

## I-24

## 多層板の振動・座屈解析

北海道大学 正 員 芳村 仁

北海道大学 正 員 三上 隆

北海道大学 学生員 田辺 輝

## 1. はじめに

複合材料は金属材料と比較して、比剛性・比強度が大きいことから、構造<sup>量</sup>軽化が重要である航空・宇宙・海洋など広い分野で、採用されてきている。特に近年では、主要構造部材への応用が進につれて、座屈・振動などの力学的特性を明らかにすることが重要な課題となっている。従来の研究の多くは、四辺単純支持された場合であり、他の支持条件の報告は極めて少ないのが実状である。そこで本研究は、相対する2辺が単純支持、他の2辺が任意のアングル・ブライ積層板の座屈・振動問題を取り上げ、選点法に基づく解法を示し、次に配向角、積層数などの座屈・振動特性に与える影響を明らかにする。なお積層板の理論には、Yang, Norris, Stavsky の YNS理論<sup>1)</sup> (一次せん断変形理論)を採用する。

## 2. 基礎方程式

平板の厚さは一様とし  $h$  で表す。板厚中央面に座標  $(x, y)$ 、それらに垂直な座標  $z$  を定める。板の材料は均質な直交異方性弾性材料とする。材料の直交異方性主軸を (1, 2, 3) で表し、主軸 3 は  $z$  軸に平行で、主軸 1 と 2 はそれぞれ  $x$  と  $y$  に対し傾き角度  $\theta$  (ブライ配向角) だけ傾いているものとする。材料主軸 (1, 2) 方向の弾性係数  $E_1, E_2$ 、ポアソン比  $\nu_{12}, \nu_{21}$ 、およびせん断弾性係数  $G_{12}, G_{13}, G_{23}$  で与えられるものとする。座標軸と座標主軸の関係を図-1に示す。

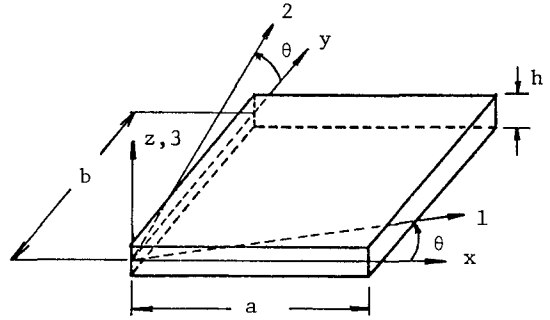


図-1 座標軸と材料主軸の関係

YNS理論<sup>1)</sup> によれば、積層板の基礎方程式は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} N_{x,x} + N_{xy,y} - h\sigma_x^0 u_{xx} - Pu_{tt} - R\phi_{x,tt} &= 0 \\ N_{y,y} + N_{xy,x} - h\sigma_y^0 v_{yy} - Pv_{tt} - R\phi_{y,tt} &= 0 \\ Q_{x,x} + Q_{y,y} - h\sigma_x^0 w_{xx} - Pw_{tt} &= 0 \\ M_{x,x} + M_{xy,y} - Q_x - (h^3/12)\sigma_x^0 \phi_{x,xx} - I\phi_{x,tt} - Ru_{tt} &= 0 \\ M_{y,y} + M_{xy,x} - Q_y - (h^3/12)\sigma_y^0 \phi_{y,yy} - I\phi_{y,tt} - Rv_{tt} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{----- (1)}$$

ここで、コンマ(,)に続く添字は偏微分を表し、 $\sigma_x^0$  = 初期応力、 $(u, v, w) = (x, y, z$  方向の変位成分、 $(\phi_x, \phi_y) = (x-z, y-z$  平面の回転角成分)、 $(N_x, N_y, N_{xy}, Q_x, Q_y) =$  合応力、 $(M_x, M_y, M_{xy}) =$  合モーメントであり、 $P, R$  と  $I$  は次式で表される。

Vibration and Buckling Analysis of Laminated Plates  
by Jin YOSHIMURA, Takashi MIKAMI and Akira TANABE

$$(P, R, I) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2) \rho^{(n)} dz \quad \text{-----} (2)$$

ここで、 $\rho^{(n)}$  は  $n$  番目の単層板の密度である。

ここで、プライ配向角が板中央面に関する逆対称性 [ $\theta(z) = -\theta(-z)$ ] を有する  $N$  層 アングルプライ ( $\theta/-\theta/\theta/-\theta \cdots$ ) の積層板を考える。合応力等は次のように表される。

$$\left. \begin{aligned} N_x &= A_{11}u_x + A_{12}v_y + B_{16}(\phi_{x,y} + \theta_{y,x}) \\ N_y &= A_{12}u_x + A_{22}v_y + B_{26}(\phi_{x,y} + \phi_{y,x}) \\ N_{xy} &= A_{66}(u_y + v_x) + B_{16}\phi_{x,x} + B_{26}\phi_{y,y} \\ M_x &= B_{16}(u_y + v_x) + D_{11}\phi_{x,x} + D_{12}\phi_{y,y} \\ M_y &= B_{26}(u_y + v_x) + D_{12}\phi_{x,x} + D_{22}\phi_{y,y} \\ M_{xy} &= B_{16}u_x + B_{26}v_y + D_{66}(\phi_{x,y} + \phi_{y,x}) \\ Q_x &= A_{55}(w_x + \phi_x) \\ Q_y &= A_{44}(w_y + \phi_y) \end{aligned} \right\} \quad \text{-----} (3)$$

ただし、 $A_{ij}$  は面内剛性、 $B_{ij}$  はカップリング剛性、 $D_{ij}$  は曲げ剛性を呼ばれるもので、次のように表される。

$$\left. \begin{aligned} A_{ij} &= K_{ij}^2 \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij} dz \quad (i, j=4, 5) \\ (A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) &= \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2) Q_{ij} dz \quad (i, j=1, 2, 6) \end{aligned} \right\} \quad \text{-----} (4)$$

ここで、 $K_{ij}^2$  はせん断補正係数であり、 $Q_{ij}$  はプライ配向角、弾性係数、ポアソン比、せん断弾性係数に依存する弾性定数である。

$x=0$  と  $x=a$  で単純支持、残りの 2 辺 ( $y=0, b$ ) は任意支持条件とすれば、境界条件は次のようになる。

$x = 0, a$  で単純支持：

$$u = w = \phi_y = M_x = N_{xy} = 0 \quad \text{-----} (5)$$

$y = 0, b$  での条件：

$$\left. \begin{aligned} \text{単純支持}(S) : & u = w = \phi_x = M_y = N_{xy} = 0 \\ \text{固定}(C) : & u = v = w = \phi_x = \phi_y = 0 \\ \text{自由}(F) : & M_y = M_{xy} = N_y = N_{xy} = Q_y = 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{-----} (6)$$

### 3. 解析手法

$x=0, a$  で式 (5) の条件を満足する変位関数として、次式を採用する。

$$\left. \begin{aligned} u(x, y, t) &= hU(\eta) \sin m\pi \zeta \cdot e^{i\omega t} \\ v(x, y, t) &= hV(\eta) \cos m\pi \zeta \cdot e^{i\omega t} \\ w(x, y, t) &= hW(\eta) \sin m\pi \zeta \cdot e^{i\omega t} \\ \phi_x(x, y, t) &= X(\eta) \cos m\pi \zeta \cdot e^{i\omega t} \\ \phi_y(x, y, t) &= Y(\eta) \sin m\pi \zeta \cdot e^{i\omega t} \end{aligned} \right\} \quad \text{-----} (7)$$

ここで、 $\omega$ =固有円振動数、 $m=x$  方向の半波数、 $\zeta=x/a$ 、 $\eta=y/b$ 。

式(7)を用いて式(3)の合応力等を変位関数 $U$ 、 $\cdots$ 、 $Y$  で表し、それを式(1)に代入すれば、 $\eta$  に関する連立2階常微分方程式が得られる。次に $\eta$  方向にLegendre多項式の零点を選点とする選点法<sup>2)</sup>を適用し離散化し、それに式(6)の境界条件を考慮すれば、積層板の振動・座屈問題は次式の固有値問題へと変換される。

$$[\alpha_1]\{\delta\}-\lambda[\alpha_2]\{\delta\}-\Omega^2[\alpha_3]\{\delta\}=0 \quad \text{-----}(8)$$

ここで、選点法を $M$ とすれば、 $[\alpha_1]$ 、 $[\alpha_2]$ 、 $[\alpha_3]$  は $5M \times 5M$ のマトリックス、 $\lambda$ と $\Omega^2$  はそれぞれ次式で表される座屈係数および固有振動数パラメータである。

$$\lambda = \frac{\sigma_x^0 a^2}{E_2 h^2} \qquad \Omega^2 = \frac{\rho \omega^2 a^4}{E_2 h^2}$$

4. 数値計算例

数値計算に用いた複合材は、*graphite/epoxy*の一方方向強化材で、特に断わりのない限り次のような材料特性を有している。

$$E_1/E_2=40, G_{12}/E_2=G_{13}/E_2=0.6, G_{23}/E_2=0.5, \nu_{12}=0.25$$

なお、選点数は $M=11$ とし、せん断補正係数には $K_{44}^2=K_{55}^2=5/6$ を用いた。

表-1は、四辺単純支持された4層正方形板（ $45^\circ/-45^\circ/45^\circ/-45^\circ$ 、 $a/h=10.0$ ）の固有振動数を *Bert, Chen*の厳密解<sup>3)</sup>(Navier解)と比較したものである。表より理解できるように、本計算値は( )内に記した厳密解に良く一致している。

表-1、固有振動数 $\Omega$ の比較(四辺単純支持)

| m | n(y方向の半波数)       |                  |                  |                    |
|---|------------------|------------------|------------------|--------------------|
|   | 1                | 2                | 3                | 4                  |
| 1 | 18.46<br>(18.46) | 34.87<br>(34.87) | 54.27<br>(54.27) | 75.58<br>(75.58)   |
| 2 | 34.87<br>(34.87) | 50.52<br>(50.52) | 67.17<br>(67.17) | 85.27<br>(85.27)   |
| 3 | 54.27<br>(52.27) | 67.17<br>(67.17) | 82.84<br>(82.84) | 99.02<br>(99.02)   |
| 4 | 75.58<br>(75.58) | 85.27<br>(85.27) | 99.02<br>(99.02) | 114.45<br>(114.45) |

表-2、座屈荷重の比較(四辺単純支持)

| a/b | N = 2  |        | N = 6  |        |
|-----|--------|--------|--------|--------|
|     | 本計算値   | 文献4)   | 本計算値   | 文献4)   |
| 0.5 | 2.1056 | 2.1056 | 3.6236 | 3.6235 |
| 1.0 | 1.9595 | 1.9594 | 3.6236 | 3.6235 |
| 1.5 | 1.9236 | 1.9235 | 3.6236 | 3.6235 |
| 2.0 | 1.9483 | 1.9483 | 3.6236 | 3.6235 |
| 3.0 | 1.9235 | 1.9235 | 3.6236 | 3.6235 |

表-2は、層数 $N$ が2および $\frac{6}{6}$ の4辺単純支持された矩形板( $45^\circ/-45^\circ/45^\circ/\cdots$ )の座屈荷重( $=h\sigma_x^0 b^2/\pi^2 D_{22}$ )を文献4)の結果と比較したものである。なお、この数値例の緒元は、 $E_1/E_2=40$ 、 $G_{12}=G_{13}=0.5E_2$ 、 $G_{23}=0.6E_2$ 、 $\nu_{12}=0.25$ 、 $b/h=10$ である。表より理解できるように、本解析法は良好な結果を与えている。

図-2および図-3はそれぞれ、基本固有振動数( $\Omega$ )および座屈応力( $\lambda$ )に及ぼす層数 $N$ 、プライ配向角 $\theta$ の影響をみたものである。考慮した境界条件は二辺単純支持、二辺固定( $S-C-S-C$ )である。これによれば座屈・振動特性に与える $N$ 、 $\theta$ の影響は大きく、例えば振動問題では、 $N=2$ の結果を除けば $\theta$ の増加( $\theta=45^\circ$ まで)と伴に $\Omega$ が増加し、逆に $N=2$ では減少している。

## 5. まとめ

アングルプライ積層板の振動・座屈問題の解析法として、選点法による手法を述べ、数値計算を行った。本研究は次のように要約される。

- ① 厳密解の得られている全辺単純支持の結果より判断すれば本解析値は良好な精度を有している。
- ② 振動・座屈特性に与える層数、プライ配向角の影響は大きい。

## 参考文献

- 1) Yang, P.C., Norris, C.H., and Stavsky, Y.: *Elastic wave propagation in heterogeneous plates*, Int. J. Solids and Struct., Vol. 2, pp. 665-684, 1965.
- 2) Mikami, T. and Yoshimura, V.: *Application of the collocation method to vibration analysis of rectangular Mindlin plates*, Comput. Struct., Vol. 18, pp. 425-431, 1984
- 3) Bert, C.W. and Chen, T.L.C.: *Effect of shear deformation on vibration of antisymmetric angle-ply laminated rectangular plates*, Int. J. Solids and Struct., Vol. 14, pp. 465-473, 1978.
- 4) Putcha, N.S., and Reddy, J.N.: *Stability and natural vibration analysis of laminated plates by using a mixed element based on a refined plate theory*, J. Sound Vib., Vol. 104, pp. 285-300, 1986.

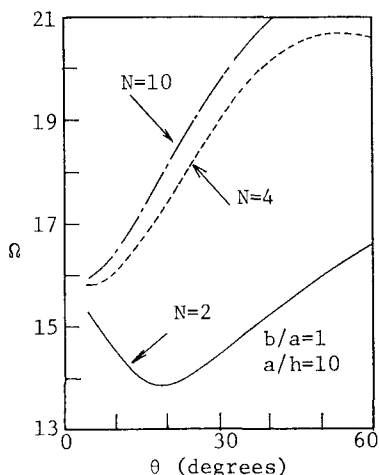


図-2 振動数に与える層数、配向角の影響

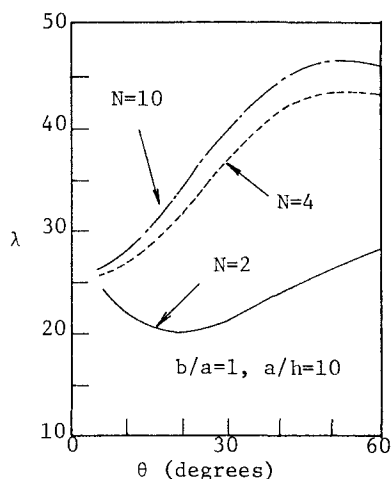


図-3 座屈応力に与える層数、配向角の影響