

I — 6

近似法による立体トラス構造物の形状最適化に関する基礎的研究

室蘭工業大学 学生員 大塚 敏 正
室蘭工業大学 正 員 杉 本 博 之

1. まえがき

構造物の最適設計には、汎用性の点から数理計画法がよく用いられる。一般に最適化の過程では設計変数更新のために、目的関数や制約条件の値を計算する必要がある。数理計画法では、制約条件の値が必要となる度に構造解析を行ない、節点変位や部材応力を求めなければならないことから、最適化の過程では多数の構造解析が必要となる。よって、大規模構造物の設計にはこの手法の適用は困難であるとされていた。この様な問題点を解消する手法として、SchmitとMiuraにより提案された¹⁾方法が近似の概念(近似法)である。近似法では、現在の設計点で作成した近似モデルを最適化の対象とすることから、厳密な構造解析は近似モデルの作成時にのみ行なうことになり、要する構造解析の回数を極力少なくすることができると。これにより、最適化の応用範囲は広がった²⁾。またこの手法には、設計変数のリンクや制約条件のスクリーニングも含んでいるが、本論文では、制約条件の良質な近似モデルについて述べる。

最適化の対象となる近似モデルは、一般にテラー展開式を利用しその作成及び計算の容易さより、一階の微係数を用いた線形式を基本としている。さらにその近似モデルは、利用しようとする問題に対して良質でなくてはならない。良質な近似モデルとは、厳密な構造解析による計算結果に対して、近似度の高いものを指す。もし質の悪い近似モデルを最適化の対象とすると、計算効率としては解の収束に悪影響を与えることは明らかである。従って近似法により設計を行なう場合、問題にあった良質な近似モデルの作成が必要となる。現在のところ、部材断面積に関する良質な応力近似式について報告³⁾されているが、形状最適化問題における幾何変数に対する有効な近似式は挙げられていない。

本論文は、立体トラス構造物について近似法を用い形状最適設計を行なう場合に、応力の制約条件における構造解析に関する項について種々の近似式を提案し、数値計算結果により各近似式での効率、収束性について比較・検討を行なったものである。なお数値計算では、構造解析手法としてマトリックス変位法を用い、オブティマイザーとして汎用最適化プログラムADS⁴⁾(Automated-Design-Synthesis)を使用した。

2. 立体トラス構造物の形状最適設計

立体トラス構造物の形状最適化において、原問題は次の様に示される。

$$\text{目的関数: } F(\{X\}, \{Y\}) = \sum_{i=1}^n \ell_i(\{Y\}) \cdot x_i \rightarrow \min \quad (1)$$

制約条件:

$$\cdot \text{応力 } g_{ij}^s(\{X\}, \{Y\}) = \sigma_{ij}(\{X\}, \{Y\}) - \sigma_{ai}(x_i, \ell_i) \leq 0 \quad (i=1 \sim n, j=1 \sim NL) \quad (2)$$

$$\cdot \text{変位 } g_{kj}^d(\{X\}, \{Y\}) = \delta_{kj}(\{X\}, \{Y\}) - \delta_a \leq 0 \quad (k=1 \sim ND, j=1 \sim NL) \quad (3)$$

$$\cdot \text{細長比 } g_{ir}^r(x_i, \ell_i) = r_i(x_i, \ell_i) - r_a \leq 0 \quad (i=1 \sim n) \quad (4)$$

$$\cdot \text{上下限 } x_i^L \leq x_i \leq x_i^U \quad (i=1 \sim n) \quad (5)$$

$$y_i^L \leq y_i \leq y_i^U \quad (i=1 \sim m) \quad (6)$$

$$\text{設計変数: } \{X\} = \{x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n\}, \quad \{Y\} = \{y_1 \ y_2 \ \cdots \ y_m\} \quad (7)$$

ここで、 ℓ_i は i 部材の部材長、 x_i は i 部材の断面積である。 n は部材数である。 y_i は、幾何的形狀に関する設計変数で節点座標である。 σ は応力度、 σ_a は許容応力度で設計変数の関数である。 NL は荷重条件の数、 δ は節点変位、 δ_a は許容変位量、 ND は制約される変位の数、 r_i は i 部材の細長比、 r_a は許容細長比量、 x_i^U 、 x_i^L 、 y_i^U 、 y_i^L は設計変数の上下限值である。

3. 近似法による形状最適設計

前節の式 (1) ~ (7) で示された原問題を、何らかの数値計画法で解くことも可能である。しかし、その過程での構造解析の回数を考えると、設計変数の多い問題や自由度の大きな構造物の設計では、解析時間は無視することのできない量となる。さらにここで扱っている形状最適化問題では、断面積と節点座標の性質やオーダーの異なった 2 つの変数を同時に最適化するので問題が複雑になり、最適解が得られるまでの構造解析の回数も更に増えることは⁵⁾ 明らかである。

そこで、原問題をそれとほぼ等価な近似問題に変換し、最適化の対象を近似式とする近似法を利用する。本研究で考えた近似問題は次の様に示される。

$$\text{目的関数: } F(\{X\}, \{Y\}) = \sum_{i=1}^n \ell_i(\{Y\}) \cdot x_i \rightarrow \min \quad (8)$$

制約条件:

$$\cdot \text{応力 } \tilde{g}_{ij}(\{\hat{X}\}, \{\hat{Y}\}) = \tilde{\sigma}_{ij}(\{\hat{X}\}, \{\hat{Y}\}) - \sigma_{ai}(x_i, \ell_i) \leq 0 \quad (i=1 \sim n, j=1 \sim NL) \quad (9)$$

$$\cdot \text{変位 } \tilde{g}_{kj}(\{\hat{X}\}, \{\hat{Y}\}) = \tilde{\delta}_{kj}(\{\hat{X}\}, \{\hat{Y}\}) - \delta_a \leq 0 \quad (k=1 \sim ND, j=1 \sim NL) \quad (10)$$

$$\cdot \text{細長比 } g_{ir}(x_i, \ell_i) = r_i(x_i, \ell_i) - r_a \leq 0 \quad (i=1 \sim n) \quad (11)$$

$$\cdot \text{上下限 } x_i^L \leq x_i \leq x_i^U \quad (i=1 \sim n) \quad (12)$$

$$y_i^L \leq y_i \leq y_i^U \quad (i=1 \sim m) \quad (13)$$

$$\text{設計変数: } \{\hat{X}\} = \{\hat{x}_1 \hat{x}_2 \cdots \hat{x}_n\}, \{\hat{Y}\} = \{\hat{y}_1 \hat{y}_2 \cdots \hat{y}_m\} \quad (14)$$

ここで、応力の制約条件で上に (〜) がついた関数は、2 種類の近似法による近似式で次式で与える。

○応力の近似による応力近似式

$$\tilde{\sigma}_{ij}(\{X\}, \{Y\}) = \sigma_{ij}(\{\hat{X}^0\}, \{\hat{Y}^0\}) + \sum_{k=1}^n B_{ik}(\hat{x}_k - \hat{x}_k^0) + \sum_{p=1}^m B_{ip}(\hat{y}_p - \hat{y}_p^0) \quad (15)$$

○軸力の近似による応力近似式

$$\tilde{\sigma}_{ij}(\{X\}, \{Y\}) = \frac{1}{A_i} [f_{ij}(\{\hat{X}^0\}, \{\hat{Y}^0\}) + \sum_{k=1}^n C_{ik}(\hat{x}_k - \hat{x}_k^0) + \sum_{p=1}^m C_{ip}(\hat{y}_p - \hat{y}_p^0)] \quad (16)$$

ここで、 A は断面積を f は軸力を表わし、 B_{ik} 、 C_{ik} は部材断面積に関する、 B_{ip} 、 C_{ip} は幾何変数に関する応力と軸力の 1 次導関数である。 $\hat{x}_k$ 、 $\hat{y}_p$ は近似変数であり、次式で与えられる。

$$\text{順変数: } \hat{x}_k = x_k, \hat{y}_p = y_p \quad \text{逆変数: } \hat{x}_k = \frac{1}{x_k}, \hat{y}_p = \frac{1}{y_p} \quad (17)$$

また、上に (−) がついた変位の制約条件式については、逆変数に関する線形近似式として次式で与えた。

$$\tilde{\delta}_{kj}(\{\bar{X}\}, \{\bar{Y}\}) = \delta_{kj}(\{\bar{X}^0\}, \{\bar{Y}^0\}) + \sum_{k=1}^n D_{ik}(\bar{x}_k - \bar{x}_k^0) + \sum_{p=1}^m D_{ip}(\bar{y}_p - \bar{y}_p^0) \quad (18)$$

$\bar{x}_k$ 、 $\bar{y}_p$ は逆変数であり、 D_{ik} 、 D_{ip} は部材断面積、幾何変数の逆変数に関する一次導関数である。

以上の様に変換された近似最適化問題を解くが、応力近似式中の近似関数について有効な近似法やそれに関する近似変数は提案されていない。そこで 2 種類の近似法と 4 種類の近似変数の組み合わせにより、8 種類の近似式を提案し、数値計算例より比較・検討して提案した応力近似式の優劣について検討を行った。

4. 数値計算例

近似式を最適化の対象とすると、設計変数が初期値より遠く離れた場合近似度は悪くなり、最適化の収束に悪影響を及ぼす可能性がある。特に幾何変数は部材断面積に比べ、目的関数の最小化に寄与する所が大きいことから初期値より遠く離れる可能性が大きく、近似度が悪くなり目的関数が振動を起こしやすくなる。

よって、近似法により形状最適設計を行なうに当たり、幾何変数に対して、数理計画法の逐次線形計画法等で一般に使用されているムーブリミットの設定を提案した。

そこで、いくつかの立体トラス構造物について近似法により形状最適設計を行ない、ムーブリミットと計算効率との関係について数値計算により検討を加えた。次に、各応力近似式を形状最適設計に利用した結果から、それらの優劣を比較した。最後に、近似法による形状最適設計と原問題を直接数理計画法で解く方法との比較を行なう。

近似法による最適化では、制約条件のスクリーニング⁵⁾を行なっている。各ステージで考慮すべき制約条件はアクティブおよび満足していないもののみで良いが、それでは各ステージごとに考慮する制約条件が変わる為、目的関数が振動を起こし収束しないケースが考えられる。よって、考慮する制約条件の数はアクティブおよび満足していないものの数より多く取るのが一般である。また、最適化の収束段階でアクティブな制約条件の数は、設計変数の数を大きく上回ることが無い。よって、各ステージで考慮する制約条件の数として、設計変数の数にいくらかの係数を掛けた値を用いる。ここで示している数値計算例では、その係数を2.0としている。

各近似最適化問題を解く手法は汎用最適化プログラムADS中のGRG（一般縮約勾配）法⁶⁾を用いている。設計変数は部材断面積と節点座標とし、鋼材はSS41、許容応力度等細部の規定は道路橋示方書⁷⁾に従うものとする。

数値計算結果を示す表では、1行目に近似の方法を示し、2行目には近似変数の組み合わせが示されている。前が部材断面積に、後ろが幾何変数についてのものである。以下の各ます目には、3行に5個の数値が示されている。上から、第1行は目的関数（ cm^3 ）、第2行は繰り返し回数、第3行は、左が最大の制約条件の値、（ ）内はアクティブな制約条件の数、第4行はCPU時間である。右端の2列は直接、数理計画法のGRG法、SLP（逐次線形計画法）を用いて解いた結果である。空白のます目は、正常な解に収束しなかったことを意味する。また、以下で（逆・順）の様に記述しているのは選択した近似変数を表わし、この場合部材断面積を逆変数に、幾何変数を順変数としたものを意味する。

（1） 有限差分幅について

近似式の作成では、感度解析として1階の微係数の計算が必要である。本来は解析的に求めるのが最良であるが、定式化することは困難な為、感度解析の手法には一般によく用いられる有限差分法による数値微分を利用した。そこで用いる有限差分幅として、部材断面積に関してはその1%の値を採用している。しかし幾何変数において同様な方法で差分幅を決めた場合、部材断面積とはオーダーが異なるため、差分幅にばらつきが出て微係数が不安定なものになる恐れがある。そこで本研究では、幾何変数の差分幅に一定の数値として10cmを与えた。

（2） 幾何変数に対するムーブリミットの検討

近似法におけるムーブリミットは、設計変数が初期値より遠く離れることを防ぐ為に設ける。しかしムーブリミットの値が小さい場合近似式の作成回数が増え、より多くの構造解析が必要となることや、真の解とは程遠い所で収束する可能性がある。よって、ムーブリミットの採用は出来るだけ控えたほうがよい。しかし、逆に大きい場合には解が振動する恐れがある。そこで幾何変数に対するムーブリミットの効果について検討する為に、図-1～3に示す、4部材トラス（case1、設計変数6、制約条件14）、25部材トラス

(case 2、設計変数 20、制約条件 75)、50 部材トラス (case 3、設計変数 20、制約条件 100) の形状最適設計に種々のムーブリミットを与えて計算した。case 1 では節点 5 の垂直変位を 0.2 cm と制約した。それぞれのムーブリミットの値と 8 種類 (case 2～3 については目的関数の値がほぼ同じになったものについてのみ取り挙げた) の応力近似式に対応する結果を、表 1～3 に示した。この計算例では、幾何変数に対する差分幅を 10 cm としている。各ケースにおけるムーブリミットの最大値は、ムーブリミットが無いのと等しいように設定してある。また部材断面積に関しては、ムーブリミットは設けていない。

この計算例から、正常に解が収束した場合は目的関数の値はほぼ等しくなっており、ムーブリミットを設けた場合の繰返し回数が、少なくなっているものが多い。近似法による形状最適設計では、ムーブリミットは必要なパラメータと考えられる。ただし、問題によってムーブリミットの有効な大きさは異なる。

(3) 応力近似式の比較

表 1～3 に示した数値計算結果を基にして、8 種類の応力近似式について比較を行なう。

まず応力、軸力の (順・逆) に関する近似式は 50 部材トラスの設計において、他と同じ様な目的関数が得られず、他の設計でも収束に安定性が見られなかった。よって、これらの近似式は形状最適化問題に不適当と考えられる。次に応力の (逆・逆) に関する近似式は、各ケースにおいて他と同じ様な目的関数が得られないことが多い。また軸力の (逆・逆) に関する近似式では、同じ様な目的関数が得られても、繰返し回数や CPU 時間が他の近似式に比べて多いなど、これらの近似式も不適当と考えられる。残りの近似式において近似法で比べた場合、総合的に見て軸力近似がよいと思われる。その中でも、(逆・順) に関する近似式により得られた結果が、各ケースのどの様な条件のもとでも安定しており、設計に要する CPU 時間や繰返し回数の面でも最良の結果が得られた。

以上の結果から、軸力の (逆・順) に関する近似式が、形状最適化問題における応力近似式の有効なもの 1 つといえる。

(4) 近似法を用いない設計との比較

GRG 法・SLP により直接、数理計画法で形状最適設計を行なった場合と、近似法を用いた形状最適設計の場合との結果の比較では、表 2、3 より近似法を用いた設計のほうが目的関数の値は減少している。この点で、どちらの手法による最適化が優れているかについての判定は明らかである。また CPU 時間や繰返し回数について、近似法を利用した形状最適化問題に有効と考えられる、軸力の (逆・順) に関する近似による結果と比較した。

case 2 では近似法による設計に要した CPU 時間が、GRG 法で要した CPU 時間の 1/3 程度に、SLP での 2/3 程度に減少した。case 3 では近似法による設計に要した CPU 時間は GRG 法、SLP による設計に要した時間に比べると半分以下となっている。繰返し回数について、case 2 では、近似法による設計では GRG 法と比べ 1/10 程度にまた、SLP で要した繰返し回数と比べると、1/3 程度に減少している。case 3 での繰返し回数の違いについては、近似法による設計では GRG 法と比べると約 1/6 に、SLP と比べると 1/3 に減少している。

case 2 では、近似法による目的関数と、GRG 法、SLP による目的関数がかなり異なる為、CPU 時間や繰返し回数などを比較するのは、適当ではないと思われる。しかし、目的関数は近似による設計のほうが少ないことや、なおかつ CPU 時間、繰返し回数についても近似による設計のほうが少ないことから、確実に近似法を用いた設計のほうが、原問題を直接何らかの数理計画法で解くよりも優れた手法であるといえる。

この論文で扱った構造の規模はさほど大きいとは言えない。しかしこの程度の規模の形状最適化でこのような差が生じることは、更に大規模なもしくは荷重条件の多い構造の形状最適設計を近似法により行なう時には、近似法の利点を最大限に発揮するはずである。

図-1 4部材トラス (case 1)

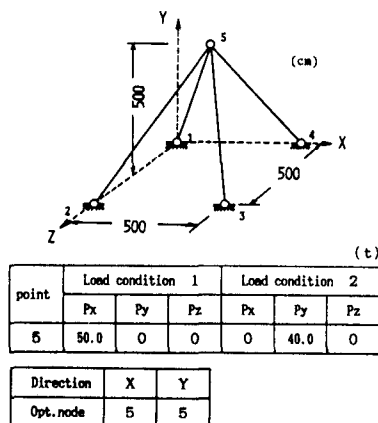


図-2 25部材トラス (case 2)

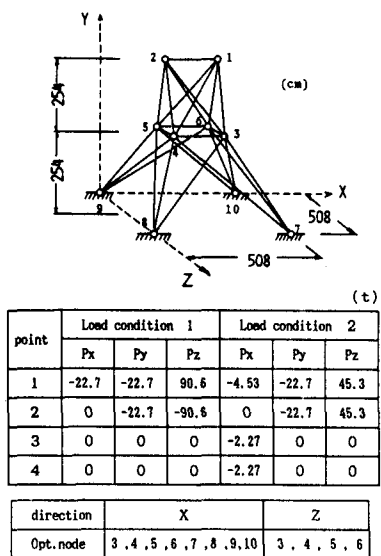


図-3 50部材トラス (case 3)

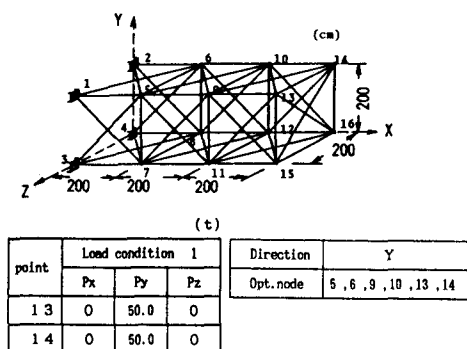


表-1 4部材トラスの結果

Move Limit (cm)	応力近似				軸力近似			
	順・順	順・逆	逆・順	逆・逆	順・順	順・逆	逆・順	逆・逆
20	52741 17 0.0000 (5)		52730 17 0.0000 (5)		52708 18 0.0002 (5)		52730 17 0.0000 (5)	
40	52715 11 0.0003 (5)	52761 10 0.0000 (5)	52732 10 0.0000 (5)	52757 10 0.0000 (5)	52723 11 0.0000 (5)	52754 10 0.0000 (5)	52733 10 0.0000 (5)	52761 10 0.0000 (5)
80	52727 8 0.0001 (5)	52763 7 0.0000 (5)	52733 7 0.0000 (5)	52723 7 0.0002 (5)	52721 7 0.0003 (5)	52719 7 0.0002 (5)	52734 7 0.0000 (5)	52767 7 0.0005 (5)
300		52736 11 0.0000 (23)	52766 8 0.0010 (23)	52737 11 -0.0875 (0)	52721 7 0.0035 (24)	52752 11 0.0022 (10)	52733 7 0.0008 (20)	52754 11 0.0002 (21)

表-2 25部材トラスの結果

Move Limit (cm)	応力近似				軸力近似				GRG	SLP
	順・順	順・逆	逆・順	逆・逆	順・順	順・逆	逆・順	逆・逆		
20	239980 11 0.0008 (21)	240180 9 0.0010 (21)	239690 7 0.0030 (22)	239670 8 0.0034 (24)	240090 8 0.0006 (21)					
40	239740 11 0.0034 (24)	240530 8 0.0011 (19)	239930 13 0.0039 (19)	240040 8 0.0028 (22)	239860 9 0.0010 (22)	240400 9 0.0013 (20)			271280 52 0.0015 (19)	298240 21 0.0001 (17)
80	240020 8 0.0011 (21)	240160 10 0.0024 (22)	240470 6 0.0038 (20)	239570 9 0.0016 (24)	239770 6 0.0007 (22)	240280 12 0.0014 (21)			7.98 s	3.89 s
300	240480 7 0.0007 (21)	240190 10 0.0000 (23)	239860 7 0.0010 (23)	239800 9 0.0035 (24)	240160 6 0.0008 (20)	240280 12 0.0002 (21)				

表-3 50部材トラスの結果

Move Limit (cm)	応力近似				軸力近似				GRG	SLP
	順・順	逆・順	逆・逆	逆・順	逆・逆	順・順	順・逆	逆・順		
20	327010 11 0.0002 (34)	327000 10 0.0038 (34)		326870 13 0.0067 (32)	327200 13 0.0000 (34)					
40		327060 7 0.0003 (34)		326960 5 0.0004 (34)					327990 29 0.0001 (36)	334180 16 0.0009 (27)
80		327030 6 0.0036 (34)	329060 12 0.0026 (36)	326990 11 0.0034 (34)	330350 12 0.0016 (34)					
200	326890 10 0.0029 (34)	327030 6 0.0036 (34)		326990 5 0.0034 (34)						

5. 結論

近似法を利用した立体トラス構造物の形状最適設計で、変位と応力の制約条件中における構造解析に関する項について、変位は逆変数について線形近似したものを用いた。応力については、形状最適化問題に有効な応力近似式について検討するため、何らかの方法により近似を行なった応力近似式について、それぞれを最適化の対象として設計を行なった。その数値計算結果より種々の比較・検討をした。これにより、得られた事柄を以下に述べる。

- (1) 2種類の近似法と、4種類の近似変数の組み合わせより計8種類の応力近似式について、立体トラス構造物の形状最適化に用いて、それぞれについて比較した。その結果、軸力を部材断面積は逆変数に幾何変数は順変数としたものに関する応力近似式が、この問題に有効な近似式の1つであることが示された。幾何変数を逆変数とした近似式では、計算効率や正常な解の収束などの点で、ほかの近似式に比べよい結果が得られなかった。
- (2) 近似法を用いた形状最適設計では、幾何変数に対してムーブリミットを設けることにより計算効率の向上が見られた。上で示した有効な応力近似式を用いた場合でも、若干の向上が見られたことから、ムーブリミットはこの様な問題で必要なパラメーターと考えられる。
- (3) 近似法を用いた最適化と、GRG法・SLPで直接最適化を行なった結果を比較した。その結果、設計に要するCPU時間や繰り返し回数で表わされる効率は、近似法を用いた手法による設計のほうが優れていることが示された。更に大規模な構造物の形状最適化を行なう場合、有効な応力近似式を与えて近似法により最適設計を行なうことにより、直接数値計画法を用いるよりも効率よく、解が得られると考えられる。

以上より、形状最適化問題に近似法を応用する場合、応力の制約条件における構造解析の項に関する近似式として軸力を(逆・順)に関して近似した応力近似式が有効な近似式の1つであり、この応力近似式を利用した近似法による形状最適設計法は優れた方法であると考えられる。

本論文の計算には、室蘭工業大学情報処理教育センターのFACOM M-380を使用した。

参考文献

- 1) Schmit, L.A. and H. Miura: Approximation Concepts for Efficient Structural Synthesis, NASA CR-2552, 1976.
- 2) 三浦宏一: 最適構造設計の方法とその応用について、第5回 MSC/NASTRANユーザー会議論文集 1987.
- 3) 杉本博之、山村和人: 骨組構造物の最適設計における応力近似モデルについて、構造工学論文集、Vol. 35A、pp. 347-359, 1989.
- 4) Vanderplaats, G.N. & H. Sugimoto: A General-Purpose Optimization Program for Engineering Design, Computers and Structures, Vol. 24, No. 1, pp. 13-21, 1986.
- 5) 山田善一編: 構造工学シリーズ1 構造システムの最適化～理論と応用～、土木学会、pp. 191, pp. 134, 1988.
- 6) Vanderplaats, G.N.: An Efficient Feasible Directions Algorithm for Design Synthesis, AIAA J., Vol. 22, No. 11, pp. 1633-1640, 1984.
- 7) 日本道路協会: 道路橋示方書・同解説 II 鋼橋編、丸善株式会社、1980.