

I-7 有限プリズム法による直交異方性 積層集成材の解析

北見工業大学 正員 大島 俊之
同 正員 三上 修一
島田建設㈱ 正員 斎藤 隆行
岩手大学 正員 岩崎 正二

1. まえがき

土木技術のソフト化の推進にともなって、土木の分野における木材の利用に関する気運が最近高まりつつある。¹⁾ “木”は従来コンクリートや鋼に比較して弾性係数も小さく、材質にもばらつきがあり、腐朽しやすいという欠点を有していたが、近年の接着剤や防腐剤、防水材の発達により、これらの欠点をカバーする技術の発達がめざましく、新しい製品が次々に発表されている。^{2), 3)} また最近の例としては、昨年名古屋で行われたデザイン博の外国館パビリオンの屋根の主構造は最大50mスパンのアーチ形集成材（輸入品、施工、清水建設）であり、土木構造物に匹敵する規模である。その他集成材を主げたに用いた林道橋の設計施工の例も見られる。^{4), 5)} 集成材は素材本来の直交異方性的性質と素材のばらつきを平均化するため、材質の異なる素材を複合したり、素材の年輪の向きを変えて組み合わせるなどの工夫をして、複合材料部材としての特性を有している。^{6)~12)} したがって集成材の特性はその構成要素としての素材の特性及び、その素材を結合する接着剤の特性に依存している。接着剤については近年の合成接着剤の発達により母材より大きな強度を有し、耐久性にも優れているものが開発されつつあり、また接着剤の付着効果、粘弾性的性質についても多くの研究がある。¹³⁾ 一方、素材としての木材は有孔性材料であることによる、応力歪関係の非線形性、および粘弾性的性質さらには繊維方向と年輪方向およびそれに直角方向の三方向に変形特性の異なる極度に直交異方性を示す材料である。したがって集成材を構造部材として利用するためにはこれらの特性を充分に理解して使用することが必要である。これらのことから本研究では、複合材料部材としての集成材の変形特性の検討を行う。即ち既述のように集成材は樹種の（したがって弾性定数の）異なる素材を組み合わせで使用しているので、これらの組合せの効果、影響などについて厚板部材を対象として、有限プリズム法により検討する。数値計算では素材の配置の変化による変形特性への影響を解析している。

2. 素材の構成方程式

木材の変形特性は三つに大別できる。一つは多孔性組織であることによる変形時の空隙の影響を無視することができない。またそれに関連して、応力ひずみ関係は非線形であり粘弾性挙動となる。さらに木材は繊維方向と年輪に直角及び平行の三方向に変形係数が異なり、直交異方性の材料と見なされている。本研究ではこれらの特徴のうち、最後の直交異方性に着目し繊維方向（L方向）、年輪に直角方向（R方向）および年輪に平行方向（T方向）に相異なる弾性定数を有する構成方程式を用い、これらの積層異方性複合材料である集成材としての部材特性を解析することを目的とする。互いに直交する三つの対称面を有する直交異方性三次元材料の応力ひずみ関係は

Analysis of Ortoropically Laminated Timber by Means of Finite Prism Method
by Tosiya OSHIMA, Shuichi MIKAMI, Takayuki SAITO, Seiji IWASAKI

$$\sigma_i = C_{ij} \varepsilon_j \quad (i, j=1, 2, \dots, 6) \quad (1)$$

あるいは書き下ろすと

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ \text{Sym.} & & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} C_{11} &= E_{11}(1 - \nu_{23}\nu_{32})/B_0, \quad C_{22} = E_{22}(1 - \nu_{31}\nu_{13})/B_0, \\ C_{33} &= E_{33}(1 - \nu_{12}\nu_{21})/B_0, \quad C_{44} = G_{23}, \quad C_{55} = G_{13}, \quad C_{66} = G_{12} \\ C_{12} &= E_{11}(\nu_{21} + \nu_{31}\nu_{23})/B_0, \quad C_{13} = E_{11}(\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32})/B_0, \\ C_{23} &= E_{22}(\nu_{32} + \nu_{12}\nu_{31})/B_0, \\ B_0 &= 1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13} \end{aligned}$$

$$\sigma_i = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \sigma_{13}, \sigma_{12}\}^T \quad (3)$$

$$\varepsilon_j = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{12}\}^T \quad (4)$$

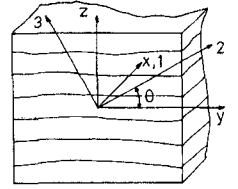


図1 素材の直交異方性

また弾性定数の対称性の条件から

$$\frac{\nu_{ij}}{E_i} = \frac{\nu_{ji}}{E_j} \quad (i, j=1, 2, 3) \quad (5)$$

したがって三次元直交異方性体を特性づけるためには9個の物理量が必要であり、9種類の独立した試験から決定されることになる。次に集成材では一般に木の特性を平均化することなどの目的から、接着剤を用いて合成する際に年輪の向きを種々回転して使用する。(図1参照)

y z 面を回転し、Mohrの円の解析と同様、回転前後の変換マトリックスを誘導すれば、

$$\{\sigma_i^*\} = [T]^{-1} \{\sigma_i\}, \quad \{\varepsilon_j^*\} = [T]^{-1} \{\varepsilon_j\} \quad (6)$$

ただし

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m^2 & n^2 & 2mn & 0 & 0 \\ 0 & n^2 & m^2 & -2mn & 0 & 0 \\ 0 & -mn & mn & m^2 - n^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m & -n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n & m \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$m = \cos \theta, \quad n = \sin \theta$$

したがって直交異方性木材のy z 座標への回転後のHookeの法則は次のようにあらわされる。

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\} \quad (8)$$

$$[D] = [T]^{-1} [C] [T] \quad (9)$$

ここで [D] は 6×6 の対称マトリックスでありその内容を書き下ろすと次のようになる。^{14), 15)}

$$\begin{aligned} D_{11} &= C_{11}, D_{12} = C_{12}m^2 + C_{13}n^2, D_{13} = C_{12}n^2 + C_{13}m^2, D_{14} = (C_{12} - C_{13})mn \\ D_{22} &= C_{22}m^4 + 2(C_{23} + 2C_{44})m^2n^2 + C_{33}n^4, \\ D_{23} &= C_{23}(m^4 + n^4) + (C_{22} + C_{33} - 4C_{44})m^2n^2 \\ D_{24} &= (C_{22} - C_{23} - 2C_{44})m^3n + (C_{23} - C_{33} + 2C_{44})mn^3 \\ D_{33} &= C_{22}n^4 + 2(C_{23} + 2C_{44})m^2n^2 + C_{33}m^4 \\ D_{34} &= (C_{22} - C_{23} - 2C_{44})mn^3 + (C_{23} - C_{33} + 2C_{44})m^3n \\ D_{44} &= (C_{22} - C_{23} + C_{33})m^2n^2 + C_{44}(m^2 - n^2)^2 \\ D_{55} &= C_{55}m^2 + C_{66}n^2, D_{56} = (C_{66} - C_{55})mn, D_{66} = C_{55}n^2 + C_{66}m^2 \end{aligned}$$

3. 三角形断面プリズム要素関係式^{15), 16)}

図2のような有限プリズム要素に対して要素内変位分布を直線変化と仮定しガラキン法を用いると

$$\left. \begin{aligned} \int_V N_\beta \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) dV &= 0 \\ \int_V N_\beta \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} - \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) dV &= 0 \\ \int_V N_\beta \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) dV &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

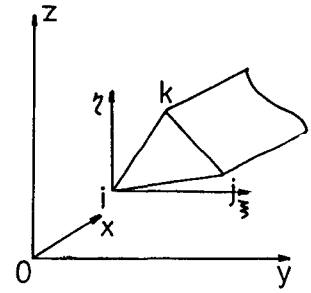


図2有限プリズム要素

ただし $N_\beta = a_\beta + b_\beta \xi + c_\beta \eta$ 、 $(\beta = i, j, k)$

$$a_\beta = (a_\beta + b_\beta x_i + c_\beta y_i) / 2A, \quad b_\beta = \bar{b}_\beta / 2A, \quad c_\beta = \bar{c}_\beta / 2A$$

$$2A = x_j y_k + x_i y_j + x_k y_i - (x_j y_i + x_i y_k + x_k y_j)$$

$$\bar{a}_i = x_j y_k - x_k y_j, \quad \bar{a}_j = x_k y_i - y_k x_i, \quad \bar{a}_k = x_i y_j - x_j y_i$$

$$\bar{b}_i = y_j - y_k, \quad \bar{b}_j = y_k - y_i, \quad \bar{b}_k = y_i - y_j$$

$$\bar{c}_i = x_k - x_j, \quad \bar{c}_j = x_i - x_k, \quad \bar{c}_k = x_j - x_i$$

$$\left. \begin{aligned} u &= \sum_{m=1}^{\infty} (N_i u_i + N_j u_j + N_k u_k) \cos Mx \\ v &= \sum_{m=1}^{\infty} (N_i v_i + N_j v_j + N_k v_k) \sin Mx \\ w &= \sum_{m=1}^{\infty} (N_i w_i + N_j w_j + N_k w_k) \sin Mx, \quad M = \frac{m\pi}{l} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

以上より式(10)の部分積分を実行することにより直交異方性プリズム要素の節線力と節線変位に関する関係式が次のように得られる。

$$[K] \{u\} + [M] \{\ddot{u}\} = \{F\} \quad (12)$$

$$\{F\}^T = \{X_i, Y_i, Z_i, X_j, Y_j, Z_j, X_k, Y_k, Z_k\}$$

$$\{u\}^T = \{u_i, v_i, w_i, u_j, v_j, w_j, u_k, v_k, w_k\}$$

$$\{\ddot{u}\} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{u\}$$

[K] は9×9の対称マトリックスであり、[M] は質量マトリックスである。また本論文の解析では慣性力に関する項は無視して剛性マトリックスのみ用いる。

4. 積層異方性集成材長方形厚板の三次元解析

(1) 解析精度の検討

本論文の解析手法による解析精度を検討するため、著者の一人が過去に行った均質等方性の長方形厚板の三次元応力解析結果¹⁷⁾と本理論による結果を比較する。構造は図3のように部分分布荷重を受ける2辺単純支持、2辺自由の長方形厚板である。文献¹⁷⁾の計算条件は図3を参照して次のようである。

a=160cm、b=128cm、h=40cm、c=20cm、d=20cm、

E=3×10⁵ kgf/cm²、ν=0.17、

Y方向分割数=16、Z方向分割数=10、

長軸方向のフーリエ級数の項数20項。

本論文の計算は図4のように文献¹⁷⁾の条件とほぼ等しくなるように分割し、他の数値は同一である。これらの比較の結果のうち、鉛直方向変位wとせん断応力τ_{xz}のx軸方向分布を表1に示してある。また図5と図6にはσ_xのz方向およびτ_{xz}のx軸方向分布を比較している。いずれもほぼ一致する結果が得られている。また、フーリエ級数の収束性に関して項数を40項、80項と増加させて計算した結果ではm=20項でほぼ収束している結果となった。

(2) 積層異方性集成材長方形厚板

ここでは図3と同様に2辺単純支持、2辺自由の長方形厚板が部分分布荷重を受ける場合を対象として、構造を図7に示すように素材の異方性の方向を変化させて組合せた場合の結果を示す。要素分割は図4と同一とし、各要素を素材の組合せに対応できるように配慮している。図中の縞線は年輪の方向を示している。素材はエゾマツを想定し、その弾性係数は次のようである。

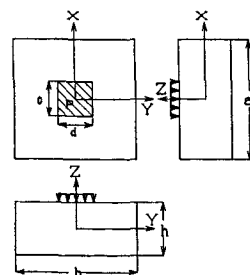


図3 部分分布荷重を受ける2辺単純
2辺自由支持の長方形厚板

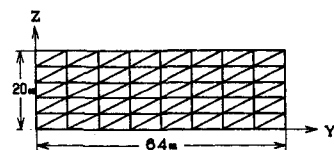


図4 三角形プリズム要素分割 (1/4断面)

表1 計算結果の比較

xa/16	長軸方向鉛直変位 wの分布 (y=0, z=0)		τ _{xz} (y=0, z=0)	
	本理論	文献 ¹⁷⁾	本理論	文献 ¹⁷⁾
0	1.648	1.646	0	0
1	1.586	1.586	1.097	0.921
2	1.437	1.438	1.023	1.013
3	1.248	1.249	0.729	0.778
4	1.034	1.036	0.600	0.629
5	0.797	0.798	0.548	0.558
6	0.542	0.542	0.518	0.522
7	0.274	0.274	0.502	0.505
8	0	0	0.500	0.500

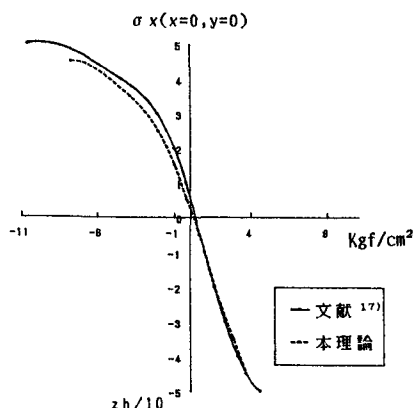


図5 σxのz方向分布の比較

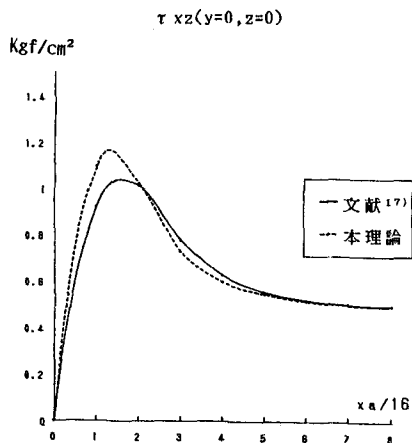


図6 τ_{xz} のX方向分布の比較

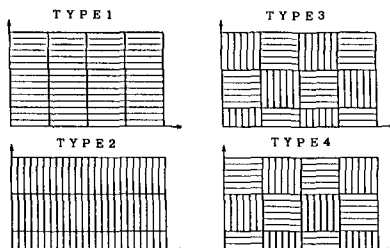


図7 素材の組合せの種類 (1/4断面)

表2 異方性の方向の変化による比較

x	たわみ ($y=0, z=0$) [μm]				$\tau_{xz}(y=0, z=0)$ [kgf/cm^2]			
	TYPE1	TYPE2	TYPE3	TYPE4	TYPE1	TYPE2	TYPE3	TYPE4
0	-299.23	-314.92	-307.29	-306.22	0	0	0	0
a/16	-280.38	-296.38	-289.03	-287.35	-1.7714	-1.5563	-1.6555	-1.6479
a/8	-239.01	-253.86	-247.66	-245.17	-2.0797	-1.9489	-2.0410	-1.9860
3a/16	-195.06	-206.70	-202.14	-199.63	-1.8363	-1.7592	-1.8343	-1.7641
a/4	-153.34	-161.77	-158.59	-156.52	-1.6198	-1.5455	-1.6104	-1.5549
5a/16	-113.56	-119.36	-117.22	-115.70	-1.4741	-1.3933	-1.4512	-1.4126
3a/8	-75.08	-78.70	-77.38	-76.39	-1.3751	-1.2940	-1.3462	-1.3186
7a/16	-37.36	-39.10	-38.47	-37.98	-1.3188	-1.2387	-1.2873	-1.2657
a/2	0	0	0	0	-1.3030	-1.2215	-1.2695	-1.2499

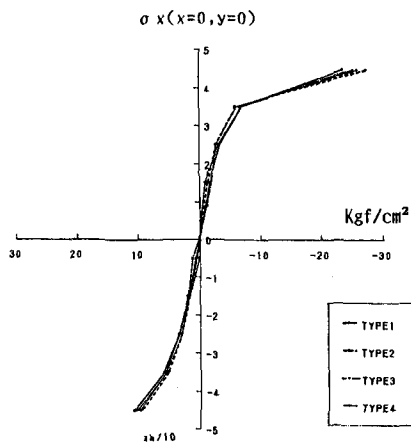


図8 σ_x のZ方向分布の比較

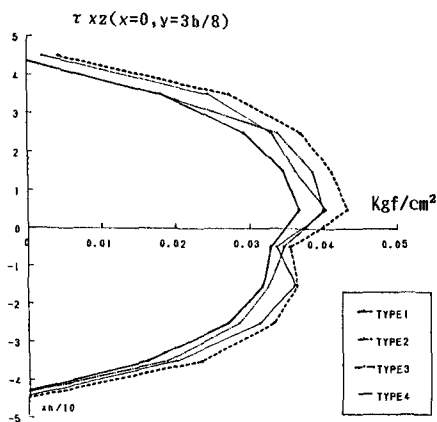


図9 τ_{xz} のX方向分布の比較

繊維方向(L)弾性係数 $E_L=110000\text{Kgf/cm}^2$ 、年輪方向(半径方向、R)弾性係数 $E_R=8500\text{Kgf/cm}^2$ 、
年輪接線方向(T)弾性係数 $E_T=4500\text{Kgf/cm}^2$ 、 $G_{LR}=5500\text{Kgf/cm}^2$ 、 $G_{LT}=4500\text{Kgf/cm}^2$ 、
 $G_{RT}=200\text{Kgf/cm}^2$ 、 $\nu_{LR}=0.40$ 、 $\nu_{LT}=0.60$ 、 $\nu_{RT}=0.65$

一般に弾性理論ではポアソン比 ν は0.5以下であるが、木材の場合は実験によりポアソン比は0.5より大きい場合がある。^{6)、7)} これらの定数を数値計算に用いても計算上の問題はないが、実用上は実験結果と比較する必要があるので、現在検討中であり、後に報告する予定である。

図7の素材の異方性の方向を変化させて組合せた4種類(Type1~Type4)の構造に対する計算結果のうち、鉛直方向変位 w とせん断応力 τ_{xz} について表2に示している。また、図8と図9にはそれぞれ σ_x と τ_{xz} の z 方向分布の比較を示している。これらの結果から全体としてType3とType4の結果はType1とType2の結果の中間値となっており集成材の構成の目的である平均化の効果があらわれていることがわかる。このような計算をさらに進めることによって、集成材における素材の組合せの効果や、組合せの最適化を検討することが可能となる。

5. あとがき

積層異方性有限ブリズム要素法を用いて、部分分布荷重を受ける集成材厚板の三次元解析を行ない、集成材の解析に本理論が有効であることを示した。今後はさらに数値計算を行うとともに、実験結果とも比較して、よりよい集成材のモデル化を検討する必要があるものと考えている。本研究の数値計算に当たっては北見工業大学開発工学科卒業生の玉田隆志、太田隆文、両君の援助があった。ここに感謝いたします。本研究の数値計算には北見工業大学情報処理センターのACOS910を使用した。

参考文献

- 1) 土木学会誌：特集「木」、8月号、1989。
- 2) 北見市：「木のささやきの聞こえる街」づくり(Wood Communication Town 整備事業)、1987。
- 3) 北海道カラマツ対策協議会、北海道木質材料需要拡大協議会編：北海道産カラマツ、1988。
- 4) 長谷部薫、薄木征三：集成材を使用した林道橋の設計、秋田大学鉱山学部研究報告、第8号、1987。
- 5) 秋田大学土木工学科、秋田営林局土木課：大断面集成桁橋の設計、昭和62年。
- 6) 農林水産省林業試験所：木材工業ハンドブック(改訂3版)、丸善、1982。
- 7) 土木学会編：土木工学ハンドブック第4版、第25編木構造、技報堂、1989。
- 8) 日本木材加工技術協会：構造用大断面集成材の製造基準、昭和62年12月。
- 9) 建築学会：木構造設計基準・同解説、1973。
- 10) 辻野哲司：集成材の曲げ剛性、木材学会誌、Vol.26、No.3、1980。
- 11) 王松永：木材集成体の横圧縮に関する研究(第3報)、木材学会誌、Vol.20、No.3、1974。
- 12) 大釜、山田：多孔体の弾性率、木材学会誌、Vol.20、No.4、1974。
- 13) 木村、他：大断面集成材の接着継手強度に関する実験的研究、構造工学論文集、Vol.35A、1989。
- 14) J.R.Vinson, R.L.Sierakowski：複合材料の構造力学。福田、野村、武田共訳、日刊工業新聞、1987。
- 15) 大島、三上、小笠原、岩崎：直交異方性積層集成材中を伝播する応力波速度の分散特性、構造工学論文集、Vol.36A、1990。
- 16) 大島俊之、能町純雄：有限ブリズム法による繊維強化複合材の縦波動伝播速度の研究、土木学会論文報告集、第297号、1980、5。
- 17) 大島俊之：定和分変換の構造解析への応用に関する研究、学位論文、1982。