I－5　　双対法・新双対法と近似法について

室蘭工業大学　　正　員　　杉　本　博　之

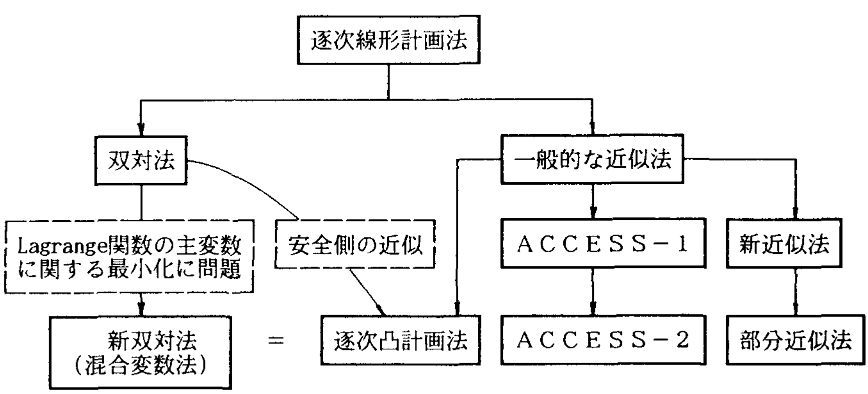
1．まえがき

近年、構造物の最適設計法としては、双対法[1,2]、新双対法[3]、あるいは近似法が良く用いられる。前２者と後者とは異なる理論のように理解されることもあるが、原問題を何らかの方法により近似して副問題を作成し、その副問題を繰返し最適化するという点では共通しており、すべて「近似の概念」[4]に基づく最適設計法と考えることができる。

本論文においては、それぞれの副問題の内容、およびそれらに共通する考え方あるいは相違点を説明し、それぞれの副問題の近似度、副問題の解法、および構造設計以外への応用についてこれら３つの方法を比較検討する。

2．近似法との関連でみた最適設計法

近似の概念と何らかの関わりがある最適設計法を分類し、歴史的経緯を加味してそれらの方法の関係を示すと図－１のようになる。逐次線形計画法（ＳＬＰ）[5]は、一般には近似の概念に基づく方法には分類されないが、目的関数、制約条件を線形近似した副問題をＬＰあるいは他の数理計画法で解く考え方は、以後の種々の方法の源流と考えられるので、図に加えた。双対法、新双対法については、後で詳しく説明するが、新双対法は双対法を構造設計のより一般的な問題に拡張する時に生じる問題点を解消して開発された方法である。一般に近似の概念に基づく方法といわれているのは、図の一般的な近似法の下に示されている方法である。ＡＣＣＥＳＳ－１[6]、－２[7]は、逆変数（設計変数の逆数）に関して線形近似した制約条件を、２次拡張ペナルティ関数法[5]に応用した方法である。新近似法[8]は、制約条件ではなく、制約条件に含まれる要素内力を順変数に関して線形近似する副問題を作成し、それを適当な数理計画法で解く方法である。部分近似法[9]は、構造応答に係わる項のみを、その最も適当な方法で近似して副問題を作成し、それを適当な方法で解く方法である。逐次凸計画法における副問題は、新双対法におけるそれと同じである。後者が、双対法の欠点を補う形で開発されたのに対し、前者は、副問題が相対的に安全側の近似であり、それを双対定理によらず、一般の数理計画法を用いて解いている点に差がある。



図－１　近似の概念と最適設計法

On Optimization Techniques Applying Dual Theory and Based on Approximation Concepts
by Hiroyuki SUGIMOTO

最適設計法と近似関数、および最適化手法の関係を表－1に示した。最適化手法の欄で数理計画法とあるのは、原則として特定の数理計画法を用いる必要のないことを意味する。

表－1　最適設計法と近似関数、最適化手法

最適設計法	近　似　関　数	最適化手法
逐次線形計画法	目的関数および制約条件の順変数に関する線形近似	数理計画法
双対法	目的関数および制約条件の逆変数に関する線形近似（分離可能関数）	双対定理
新双対法	目的関数および制約条件の順あるいは逆変数に関する線形近似（分離可能関数）	双対定理
逐次凸計画法		数理計画法
ACCESS-1,2	目的関数および制約条件の逆変数に関する線形近似	拡張SUMT
新近似法	要素内力の順変数に関する近似	数理計画法
部分近似法	必要な項のみ適当な方法による近似	数理計画法

3．原問題の定義　－骨組構造物の最小重量設計－

双対法、新双対法および近似法の比較をするために、骨組構造物の最小重量設計を原問題とし、これを以下のように定義する。

○目的関数：　$O(X) = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \longrightarrow \min$　(1)

○制約条件：

・応　力　$g_i^s(X) = \sigma_i(X) - \sigma_a(x_i) \leqq 0$　$(i=1 \sim n)$　(2)

・変　位　$g_j^d(X) = \delta_j(X) - \delta_a \leqq 0$　$(j=1 \sim j_1)$　(3)

・上下限　$x_i^L \leqq x_i \leqq x_i^U$　$(i=1 \sim n)$　(4)

○設計変数：　$X = \{x_1 \quad x_2 \cdots x_n\}$　(5)

ここで、w_i はi部材の部材長、x_i はi部材の断面寸法に関係する設計変数で、ここでは部材断面積とする、nは部材数、j_1 は変位を制約する条件の数、σ_i はi部材の応力、σ_a は許容応力度、δ_j は節点の変位量、δ_a は許容変位量、x_i^U、x_i^Lは設計変数の上下限値である。

この原問題を直接解くことも可能であるが、構造物の規模が大きくなると、厳密な（近似関数を用いる解析に対して一般の構造解析をこう表現する）構造解析に多くの計算時間がかかるので必ずしも実用的ではない。そこで、何らかの近似の概念に基づく最適設計法を用いるのである。

4．双対法

ここでいう双対法とは、構造物の応答が逆変数（部材断面積の逆数）に関して線形性が高いのに注目し、原問題の式（2）および式（3）を逆変数に関して線形近似し、その副問題に双対定理を応用して解く手法のことをいう。双対定理を有効に応用できるのは、式（2）、（3）を逆変数に関して線形近似することにより、副問題をすべて分離可能関数で表現できるためである。

双対法における副問題は、次のようになる。

○目的関数：　$O(X) = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \longrightarrow \min$　(6)

○制約条件：

・応　力　$\overline{g}_i^s(X)=\overline{\sigma}_i(X)-\overline{\sigma}_a(x_i)\leqq 0$　(i=1〜n)　(7)

・変　位　$\overline{g}_j^d(X)=\overline{\delta}_j(X)-\delta_a\leqq 0$　(j=1〜j_1)　(8)

・上下限　$x_i^L\leqq x_i\leqq x_i^U$　(i=1〜n)　(9)

○設計変数：　$X=\{x_1\ \ x_2\ \cdot\cdot\cdot\ x_n\}$　(10)

ここで、上に（—）がついた関数は、逆変数に関して線形近似された関数を意味する。

今、式（７）、（８）を次式のように表す。

$$g_j(X)=u_j+\sum_{i=1}^{n}c_{ij}\frac{1}{x_i}\qquad (j=1\sim J)\qquad (11)$$

そうすると、この副問題のラグランジュ関数は、次式で表される。

$$L(X,\{\lambda\})=\sum_{i=1}^{n}w_i x_i+\sum_{j=1}^{J}\lambda_j g_j=\sum_{i=1}^{n}w_i x_i+\sum_{j=1}^{J}\lambda_j\left(u_j+\sum_{i=1}^{n}c_{ij}\frac{1}{x_i}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left\{w_i x_i+\left(\sum_{j=1}^{J}\lambda_j c_{ij}\right)\frac{1}{x_i}\right\}+\sum_{j=1}^{J}\lambda_j u_j\qquad (12)$$

式（12）は、主変数**X**に関して最小化、双対変数｛λ｝に関して最大化される。主変数**X**に関する最小化は、x_i に関して個別にすれば良い。式（12）を最小にするx_i をx_i^*とすると、x_i^*は次式である。

i）$\sum_{j=1}^{J}\lambda_j c_{ij}\leqq 0$　：　$x_i^*=x_i^L$　(13)

ii）$\sum_{j=1}^{J}\lambda_j c_{ij}>0$　：

$$x_i^*=\begin{cases}x_i^L\ ; & x_i^0\leqq x_i^L\\ x_i^0\ ; & x_i^L<x_i^0<x_i^U\\ x_i^U\ ; & x_i^U\leqq x_i^0\end{cases}\qquad (14)$$

ここで、

$$x_i^0=\left\{\left(\sum_{j=1}^{J}\lambda_j c_{ij}\right)\Big/ w_i\right\}^{1/2}\qquad (15)$$

である。式（13）〜（15）より、**X**は｛λ｝で表現されたので、式（12）は双対変数｛λ｝だけの関数となり、式（12）を｛λ｝に関して最大化すれば、副問題が解けることになる。

以上の過程を繰返し行なうのが双対法である。この手法が有効であるのは、前記のように、逆変数に関する構造応答の線形性が高いからである。

5．新双対法

双対法における副問題の制約条件は、式（11）の形のものを扱ったが、これに幾何的な条件等から課せられる線形の制約条件、

$$h_k(X)=v_k+\sum_{i=1}^{n}b_{ik}x_i\leqq 0\qquad (k=1\sim K)\qquad (16)$$

が加わるより一般的な場合を考える。

この場合、目的関数および制約条件は、次のように表される。

○目的関数：　$O(X)=\sum_{i=1}^{n}w_i x_i\ \longrightarrow\ \min$　(17)

○制約条件：

$$g_j(X)=u_j+\sum_{i=1}^{n}c_{ij}\frac{1}{x_i}\leqq 0\qquad (j=1\sim J)\qquad (18)$$

$$h_k(X)=v_k+\sum_{i=1}^{n}b_{ik}x_i\leqq 0\qquad (k=1\sim K)\qquad (19)$$

この問題のラグランジュ関数は、次のようになる。

$$
\begin{aligned}
L(\mathbf{X},\{\lambda\},\{\mu\}) &= \sum_{i=1}^{n} w_i\ x_i + \sum_{j=1}^{J} \lambda_j\ g_j + \sum_{k=1}^{K} \mu_k\ h_k \\
&= \sum_{i=1}^{n} w_i\ x_i + \sum_{j=1}^{J} \lambda_j \left(u_j + \sum_{i=1}^{n} c_{ij}\frac{1}{x_i}\right) + \sum_{k=1}^{K} \mu_k \left(v_k + \sum_{i=1}^{n} b_{ik} x_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left\{ \left(w_i + \sum_{k=1}^{K} \mu_k\ b_{ik}\right) x_i + \left(\sum_{j=1}^{J} \lambda_j\ c_{ij}\right) \frac{1}{x_i} \right\} + \sum_{j=1}^{J} \lambda_j\ u_j + \sum_{k=1}^{K} \mu_k\ v_k
\end{aligned}
\tag{20}
$$

Lの$\mathbf{X}$に関する最小化は、x_i に関して個別に行なえば良い。今、$f_i(x_i)$を

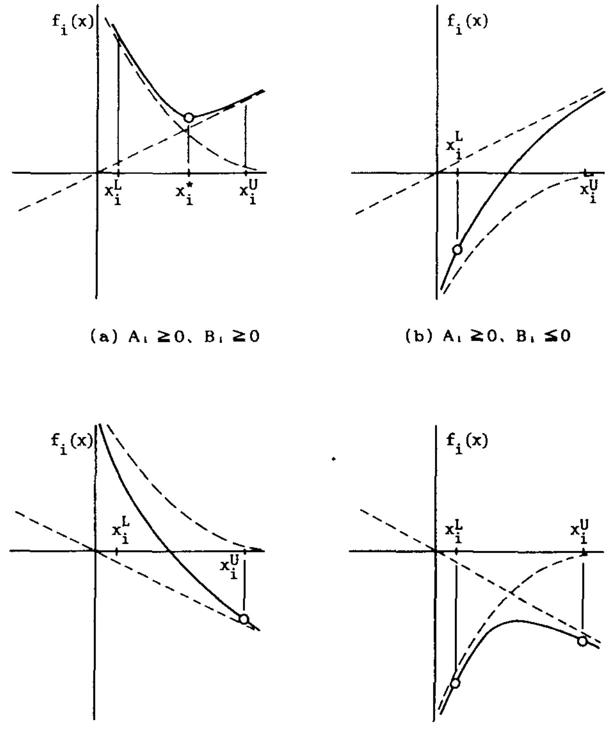
$$
f_i(x_i) = A_i\ x_i + B_i\ \frac{1}{x_i} \tag{21}
$$

ただし、

$$
\left.
\begin{aligned}
A_i &= w_i + \sum_{k=1}^{K} \mu_k\ b_{ik} \\
B_i &= \sum_{j=1}^{J} \lambda_j\ c_{ij}
\end{aligned}
\right\} \tag{22}
$$

と定義すると、f_i を最小にするx_i^*は、図−2に示すようにA_i、B_i の正負により変化する。この時問題となるのは（d）のケースである。A_i、B_i が共に負の場合、$f_i(x_i^L)$、$f_i(x_i^U)$ を計算し、どちらか小さい方に対応するx_i を採用することになる。これは、考えている空間が不連続であることを意味し不都合である。

ここで、式（22）において、b_{ik}、c_{ij}がすべて正であれば、A_i、B_i は必然的に正になり、上記の問題が存在しないことに着目し、ある関数を近似する時に、微係数の符合により近似変数を選択するように工夫したのが新近似法である。つまり、ある関数ξを順変数xに関して線形近似した近似関数$\xi^D(\mathbf{X})$ は、



(a) $A_i \geq 0$、$B_i \geq 0$　(b) $A_i \geq 0$、$B_i \leq 0$

(c) $A_i \leq 0$、$B_i \geq 0$　(d) $A_i \leq 0$、$B_i \leq 0$

図−2　A_i、B_i の正負とx_i^*の関係

$$
\xi^D(\mathbf{X}) = \xi(\mathbf{X}^0) + \frac{\partial \xi(\mathbf{X}^0)}{\partial x}(x - x^0) \tag{23}
$$

となり、逆変数$\frac{1}{x}$に関して線形近似した近似関数$\xi^R(\mathbf{X})$ は、

$$
\xi^R(\mathbf{X}) = \xi(\mathbf{X}^0) - (x^0)^2 \frac{\partial \xi(\mathbf{X}^0)}{\partial x}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^0}\right) \tag{24}
$$

となる。つまり、xに掛かる係数と$\frac{1}{x}$に掛かる係数は、必ずどちらかが正になる性質を利用しているわけである。結局、新双対法における副問題は、次のように作成される。

○目的関数：　$O(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{n} w_i\ x_i \longrightarrow \min$　(25)

○制約条件：　応力と変位に関する制約条件をまとめてgで表す。

$$
g_j(\mathbf{X}) = \sum_{+} c_{ij} x_i - \sum_{-} (x_i^0)^2\ c_{ij}\frac{1}{x_i} + u_j \leqq 0 \quad (j=1\sim m) \tag{26}
$$

・上下限　　$x_i^L \leqq x_i \leqq x_i^U$　　(i=1～n)　　(27)

○設計変数：　$X=\{x_1 \quad x_2 \cdots x_n\}$　　(28)

ここで、

$$u_j = g_j(X^0) - \sum_{+} c_{ij} x_i^0 + \sum_{-} c_{ij} x_i^0 \quad , \quad c_{ij} = \frac{\partial g_j(X^0)}{\partial x_i} \tag{29}$$

$\sum_{+}$、$\sum_{-}$は、c_{ij}の値が正あるいは負の項のみの級数を表す。

6．近似法

広い意味の近似法とは、構造最適設計の原問題の一部あるいはすべてについて関数近似を行ない、作成された副問題を何らかの数理計画法により繰返し解く方法の総称である。この意味では、前述の双対法、新双対法もこの近似法の一つであるということができる。ただ、これらは数理計画法として双対定理を有効に用いているので、上記のように名前がつけられているのである。

それらに対して、ここでは近似法として、部分近似法[9]を説明する。

部分近似法とは、構造最適設計の原問題を構成する数式の内、構造応答に関係する項のみを、その最も適当な方法で近似して副問題を作成する方法である。式（１）～（５）の原問題は、部分近似法では次のような副問題に変換される。

○目的関数：　$O(X) = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \longrightarrow \min$　　(30)

○制約条件：

・応　力　$\tilde{g}_i^s(X) = \tilde{\sigma}_i(X) - \sigma_a(x_i) \leqq 0$　　(i=1～n)　　(31)

・変　位　$\bar{g}_j^d(X) = \bar{\delta}_j(X) - \delta_a \leqq 0$　　(j=1～j₁)　　(32)

・上下限　　$x_i^L \leqq x_i \leqq x_i^U$　　(i=1～n)　　(33)

○設計変数：　$X=\{x_1 \quad x_2 \cdots x_n\}$　　(34)

ここで、$\bar{\delta}_j(X)$ は、双対法の副問題の場合と同様であり、変位の逆変数に関する線形近似を意味する。一方、$\tilde{\sigma}_i(X)$ は、応力の何らかの近似変数に関する近似関数[10] を意味する。応力と変位は、必ずしも同じ近似法を用いる必要はなく、また、許容応力$\sigma_a(x_i)$を近似する必要がないのが特徴である。

7．双対法、新双対法および近似法の比較

３．で原問題を定義し、４．～６．で双対法、新双対法、および近似法の副問題を簡単に説明した。ここでは、それらの３つの方法を、（１）副問題の近似度、（２）副問題の解法、および（３）構造設計以外への応用の３点について比較する。

（１）副問題の近似度（原問題と副問題の関係）

副問題と原問題とを比較して、原問題との関係について考察する。

双対法においては、すべての項を逆変数に関して線形近似する。これは、応力、変位等構造応答に係わる項のみでなく、許容応力度、細長比等、本来逆変数に関係のない項まで逆変数に関して線形近似することを意味し、必ずしも原問題に対して近似度の高い副問題とはいえない。

新双対法における近似関数は、順変数と逆変数という２つの近似変数の内、制約条件の値をより大きく近似する方を選択している方法である。近似関数間の大小の証明はなされているが、厳密な値との比較は出来ず、構造設計に用いる限り、双対法における副問題より近似度は劣ると考えられる。

近似法における関数近似は、式（31）に端的に示されているように、原問題に対して必要最小限に行なわれる。また、他の方法のように、制約条件ではなく制約条件を構成する項に適用されるので、３つの副問題の中では、原問題に最も近いと考えられる。

（２）副問題の解法

双対法と新双対法においては、副問題はすべて分離可能関数から構成されているので、双対定理が有効に応用でき、結局、双対変数に関する無制約最大化問題に変換される。設計変数の数は制約条件の数となり、スケーリングにより有効な制約条件の数を絞っても、なお原問題の設計変数の数よりは多くなるのが一般であるが、修正ニュートン法を利用できる効果は大きく、副問題の解法に関しては優れているといえる。

近似法における副問題の解法には、ＧＲＧ、ＳＬＰ等[5]の数理計画法が用いられる。当然、多くの構造解析が要求されるが、それらは副問題の近似関数の計算であるので、厳密な構造解析に比べてはるかに少ない計算時間で計算することができる。対象とする構造物が大きくなればなるほど、副問題の解法による双対法等との差は少なくなると考えられる。

（３）構造設計以外への応用

逆変数に関する線形近似が、構造設計以外の設計問題で有効とは限らないので、ここで説明した双対法を構造設計以外の問題に応用するのは適当と考えられない。

新双対法の副問題においては、相対的に安全側の選択をされた分離可能関数を近似関数とし、双対定理を用いて最適化を行なっている。従って、一般の設計問題への応用は可能である。ただ、原問題に対する近似度に関しては疑問が残るので、ムーブリミットの使用等の数値計算上の配慮は必要と考えられる。

近似法は、原設計問題の解析に要する負担を軽くすることを目的としている。原問題の解析が大変であればある程、その効果は表われる。適当な近似関数が発見されさえすれば、構造設計以外の問題への応用は可能である。

結局、新双対法と近似法は、構造設計以外の設計問題へも応用が可能ということになる。ただし、どちらにおいても、原問題と近似関数の関係についての基礎的な研究は必要と考えられる。

８．あとがき

本論文の作成に当たり、新日本製鐵の山村和人氏の御助力を頂いた。末筆ではあるが謝意を表する。

参考文献

１）Fleury, C. : Structural Weight Optimization by Dual Methods of Convex Programming, Int. J. for Numerical Methods in Engineering, Vol.14, No.12, pp.1761-1783, 1977.

２）Fleury, C. & Schmit, L.A. : Primal and Dual Methods in Structural Optimization, J. of the Structural Division, ASCE, Vol.106, No.ST5, pp.1117-1133, 1980.

３）Fleury, C. & V. Braibant:Structural Optimization:A New Dual Method Using Mixed Variables, Int. J. Numer, Methods Eng., Vol.23, pp.409-428, 1986.

４）Schmit, L.A. & B. Farshi:Some Approximation Concepts for Structural Synthesis, AIAA J., Vol.12, No.5, pp.692-699,1974.

５）山田善一編：構造工学シリーズ１　構造システムの最適化～理論と応用～、土木学会、1988.

６）Schmit, L.A. & H. Miura:A New Structural Analysis/Synthesis Capability-ACCESS 1, AIAA J., Vol.14, No.5, pp.661-671, 1976.

７）Schmit, L.A. & H. Miura: An Advanced Structural Analysis/Synthesis Capability-ACCESS 2, Int. J. Numer. Methods Eng., Vol.12, pp.353-377, 1978.

８）G.N. Vanderplaats & E. Salajegheh : A New Approximation Method for Stress Constraints in Structural Synthesis、AIAA J., Vol.27, No.3, pp.352-358, 1989.

９）杉本博之：部分近似によるトラス構造物の最適設計に関する研究、構造工学論文集、Vol.36A 、掲載予定.

10）杉本博之、山村和人：骨組構造物の最適設計における応力近似モデルについて、構造工学論文集、Vol. 35A 、pp.347-359、1989.