

## I-22

## 周辺固定の横等方性円環厚板の軸対称曲げ

北見工業大学 正員 奥村 勇

## 1. 緒 言

近年の複合材料の目ざましい開発に伴い、異方性体の力学的性質の解明が重要になりつつある。一口に異方性体といっても、1次元、2次元或は3次元弾性体があり、境界値問題としての難度は、次元数の増加に伴い、より大きくなる。2次元異方性体に関する境界値問題では、古くから、平板の曲げ理論が多くの研究者により取扱われている。薄板に関しては、直交異方性或は極異方性（曲線直交異方性）がすでに体系づけられている様である。しかしながら、厚板に関しては、直交異方性、横等方性（面内等方性）及び円柱異方性（極異方性）などは、今だ、十分に研究されているとはいいがたい。円柱座標における異方性厚板では、円柱異方性が最もむずかしい課題の様であるが、それに較べ、横等方性は取扱いが比較的容易な様である。横等方性厚板の2次元応力問題では、Clark及びReissner<sup>1)</sup>の10次理論による研究が見受けられる。また、横等方性厚板の曲げ理論では、Reissner<sup>2)</sup>及びVoyiadjis及びBaluch<sup>3)</sup>の、それぞれ、12次理論及び10次理論による研究が見受けられる。この三つの研究は、いずれも、弾性論的には、近似理論に過ぎず、更に、解の表現があまりにも形式的である。そのため、これらの理論の横等方性厚板の実際の曲げへの応用は、相当にむずかしいと考えられる。その点、等方性厚板に関してはあるが、Love<sup>4)</sup>の理論は、弾性論的に厳密であり、具体的な解も得られ易く、簡明でしかも適用性が広い。著者は、このLoveの理論を横等方性円環厚板に発展させ、部分荷重を受ける横等方性円環厚板の軸対称曲げを解析している<sup>5),6)</sup>。

本研究は、横等方性円環厚板の平面応力解及び一般化平面応力解を同次解として用い、荷重条件を満たすための特殊解として、一般化されたElliottの解の一部を用いたLoveの理論により、部分荷重を受ける2周辺固定の横等方性円環厚板の軸対称曲げを解析するものである。横等方性材料として、E ガラスーエポキシ及びグラファイトーエポキシを用い、等方性材料との比較を通して、応力の値に及ぼす異方性の効果が吟味されている。また、横等方性円環厚板の応力の値に及ぼす板厚比の影響も調べられている。

## 2. 特殊解

Loveの理論によれば、板の上、下面における荷重条件を満たすために、特殊解が必要になる。この特殊解として、一般化されたElliottの解<sup>7)</sup>を用いる。横等方性円環厚板の座標系を図-1に示した様に取り、円柱座標 $(r, \theta, z)$ における変位成分を $u_r, u_z$ 及び応力成分を $\sigma_{rr}, \dots, \sigma_{rz}$ と表す。解の形式については、すでに、報告しているの

で、解に含まれるポテンシャル関数を示せば、次のとおりである。

$$\phi_0 = \sum_{s=1}^{\infty} \left[ J_s(\alpha_s r) \left( A_s^{(1)} \cosh \frac{\alpha_s z}{\sqrt{L_1}} + L_1^{(1)} \sinh \frac{\alpha_s z}{\sqrt{L_1}} \right) + Y_s(\alpha_s r) \left( A_s^{(2)} \cosh \frac{\alpha_s z}{\sqrt{L_1}} + L_1^{(2)} \sinh \frac{\alpha_s z}{\sqrt{L_1}} \right) \right] \quad (1 \cdot a)$$

$$\phi_s = \sum_{s=1}^{\infty} \left[ J_s(\alpha_s r) \left( C_s^{(1)} \cosh \frac{\alpha_s z}{\sqrt{L_1}} + M_s^{(1)} \sinh \frac{\alpha_s z}{\sqrt{L_1}} \right) + Y_s(\alpha_s r) \left( C_s^{(2)} \cosh \frac{\alpha_s z}{\sqrt{L_1}} + M_s^{(2)} \sinh \frac{\alpha_s z}{\sqrt{L_1}} \right) \right] \quad (1 \cdot b)$$

$$\phi_1 = \phi_2 = 0 \quad (1 \cdot c)$$

ここで、 $A_s^{(1)}, \dots, M_s^{(2)}$ は、荷重条件によって定められる未定定数であり、助変数 $\alpha_s$ は、 $\alpha_s = \lambda_s / a$ で

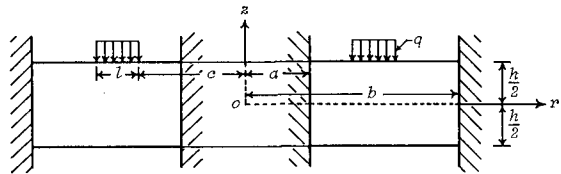


Fig. 1 Coordinate system of annular thick plate.

Axi-symmetric bending of a transversely isotropic, annular thick plate  
surrounded by clamped edges

By Isamu A. OKUMURA

ある。荷重条件に直接関係した応力成分  $\sigma_{zz}^{(1)}$  及び  $\sigma_{rz}^{(1)}$  について示せば、次のとおりである。

$$\sigma_{zz}^{(1)} = \sum_{i=1}^n (-\alpha_i^2) [J_i(\alpha_i r) f_i(z) + Y_i(\alpha_i r) g_i(z)] \quad \cdots \cdots \cdots (2 \cdot a)$$

$$\sigma_{rz}^{(1)} = C_{11} \sum_{i=1}^n \left[ -\frac{\alpha_i^2 (1+k_2)}{\sqrt{\nu_1}} \right] [J_i(\alpha_i r) f_i(z) + Y_i(\alpha_i r) g_i(z)] \quad \cdots \cdots \cdots (2 \cdot b)$$

ここで、

$$\begin{aligned} f_i(z) = & A_i^{(1)} \left( C_{13} - C_{33} \frac{k_2}{\nu_1} \right) \cosh \frac{\alpha_i z}{\sqrt{\nu_1}} + L_i^{(1)} \left( C_{13} - C_{33} \frac{k_2}{\nu_1} \right) \sinh \frac{\alpha_i z}{\sqrt{\nu_1}} - C_i^{(1)} \left\{ \left[ C_{13} \gamma_i + C_{33} \frac{k_2}{\nu_1} (2\gamma_i - \gamma_2) \right] \cosh \frac{\alpha_i z}{\sqrt{\nu_1}} - \gamma_i \left( C_{13} - C_{33} \frac{k_2}{\nu_1} \right) \right. \\ & \cdot \left. \left( \frac{\alpha_i z}{\sqrt{\nu_1}} \right) \sinh \frac{\alpha_i z}{\sqrt{\nu_1}} \right\} - M_i^{(1)} \left\{ \left[ C_{13} \gamma_i + C_{33} \frac{k_2}{\nu_1} (2\gamma_i - \gamma_2) \right] \sinh \frac{\alpha_i z}{\sqrt{\nu_1}} - \gamma_i \left( C_{13} - C_{33} \frac{k_2}{\nu_1} \right) \left( \frac{\alpha_i z}{\sqrt{\nu_1}} \right) \cosh \frac{\alpha_i z}{\sqrt{\nu_1}} \right\} \quad \cdots \cdots \cdots (3 \cdot a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_i(z) = & A_i^{(1)} \sinh \frac{\alpha_i z}{\sqrt{\nu_1}} + L_i^{(1)} \cosh \frac{\alpha_i z}{\sqrt{\nu_1}} + C_i^{(1)} \sqrt{\frac{\nu_1}{1+k_2}} \left[ \left( \gamma_i - \frac{k_2 \gamma_i + \gamma_2}{1+k_2} \right) \sinh \frac{\alpha_i z}{\sqrt{\nu_1}} + \gamma_i \left( \frac{\alpha_i z}{\sqrt{\nu_1}} \right) \cosh \frac{\alpha_i z}{\sqrt{\nu_1}} \right] + M_i^{(1)} \sqrt{\frac{\nu_1}{1+k_2}} \left[ \left( \gamma_i \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{k_2 \gamma_i + \gamma_2}{1+k_2} \right) \cosh \frac{\alpha_i z}{\sqrt{\nu_1}} + \gamma_i \left( \frac{\alpha_i z}{\sqrt{\nu_1}} \right) \sinh \frac{\alpha_i z}{\sqrt{\nu_1}} \right] \quad \cdots \cdots \cdots (3 \cdot b) \end{aligned}$$

また、 $g_i(z)$  及び  $g_i(z)$  は、それぞれ、 $f_i(z)$  及び  $f_i(z)$  に含まれる未定定数の肩添字 (1) を (2) に換えた式である。

### 3. 同次解

特殊解のみでは、板の周辺の境界条件を満足できないので、同次解が必要になる。その同次解として、一般化された Elliott の解から誘導された横等方性円環厚板の平面応力解・一般化平面応力解を用いる。

3.1 平面応力解 平面応力解は、次式となる。

$$u_r^{(0,1)} = \frac{D_0}{r} + F_0 (\nu_1 \gamma_1 - 1) r, \quad u_z^{(0,1)} = -2F_0 k_2 \gamma_1 z \quad \cdots \cdots \cdots (4 \cdot a, b)$$

$$\sigma_{rr}^{(0,1)} = -\frac{D_0}{r^2} (C_{11} - C_{12}) - F_0 \{ C_{11} + C_{12} - \gamma_1 [\nu_1 (C_{11} + C_{12}) - 2C_{13} k_2] \} \quad \cdots \cdots \cdots (4 \cdot c)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{(0,1)} = -\frac{D_0}{r^2} (C_{12} - C_{11}) - F_0 \{ C_{12} + C_{11} - \gamma_1 [\nu_1 (C_{12} + C_{11}) - 2C_{13} k_2] \} \quad \cdots \cdots \cdots (4 \cdot d)$$

$$\sigma_{rz}^{(0,1)} = \sigma_{rz}^{(0,1)} = 0 \quad \cdots \cdots \cdots (4 \cdot e)$$

ここで、

$$\gamma_1 = \frac{C_{13}}{C_{13} \nu_1 - C_{33} k_2} \quad \cdots \cdots \cdots (5)$$

3.2 一般化平面応力解 一般化平面応力解は、次式となる。

$$u_r^{(0,2)} = -z \left\{ \frac{A_0^{(2)}}{r} - C_0^{(1)} (\nu_1 \gamma_1 - 1) - C_0^{(2)} \left[ r (2 \log r - 1) (\nu_1 \gamma_1 - 1) - \frac{2z^2}{3r} (\gamma_1 - \nu_1) \right] \right\} \quad \cdots \cdots \cdots (6 \cdot a)$$

$$\begin{aligned} u_z^{(0,2)} = & A_0^{(1)} + A_0^{(2)} \log r + \frac{k_2}{2} C_0^{(1)} \left\{ r^2 (\nu_1 \gamma_1 - 1 + \nu_1 \nu_1) + \frac{h^2}{2k_2} [\gamma_1 (1+k_2) - \nu_1] - 2\gamma_1 z^2 \right\} + k_2 C_0^{(2)} \left\{ r^2 (\log r - 1) (\nu_1 \gamma_1 - 1 + \nu_1 \nu_1) + \log r \right. \\ & \cdot \left. \left[ \frac{h^2}{2k_2} \{ \gamma_1 (1+k_2) - \nu_1 \} - 2\gamma_1 z^2 \right] \right\} \quad \cdots \cdots \cdots (6 \cdot b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(0,2)} = & z \left\{ \frac{A_0^{(2)}}{r^2} (C_{11} - C_{12}) + C_0^{(1)} \{ \gamma_1 [\nu_1 (C_{11} + C_{12}) - 2C_{13} k_2] - (C_{11} + C_{12}) \} + C_0^{(2)} \left[ 2 \log r \{ \gamma_1 [\nu_1 (C_{11} + C_{12}) - 2C_{13} k_2] - (C_{11} + C_{12}) \} + (C_{11} - C_{12}) \right. \right. \\ & \cdot \left. \left. \{ \nu_1 \gamma_1 - 1 + \frac{2z^2}{3r^2} (\gamma_1 - \nu_1) \} \right] \right\} \quad \cdots \cdots \cdots (6 \cdot c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta}^{(0,2)} = & z \left\{ \frac{A_0^{(2)}}{r^2} (C_{12} - C_{11}) + C_0^{(1)} \{ \gamma_1 [\nu_1 (C_{12} + C_{11}) - 2C_{13} k_2] - (C_{12} + C_{11}) \} + C_0^{(2)} \left[ 2 \log r \{ \gamma_1 [\nu_1 (C_{12} + C_{11}) - 2C_{13} k_2] - (C_{12} + C_{11}) \} + (C_{12} - C_{11}) \right. \right. \\ & \cdot \left. \left. \{ \nu_1 \gamma_1 - 1 + \frac{2z^2}{3r^2} (\gamma_1 - \nu_1) \} \right] \right\} \quad \cdots \cdots \cdots (6 \cdot d) \end{aligned}$$

$$\sigma_{rr}^{(0,2)} = \frac{C_{44}}{2} C_0^{(2)} [\gamma_1(1+k_2) - \nu_4] \frac{h^2 - 4z^2}{r}, \quad \sigma_{zz}^{(0,2)} = 0 \quad \dots\dots\dots (6 \cdot e, f)$$

ここで、

$$\gamma_1 = \frac{C_{13}}{C_{13}\nu_2 - C_{33}k_2}, \quad \nu_4 = \frac{C_{11}}{C_{44}} \quad \dots\dots\dots (7 \cdot a, b)$$

また、平面応力解及び一般化平面応力解に含まれる  $D_0$ ,  $F_0$ ,  $A_0^{(1)}$ ,  $A_0^{(2)}$ ,  $C_0^{(1)}$  及び  $C_0^{(2)}$  は、板の周辺の境界条件から定められる未定定数である。

#### 4. 荷重条件及び境界条件

板の上面に同心円輪状に分布する部分荷重を受け、下面が自由の円環厚板を考えると、荷重条件は、次式となる。

$$z = h/2 \text{ において, } \sigma_{rz} = 0, \quad \sigma_{zz} = -p(r) \quad \dots\dots\dots (8 \cdot a, b)$$

$$z = -h/2 \text{ において, } \sigma_{rz} = 0, \quad \sigma_{zz} = 0 \quad \dots\dots\dots (9 \cdot a, b)$$

ここで、

$$p(r) = \begin{cases} q & [c < r < c+l] \\ 0 & [a \leq r < c \text{ 又は } c+l < r \leq b] \end{cases} \quad \dots\dots\dots (10)$$

また、板の内、外周辺を固定とすると、境界条件は、次式となる。

$$r = a \text{ において, } (u_r)_{r=a} = 0, \quad (u_z)_{r=a} = 0, \quad \left(\frac{\partial u_r}{\partial z}\right)_{r=a} = 0 \quad \dots\dots\dots (11 \cdot a \sim c)$$

$$r = b \text{ において, } (u_r)_{r=b} = 0, \quad (u_z)_{r=b} = 0, \quad \left(\frac{\partial u_r}{\partial z}\right)_{r=b} = 0 \quad \dots\dots\dots (12 \cdot a \sim c)$$

式 (10) の荷重関数を次の様に、Bessel の級数に展開する。

$$p(r) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} e_{\alpha} C_0(\alpha r) \quad \dots\dots\dots (13)$$

ここで、

$$e_{\alpha} = \frac{\int_a^b p(r) r C_0(\alpha r) dr}{\int_a^b r C_0^2(\alpha r) dr} = 2q \left(\frac{c}{a}\right) \frac{1}{\lambda_{\alpha} [\kappa^2 C_0^2(\kappa \lambda_{\alpha}) - C_0^2(\lambda_{\alpha})]} \left\{ \left(1 + \frac{l}{c}\right) C_0 \left[ \lambda_{\alpha} \left(\frac{c}{a} + \frac{l}{a}\right) \right] - C_0 \left[ \lambda_{\alpha} \frac{c}{a} \right] \right\} \quad \dots\dots\dots (14 \cdot a)$$

$$J_0(\kappa \lambda_{\alpha}) Y_0(\lambda_{\alpha}) - J_0(\lambda_{\alpha}) Y_0(\kappa \lambda_{\alpha}) = 0, \quad \kappa = b/a \quad \dots\dots\dots (14 \cdot b, c)$$

また、 $C_0(\alpha r)$  は、次式で定義される 0 次の円柱関数である。

$$C_0(\alpha r) = J_0(\alpha r) - \varepsilon_{\alpha} Y_0(\alpha r), \quad \varepsilon_{\alpha} = J_0(\lambda_{\alpha}) / Y_0(\lambda_{\alpha}) \quad \dots\dots\dots (15 \cdot a, b)$$

同次解が荷重条件に関係しないことに留意して、式 (3 \cdot a, b) の未定定数を

$$L_1^{(2)} = -\varepsilon_{\alpha} L_1^{(1)}, \quad A_2^{(2)} = -\varepsilon_{\alpha} A_1^{(1)}, \quad C_1^{(2)} = -\varepsilon_{\alpha} C_0^{(1)}, \quad M_1^{(2)} = -\varepsilon_{\alpha} M_0^{(1)} \quad \dots\dots\dots (16 \cdot a \sim d)$$

と置き、式 (13) を用いて、式 (2 \cdot a, b) に式 (8 \cdot a, b) 及び式 (9 \cdot a, b) の荷重条件を課すると、未定定数が次の様に定められる。

$$C_1^{(1)} = \frac{e_{\alpha}}{\alpha^2} \frac{1}{2a_1 \sinh \xi_1}, \quad A_1^{(1)} = -\frac{e_{\alpha}}{\alpha^2} \frac{a_2}{2 \sinh \xi_1}, \quad M_1^{(1)} = \frac{e_{\alpha}}{\alpha^2} \frac{1}{2b_1 \cosh \xi_1}, \quad L_1^{(1)} = -\frac{e_{\alpha}}{\alpha^2} \frac{b_2}{2 \cosh \xi_1} \quad \dots\dots\dots (17 \cdot a \sim d)$$

ここで、

$$a_1 = \gamma_1 \xi_1 \left( C_{13} - C_{33} \frac{k_2}{\nu_1} \right) - \sqrt{\frac{\nu_2}{\nu_1}} \coth \xi_1 \left( C_{13} - C_{33} \frac{k_2}{\nu_2} \right) \left[ \gamma_1 (1 + \xi_1 \coth \xi_1) - \frac{k_2 \gamma_2 + \gamma_3}{1 + k_2} \right] - \left[ C_{13} \gamma_3 + C_{33} \frac{k_2}{\nu_1} (2\gamma_1 - \gamma_2) \right] \coth \xi_1 \quad \dots\dots\dots (18 \cdot a)$$

$$a_2 = \frac{1}{a_1} \sqrt{\frac{\nu_2}{\nu_1}} \left[ \gamma_1 (1 + \xi_1 \coth \xi_1) - \frac{k_2 \gamma_2 + \gamma_3}{1 + k_2} \right] \quad \dots\dots\dots (18 \cdot b)$$

$$b_1 = \gamma_1 \xi_1 \left( C_{13} - C_{33} \frac{k_2}{\nu_1} \right) - \sqrt{\frac{\nu_2}{\nu_1}} \tanh \xi_1 \left( C_{13} - C_{33} \frac{k_2}{\nu_2} \right) \left[ \gamma_1 (1 + \xi_1 \tanh \xi_1) - \frac{k_2 \gamma_2 + \gamma_3}{1 + k_2} \right] - \left[ C_{13} \gamma_3 + C_{33} \frac{k_2}{\nu_1} (2\gamma_1 - \gamma_2) \right] \tanh \xi_1 \quad \dots\dots\dots (18 \cdot c)$$

$$b_2 = \frac{1}{b_1} \sqrt{\frac{\nu_2}{\nu_1}} \left[ \gamma_1 (1 + \xi_1 \tanh \xi_1) - \frac{k_2 \gamma_2 + \gamma_3}{1 + k_2} \right] \quad \dots\dots\dots (18 \cdot d)$$

$$\xi_1 = \frac{\alpha_1 h}{2\sqrt{\lambda_1}}, \quad \xi_2 = \frac{\alpha_2 h}{2\sqrt{\lambda_2}} \quad \cdots \cdots (18 \cdot e, f)$$

式 (16・a～d) 及び式 (17・a～d) により、特殊解の未定定数は、すべて、厳密に定められたことになる。結果として、特殊解の変位成分は、次式となる。

$$u^{(1)} = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{e_r}{2\alpha_r} C_r(\alpha_r r) \left[ a_1 \frac{\cosh \xi_2}{\sinh \xi_2} + b_1 \frac{\sinh \xi_2}{\cosh \xi_2} - \frac{1}{a_1 \sinh \xi_1} (\gamma_1 \xi_1 \sinh \xi_1 - \gamma_3 \cosh \xi_1) - \frac{1}{b_1 \cosh \xi_1} (\gamma_1 \xi_1 \cosh \xi_1 - \gamma_3 \sinh \xi_1) \right] \quad \cdots \cdots (19 \cdot a)$$

$$u^{(2)} = \sum_{r=1}^{\infty} \left( -\frac{k_2 e_r}{2\alpha_r \sqrt{\lambda_2}} \right) C_r(\alpha_r r) \left\{ a_1 \frac{\sinh \xi_2}{\sinh \xi_2} + b_1 \frac{\cosh \xi_2}{\cosh \xi_2} - \frac{1}{a_1 \sinh \xi_1} \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} [(\gamma_1 - \gamma_3) \sinh \xi_1 + \gamma_1 \xi_1 \cosh \xi_1] - \frac{1}{b_1 \cosh \xi_1} \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} [(\gamma_1 - \gamma_3) \cosh \xi_1 + \gamma_1 \xi_1 \sinh \xi_1] \right\} \quad \cdots \cdots (19 \cdot b)$$

ここで、

$$\zeta_1 = \frac{\alpha_1 z}{\sqrt{\lambda_1}}, \quad \zeta_2 = \frac{\alpha_2 z}{\sqrt{\lambda_2}} \quad \cdots \cdots (20 \cdot a, b)$$

5. 同次解の未定定数を定める連立1次方程式

式 (11・a) 及び式 (12・a) の境界条件を式 (4・a) 及び式 (19・a) に課すると、次の2元連立1次方程式を得る。

$$\frac{D}{a} + F_0 a (\nu \gamma_1 - 1) - \sum_{r=1}^{\infty} \left( -\frac{a e_r}{2\lambda_r} \right) C_r(\lambda_r) \left( -\frac{a_1}{\sinh \xi_2} + \frac{\gamma_3}{a_1 \sinh \xi_1} \right) \quad \cdots \cdots (21 \cdot a)$$

$$\frac{D}{b} + F_0 b (\nu \gamma_1 - 1) - \sum_{r=1}^{\infty} \left( -\frac{a e_r}{2\lambda_r} \right) C_r(\lambda_r) \left( -\frac{a_1}{\sinh \xi_2} + \frac{\gamma_3}{a_1 \sinh \xi_1} \right) \quad \cdots \cdots (21 \cdot b)$$

式 (6・a, b) 及び式 (19・a, b) に式 (11・b, c) 及び式 (12・b, c) の境界条件を課すると、次の4元連立1次方程式を得る。

$$\bar{A}_0^{(1)} + \frac{k_2}{2} \bar{C}_0^{(1)} \left\{ a^2 (\nu \gamma_1 - 1 + \nu \mu) + \frac{h^2}{2k_2} [\gamma_1 (1 + k_2) - \mu] \right\} - k_2 C_0^{(2)} a^2 (\nu \gamma_1 - 1 + \nu \mu) = 0 \quad \cdots \cdots (22 \cdot a)$$

$$\bar{A}_0^{(1)} + \bar{A}_0^{(2)} \log \kappa + \frac{k_2}{2} \bar{C}_0^{(1)} \left\{ b^2 (\nu \gamma_1 - 1 + \nu \mu) + \frac{h^2}{2k_2} [\gamma_1 (1 + k_2) - \mu] \right\} + k_2 C_0^{(2)} \left\{ b^2 (\log \kappa - 1) (\nu \gamma_1 - 1 + \nu \mu) + \log \kappa \frac{h^2}{2k_2} [\gamma_1 (1 + k_2) - \mu] \right\} = 0 \quad \cdots \cdots (22 \cdot b)$$

$$\frac{\bar{A}_0^{(2)}}{a} - \bar{C}_0^{(1)} a (\nu \gamma_1 - 1) + C_0^{(2)} a (\nu \gamma_1 - 1) - \frac{1}{2\sqrt{\lambda_2}} \sum_{r=1}^{\infty} e_r C_r(\lambda_r) \left( -\frac{b_2}{\cosh \xi_2} - \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \frac{\gamma_1 - \gamma_3}{b_1 \cosh \xi_1} \right) \quad \cdots \cdots (22 \cdot c)$$

$$\frac{\bar{A}_0^{(2)}}{b} - \bar{C}_0^{(1)} b (\nu \gamma_1 - 1) - C_0^{(2)} b (2 \log \kappa - 1) (\nu \gamma_1 - 1) - \frac{1}{2\sqrt{\lambda_2}} \sum_{r=1}^{\infty} e_r C_r(\lambda_r) \left( -\frac{b_2}{\cosh \xi_2} - \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \frac{\gamma_1 - \gamma_3}{b_1 \cosh \xi_1} \right) \quad \cdots \cdots (22 \cdot d)$$

ここで、

$$\bar{C}_0^{(1)} = C_0^{(1)} + C_0^{(2)} \cdot 2 \log a, \quad \bar{A}_0^{(2)} = A_0^{(1)} + A_0^{(2)} \log a \quad \cdots \cdots (23 \cdot a, b)$$

式 (21・a, b) を解くと、未定定数  $D_0$  及び  $F_0$  が求められ、式 (22・a～d) を解くと、未定定数  $\bar{A}_0^{(1)}$ ,  $\bar{A}_0^{(2)}$ ,  $\bar{C}_0^{(1)}$  及び  $C_0^{(2)}$  が求められる。従って、特殊解及び同次解に含まれていた未定定数がすべて厳密に定められ、ここで考えている横等方性円環厚板の軸対称曲げは、厳密に解けたことになる。薄板理論と同様に、厳密解が得られるのが、Loveの理論の特徴である。

## 6. 計算結果

円環厚板の外半径  $b$  と内半径  $a$  との比  $b/a$  が 6.0、荷重領域  $c/a = 3.0$  及び  $l/a = 1.0$  の横等方性円環厚板が種々の板厚比  $e = h/d = h/(b-a)$  を持つ場合について計算した。横等方性材料として、E ガラス-エポキシ及びグラファイト-エポキシを採取し、ポアソン比  $\nu = 0.3$  の等方性材料も取扱った。これらの材料の弾性定数の値は、表-1に示した<sup>9), 10)</sup>。計算結果の一部を図-2から図-7及び表-2に示した。図-7から、せん断応力  $\sigma_{\theta r}$  は、ほとんど、放物線分布に近いことが分る。

Table 1. Elastic constants  $c_{ij}$   
(in units of 10GPa)

| $c_{ij}$       | $c_{11}$ | $c_{12}$ | $c_{13}$ | $c_{33}$ | $c_{44}$ |
|----------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Graphite-epoxy | 0.82     | 0.26     | 0.32     | 8.68     | 0.41     |
| E glass-epoxy  | 1.51     | 0.61     | 0.52     | 4.68     | 0.47     |
| Isotropy       | 3.5      | 1.5      | 1.5      | 3.5      | 1.0      |

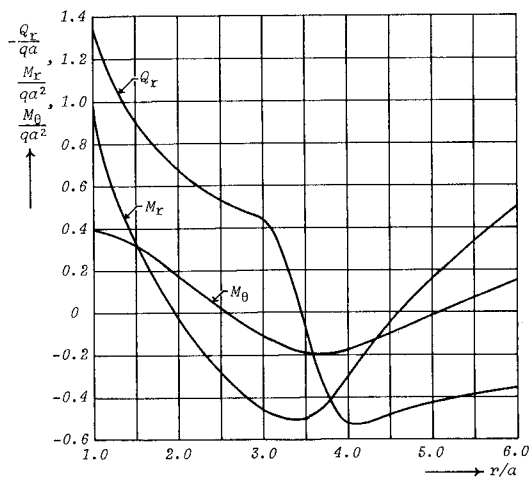


Fig. 2 Distribution of Schnittkraft  
(Graphite-epoxy,  $e=1/4$ ).

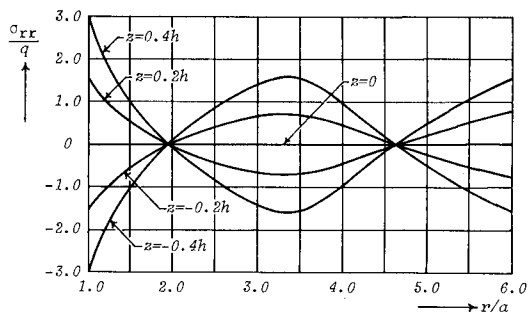


Fig. 3 Distribution of  $\sigma_{rr}$   
(Graphite-epoxy,  $e=1/4$ ).

## 7. 結 語

一般化された Elliott の解の一部を特殊解として用い、横等方性円環厚板の平面応力解・一般化平面応力解を同次解として用いた Love の理論により、部分荷重を受ける内、外周辺固定の横等方性円環厚板の軸対称曲げを解析した。特殊解及び同次解が、共に、横等方性体の厳密な弾性解より構成され、厚板理論に通常見受けられる弾性論的な近似は何ら含んでいない。厚板の周辺の境界条件が、中央面の変位或は横断面の回転によって規定される点を除けば、本研究で述べた解析方法は、厳密な 3 次元応力解析にほぼ匹敵する高精

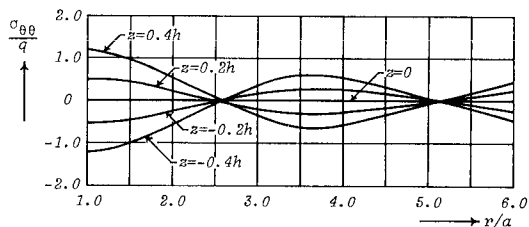


Fig. 4 Distribution of  $\sigma_{\theta\theta}$   
(Graphite-epoxy,  $e=1/4$ ).

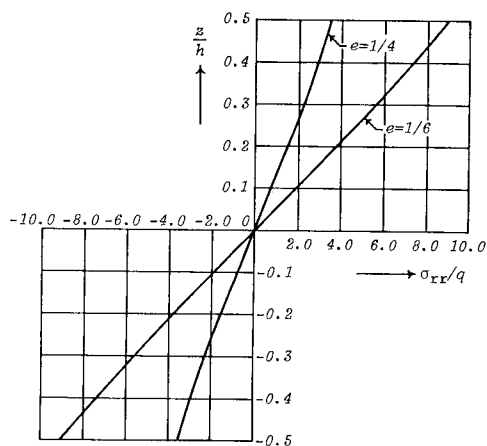


Fig. 5 Effect of thickness-width ratio on  $\sigma_{rr}$   
(Graphite-epoxy,  $r=a$ ).

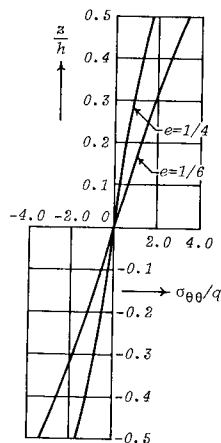


Fig. 6 Effect of thickness-width ratio on  $\sigma_{\theta\theta}$   
(Graphite-epoxy,  $r=a$ ).

Table 2. Comparison of stress values on  $r=a$ 

|                | $\sigma_{rr}/q$ |          | $\sigma_{\theta\theta}/q$ |          | $\sigma_{zr}/q$ |          |
|----------------|-----------------|----------|---------------------------|----------|-----------------|----------|
|                | $z=0.5h$        | $z=0.2h$ | $z=0.5h$                  | $z=0.2h$ | $z=0$           | $z=0.2h$ |
| Graphite-epoxy | 3.53            | 1.56     | 1.67                      | 0.517    | -1.61           | -1.36    |
| E glass-epoxy  | 3.14            | 1.45     | 2.03                      | 0.606    | -1.57           | -1.32    |
| Isotropy       | 3.16            | 1.42     | 1.67                      | 0.474    | -1.58           | -1.32    |

度の簡明なそれである。本研究では、円柱座標における横等方性厚板を取扱ったが、直交座標における3次元弾性解及び平面応力解・一般化平面応力解が求められていれば、横等方性長方形厚板も同様の手法により解析できる。第1章で述べた12次理論或は10次理論は、板厚座標のべき指数をどんどん上げて、解の精密化を計る方法である。しかしながら、その様な高次理論が必要になる程の厚さの極めて大きい厚板であれば、最初より、3次元応力解析を試みた方がより簡明な様に思われる。厚板理論或は厚板の解析方法として最も肝要な点は、簡明であること及び適用性が広いことである。この点に注目すれば、本研究で取扱ったLoveの理論は、中程度の厚さを持つ厚板の解析には、極めて有力な解析方法と思われる。本研究で取扱った横等方性円環厚板の解析結果から、横等方性材料の弾性定数の値が等方性材料のそれと相当に相違するにもかかわらず応力の値には、異方性の効果があまり顕著に現れないことが明らかになった。

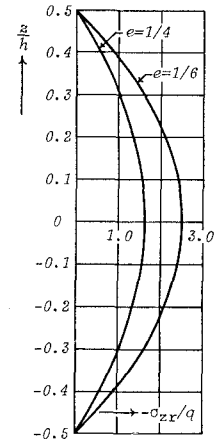


Fig. 7 Effect of thickness-width ratio on  $\sigma_{zr}$  (Graphite-epoxy,  $r=a$ ).

#### 参考文献

- 1) Clark, R. A. and Reissner, E.: A tenth-order theory of stretching of transversely isotropic sheets, J. Appl. Math. Phys. (ZAMP), Vol. 35, pp. 883~889, 1984.
- 2) Reissner, E.: A twelfth order theory of transverse bending of transversely isotropic plates, ZAMM, Vol. 63, pp. 285~289, 1983.
- 3) Voyiadjis, G. Z. and Baluch, M. H.: Refined theory for thick composite plates, Proc. of ASCE, J. Eng. Mech., Vol. 114, pp. 671~687, 1988.
- 4) Love, A. E. H.: A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, Chap. XXII, 4th ed., Dover Pub., 1944.
- 5) Okumura, I. A.: Solutions to stretching and bending of transversely isotropic, circular thick plates and their application, Proc. of JSCE, No. 398/I-10, Structural Eng./Earthquake Eng., Vol. 5, No. 2, pp. 89~98, 1988.
- 6) 奥村 勇: 周辺固定の横等方性円形厚板の軸対称曲げ, 土木学会北海道支部論文報告集, 第45号, pp. 75~80, 1989.
- 7) Okumura, I. A.: Generalization of Elliott's solution to transversely isotropic solids and its application, Proc. of JSCE, No. 386/I-8, Structural Eng./Earthquake Eng., Vol. 4, No. 2, pp. 185~195, 1987.
- 8) Chen, C. H. and Cheng, S.: Mechanical properties of anisotropic fiber-reinforced composites, J. Appl. Mech., Vol. 37, pp. 186~189, 1970.
- 9) Chen, C. H. and Cheng, S.: Mechanical properties of fiber reinforced composites, J. Comp. Mat., Vol. 1, pp. 30~41, 1967.