

北海道大学 正員 芳村 仁

北海道大学 正員 三上 隆

1. はじめに

複合材料は金属材料に比較して、材料特性が優れているため、構造軽量化が重要な様々な分野で使用されてきている。特に最近では、主要構造部材への応用が進むにつれて、座屈・振動等の力学特性を明らかにすることが重要な課題となつている。このような理由から文献1) では積層板を取り上げ、その座屈・振動特性を検討した。本報告ではクロス・プライ積層円筒殻を対象にし、両端が単純支持された場合の解析例を通してその振動特性を明らかにする。

2. 基礎方程式

多層円筒殻の半径、厚さおよび長さをそれぞれ a , h および L とする。円筒殻の中央断面上に原点をとり軸・円周方向座標 (x, θ) を肉厚中央断面上に、法線方向座標 z を中央面から垂直外向きに定める。

せん断変形・回転慣性を考慮した多層円筒殻の運動方程式は次式で与えられる^{2,3)}。

$$\begin{aligned} N_{x,x} + N_{x\theta,\theta}/a &= P u_{,tt} + S \psi_{x,tt} \\ N_{x\theta,x} + N_{\theta,\theta}/a + Q_{\theta} &= P v_{,tt} + S \psi_{\theta,tt} \\ Q_{x,x} + Q_{\theta,\theta}/a - N_{\theta}/a &= P w_{,tt} \\ M_{x,x} + M_{x\theta,\theta}/a - Q_x &= S u_{,tt} + I \psi_{x,tt} \\ M_{x\theta,x} + M_{\theta,\theta}/a - Q_{\theta} &= S v_{,tt} + I \psi_{\theta,tt} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここで、コンマ(,)に続く添字は偏微分を表し、 u , v および w はそれぞれ、軸方向、円周方向および厚さ方向の変位、 ψ_x , ψ_{θ} はそれぞれ、軸方向および円周方向の回転角、また合応力 $(N_x, N_{\theta}, N_{x\theta})$, (Q_x, Q_{θ}) , 合モーメント $(M_x, M_{\theta}, M_{x\theta})$, および P , S , I は次式で表される。

$$\begin{aligned} N_x &= A_{11} \varepsilon_x + A_{12} \varepsilon_{\theta} + B_{11} \chi_x + B_{12} \chi_{\theta} \\ N_{\theta} &= A_{12} \varepsilon_x + A_{22} \varepsilon_{\theta} + B_{12} \chi_x + B_{22} \chi_{\theta} \\ N_{x\theta} &= A_{66} \gamma_{x\theta} + B_{66} \chi_{x\theta} \\ M_x &= B_{11} \varepsilon_x + B_{12} \varepsilon_{\theta} + D_{11} \chi_x + D_{12} \chi_{\theta} \\ M_{\theta} &= B_{12} \varepsilon_x + B_{22} \varepsilon_{\theta} + D_{12} \chi_x + D_{22} \chi_{\theta} \\ M_{x\theta} &= B_{66} \gamma_{x\theta} + D_{66} \chi_{x\theta} \\ Q_x &= A_{45} \gamma_{rx}, \quad Q_{\theta} = A_{44} \gamma_{r\theta} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$(P, R, I) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2) \rho dz \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= u_{,x}, \quad \varepsilon_{\theta} = v_{,\theta}/a + w/a, \quad \gamma_{x\theta} = u_{,\theta}/a + v_{,x}, \quad \chi_x = \psi_{x,x} \\ \chi_{\theta} &= \psi_{\theta,\theta}, \quad \chi_{x\theta} = \psi_{\theta,x} + \psi_{x,\theta}, \quad \gamma_{rx} = \psi_x + w_{,x}, \quad \gamma_{r\theta} = \psi_{\theta} + w_{,\theta}/a - v/a \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (4)$$

Free Vibrations of Multilayered Cylindrical Shells

by Takashi MIKAMI and Jin YOSHIMURA

さらに、 A_{st} , B_{st} および D_{st} はそれぞれ、面内剛性、カップリング剛性および曲げ剛性であり、次式で与えられる。

$$A_{st} = K_{st}^2 \int_{-h/2}^{h/2} Q_{st} dz, \quad (s, t = 4, 5) \dots\dots\dots (5. a)$$

$$(A_{st}, B_{st}, D_{st}) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2) Q_{st} dz, \quad (s, t = 1, 2, 6) \dots\dots (5. b)$$

ここで、 K_{st}^2 はせん断補正係数、 Q_{st} は各ラミナ材料主軸方向の弾性係数 E_1 , E_2 , ポアソン比 ν_{12} , ν_{21} , せん断弾性係数 G_{12} , G_{13} , G_{23} , およびブライ配向角に依存する弾性定数である。

3. 解析方法

$x=0$, L で単純支持 ($v=w=\psi_\theta = N_x = M_x = 0$) の条件を満たす変位関数として、次式を採用する。

$$\begin{aligned} u &= \sum U_{mn} \cos(m\pi x/L) \cos(n\theta) \exp(i\omega t) \\ v &= \sum V_{mn} \sin(m\pi x/L) \sin(n\theta) \exp(i\omega t) \\ w &= \sum W_{mn} \sin(m\pi x/L) \cos(n\theta) \exp(i\omega t) \\ \psi_x &= \sum X_{mn} \cos(m\pi x/L) \cos(n\theta) \exp(i\omega t) \\ \psi_\theta &= \sum Y_{mn} \sin(m\pi x/L) \sin(n\theta) \exp(i\omega t) \end{aligned} \dots\dots\dots (6)$$

ここで、 m , n はそれぞれ、軸方向および円周方向の波数、 ω は固有円振動数である。

式(4), (6)を式(1)に代入すれば、各ラミナの密度および厚さが等しい場合の積層円筒殻の固有振動数方程式は次のように得られる。

$$[K] - \omega^2 [M] = 0 \dots\dots\dots (7)$$

ここで、 $[K]$, $[M]$ は 5×5 の対称マトリックスでその非零成分は次のようである。

$$\begin{aligned} K_{11} &= \alpha^2 A_{11} + \beta^2 A_{66}, & K_{12} &= -\alpha\beta(A_{12} + A_{66}), & K_{13} &= -(A_{12}/a) \alpha \\ K_{14} &= \alpha^2 A_{11} + \beta^2 B_{66}, & K_{15} &= -\alpha\beta(B_{12} + B_{66}) \\ K_{22} &= \alpha^2 A_{66} + \beta^2 A_{22} + A_{44}/a^2, & K_{23} &= \beta(A_{22} + A_{44})/a \\ K_{24} &= -\alpha\beta(B_{12} + B_{66}), & K_{25} &= \alpha^2 B_{66} + \beta^2 B_{22} - B_{44}/a \\ K_{33} &= \alpha^2 A_{55} + \beta^2 A_{44} + A_{22}/a^2, & K_{34} &= \alpha(A_{55} - B_{12}/a) \\ K_{35} &= \beta(B_{22}/a - A_{44}), & K_{44} &= \alpha^2 D_{11} + \beta^2 D_{66} + A_{55} \\ K_{45} &= -\alpha\beta(D_{12} + D_{66}), & K_{55} &= \alpha^2 D_{66} + \beta^2 D_{22} + A_{44} \\ M_{11} &= M_{22} = M_{33} = \rho h, & M_{44} &= M_{55} = \rho h^3/12 \end{aligned} \dots\dots\dots (8)$$

ただし、 $\alpha = m\pi/L$, $\beta = n/a$ である。

4. 数値計算例

数値計算に用いた材料は、graphite/epoxyの一方方向強化材で、特に断わりのない限り次の材料特性を用いた。

$$E_1/E_2 = 40, G_{12}/E_2 = G_{13}/E_2 = 0.6, G_{23}/E_2 = 0.5, \nu_{12} = 0.25$$

なお、せん断補正係数には $K_{44}^2 = K_{55}^2 = 5/6$ を用い、以下に記す結果は逆対称クロス・ブライに対するもので、その結果は次の無次元固有円振動数で表示する。

$$\Omega = \omega a^2 (\sqrt{\rho/E_2} / h) / \pi^4$$

結果を表-1および図-1, 2, 3に示す。図表の説明に現れるNLはラミナの層数を表し、積層順序は例えば、NL=2の場合は(0° / 90°), NL=4の場合は(0° / 90° / 0° / 90°)である。

表-1は、長さ-半径比 (L/a)⁴, 半径-厚さ比 (a/h) = 10, 20, 50, 100 に対する固有振動数 Ω (軸方向モード次数 $m=1$, 円周方向波数 $n=1, 2$) を層数 $NL=2, 4, 6, 8$ について整理したものである。これによれば、曲げと伸びのカップリング効果があり不大的ため、層数 NL の振動数 Ω に与える影響は小さいことがわかる。

図-1には、 $L/a=2$, $a/h=20$ を一定にし、層数 $NL=2, 4$ の場合の固有振動数曲線 (円周方向波数 n に対する固有振動数の変化) をモード次数 $m=1$ について示した。これによれば、 Ω は波数 n が小さいとき ($n < 2$) は NL によらず一定であるが、 n が大きくなるにつれて NL の影響があらわれてくる。

図-2は、長さ-半径比 (L/a) および半径-厚さ比 (a/h) の固有振動数 Ω ($m=n=1$) に及ぼす影響をみたものである。これによれば、考慮した a/h の範囲では、 Ω は a/h に対してほぼ線形に変化し、その変化率は L/a が小さい程著しい。さらに、カップリング (曲げと伸び) が弱いため、層数 $NL=2$ と $NL=4$ の結果には、ほとんど差異がない。

図-3は、弾性係数比 E_1/E_2 の固有振動数 Ω ($m=n=1$) に及ぼす影響を、 $L/a=2, 4$ に対して調べたものである。これによれば、 Ω は E_1/E_2 の増加とともに増加し、その程度は E_1/E_2 の値の小さいときに著しいが、 $E_1/E_2 > 20$ では、 Ω はほぼ一定である。

5. まとめ

本報告は、両端が単純支持されたクロス・プライ積層円筒殻の振動特性を明らかにしたものである。今後は、積層円筒殻の主要構造要素への適用可能性の検討を目的に、任意支持条件の振動特性および動的負荷下の力学的挙動の解明を行う予定である。

参考文献

- 1) 芳村 仁・三上 隆・田辺 輝：多層板の座屈・振動解析，土木学会北海道支部論文報告集，第46号，1990。
- 2) Dong, S.B. and Tso, F.K.W.: On a laminated orthotropic shell theory including transverse shear deformation, Journal of Applied Mechanics, pp. 1091-1097, 1972.
- 3) Reddy, J.N.: Exact solutions of moderately thick laminated shells, Proc. of ASCE, VOL. 110, No. EM5, pp. 794-809, 1984.

表 - 1 層数 NL の Ω に与える影響

a/h	Mode m, n	$NL=2$	$NL=4$	$NL=6$	$NL=8$
10	1 1	0.044	0.044	0.044	0.044
	1 2	0.035	0.042	0.043	0.043
20	1 1	0.087	0.087	0.087	0.087
	1 2	0.057	0.062	0.063	0.063
50	1 1	0.216	0.216	0.216	0.216
	1 2	0.131	0.133	0.133	0.133
100	1 1	0.432	0.431	0.431	0.431
	1 2	0.258	0.259	0.259	0.259

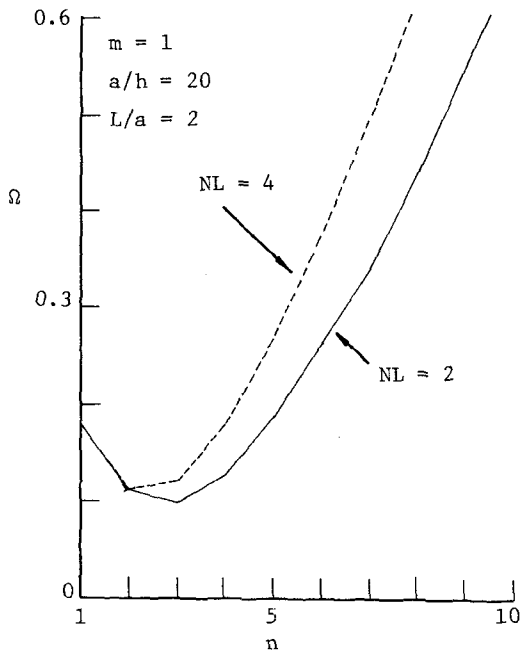


図-1 固有振動数 Ω と波数 n の関係

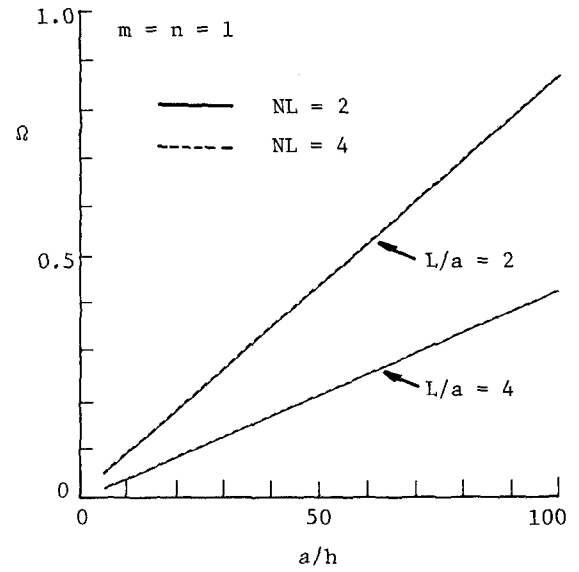


図-2 固有振動数 Ω と a/h の関係

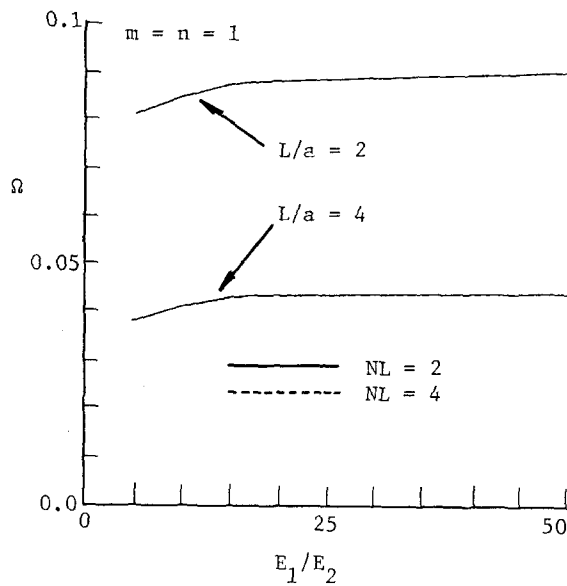


図-3 固有振動数 Ω と E_1/E_2 の関係