0418	0.0418
10	0.0511	0.0499	0.0496	0.0495	0.0494	0.0494	0.0493	0.0491
20	0.0703	0.0683	0.0677	0.0674	0.0672	0.0670	0.0669	0.0664

(b) 梁の固有関数を用いた場合

δ^2/Rh \ m, n	Galerkin法							選点法
	1	3	5	7	9	11	13	
0	0.0419	0.0418	0.0418	0.0418	0.0418	0.0418	0.0418	0.0418
10	0.0499	0.0495	0.0494	0.0494	0.0495	0.0494	0.0494	0.0491
20	0.0687	0.0676	0.0672	0.0672	0.0674	0.0672	0.0411	0.0664

表-5, 試行関数の座屈係数に与える影響($\theta=0$)

(a) 三角関数を用いた場合

δ^2/Rh \ m, n	Galerkin法							選点法
	1	3	5	7	9	11	13	
0	9.0000	7.7755	7.7249	7.7078	7.7005	7.6970	7.6950	7.686
10	12.8482	8.0325	7.9747	7.9542	7.9450	7.9401	7.9373	7.908
20	24.3988	8.8023	8.7226	8.6916	8.6764	8.6676	8.6620	8.570

(b) 梁の固有関数を用いた場合

δ^2/Rh \ m, n	Galerkin法							選点法
	1	3	5	7	9	10	11	
0	8.6319	7.7117	7.7036	7.7036	7.7040	6.6246	2.0919	7.686
10	12.2876	7.9337	7.9193	7.9193	7.9202	6.5476	0.5372	7.908
20	23.2600	8.5982	8.5647	8.5646	8.5671	5.1847	0.9856	8.570

表-6, 試行関数の座屈係数に与える影響($\theta=2$)

(a) 三角関数を用いた場合

δ^2/Rh \ m, n	Galerkin法						選点法
	2	4	6	8	10	12	
0	49.325	41.080	40.205	39.938	39.823	39.765	39.626
10	51.075	42.405	41.468	41.175	41.044	40.979	40.766
20	56.323	46.367	45.239	44.869	44.695	44.600	44.169

(b) 梁の固有関数を用いた場合

δ^2/Rh \ m, n	Galerkin法					選点法
	2	4	6	7	8	
0	45.876	40.165	40.008	13.476	1.194	39.626
10	47.424	41.380	41.191	13.477	1.163	40.766
20	52.063	45.012	44.723	13.480	1.068	44.169

(2) 振動特性と座屈特性

円筒パネルの緒元は $v=0, 3, a/b=1$ とする。結果を図-2～図-4に示す。図の縦軸は Ω または k であり、横軸は曲率パラメータ b^2/Rh であり、その範囲は $0 \leq b^2/Rh \leq 100$ である。各図は2ないし3本の曲線群で表わされており、これは最小固有振動数および座屈係数が、振動波形および座屈波形に依存するからである。ここで、波形を (m, n) [$m, n=x, \phi$ 方向の半波数を表す] で示せば、例えば4辺単純支持の振動問題では $0 \leq b^2/Rh < 30$ では $(m, n)=(1, 1)$ 、 $30 \leq b^2/Rh \leq 100$ では $(m, n)=(1, 2)$ であり、同様に固定条件が関与する場合には (m, n) を明確に表示することは不可能であるが、モード図より判断すれば、 $0 \leq b^2/Rh < 30$ では $(m, n)=(1, 1)$ 、 $30 \leq b^2/Rh \leq 100$ では $(m, n)=(1, 2)$ である。なお、参考のために、2辺単純2辺固定のときの振動モードを $b^2/Rh=10, 50$ について図-5に示す。

5. まとめ

相対する直線辺が単純支持、円弧辺が単純支持あるいは固定支持の円筒パネルの振動・座屈特性を明らかにした。さらに、固定条件に対する式(7)の形の試行関数は、積分計算が容易、また計算結果が良好など、極めて有効であるが判明した。

参考文献

- 1) 三上 隆・芳村 仁：初期応力を受ける円筒パネルの振動特性、構造工学論文集、Vol.35A、pp.709-717、1989。
- 2) Webster, J.J. : *Free vibrations of rectangular curved panels*, Int.J.Mech.Sci.Pergamon Press., Vol.10, pp.571-582、1968。

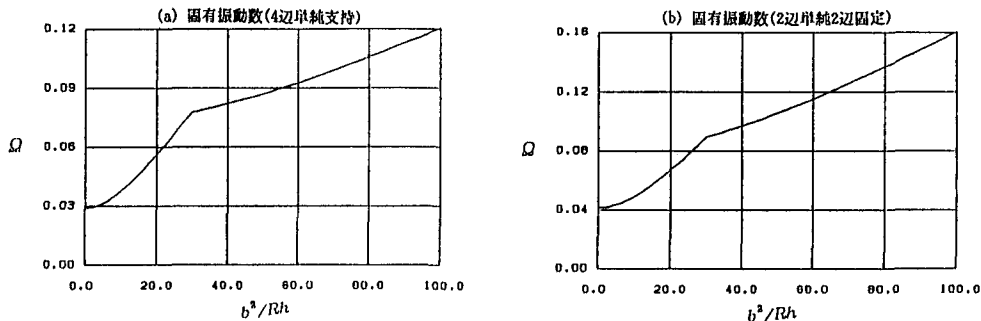


図-2、振動特性

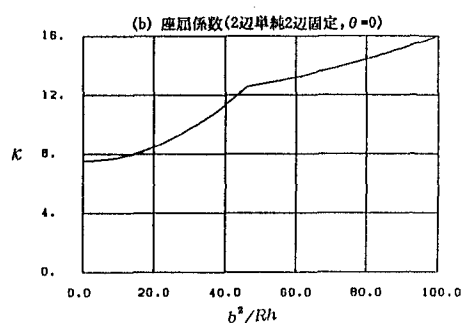
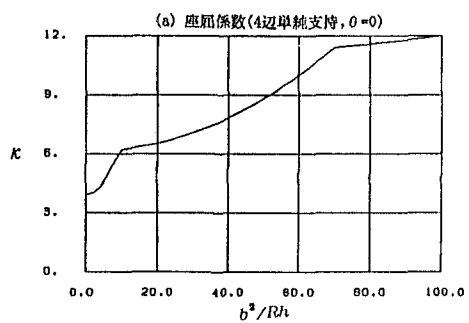


図-3、座屈特性 ($\theta=0$)

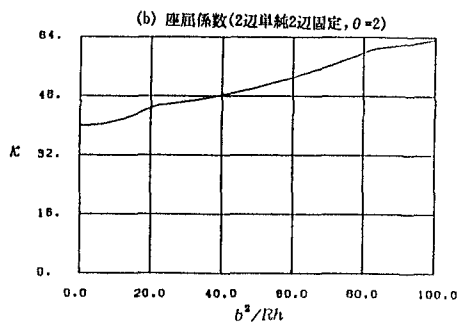
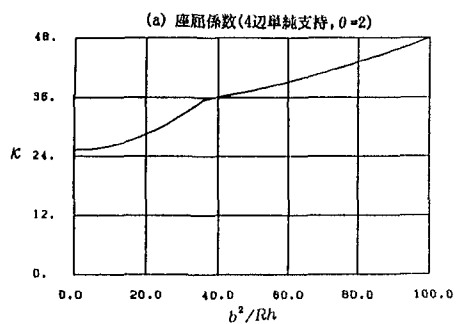


図-4、座屈特性 ($\theta=2$)

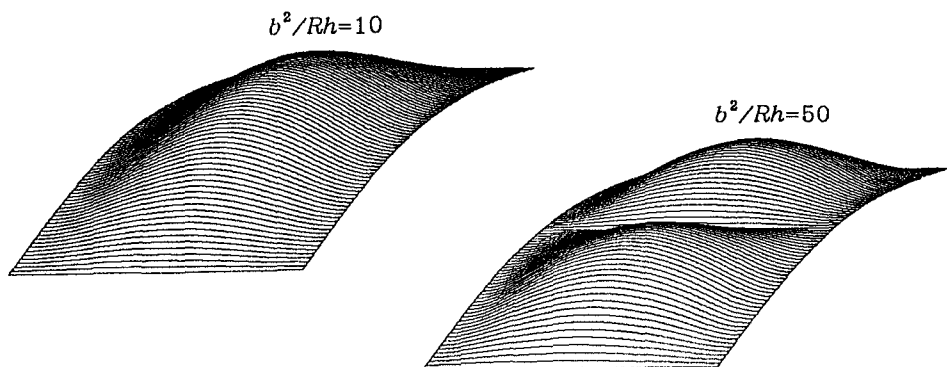


図-5、振動モード(2辺単純2辺固定)