

II-26

幅の広い直線開水路流れにおける
フルードの相似則に関する研究

北海道大学工学部 正会員 山 田 正

1. はじめに

従来より開水路流れの相似則としてフルードの相似則が用いられてきたことはあらゆる種類の水理学の教科書において言及されていることである。そして多くの室内実験や実際河川における野外観測の結果はフルード数を用いて整理され、多くの水理現象がうまく説明されてきたことは周知のことである。しかしながら近年の移動床水理学の理論的研究や、室内実験及び実際河川での精力的な観測成果によって特に移動床としての河床形態に関してはフルード相似が厳密には成立していないことが指摘され始めてきた。この様な研究の進展状況の中で、木下(1)は数多くの実験を行い、実験室スケールでの河床形態と現地河川の河床形態との比較からフルードの相似則が砂れき堆スケールの河床形態に対しては単純には適用出来ないことを明確に指摘し、さらにいわゆる砂れき堆相似の考え方を提案している。この概念の背景には川幅スケールの幾何形状やオーダーを有する河床形態に対しては局所的な流速やそれに付随する局所的な河床せん断応力あるいは局所的な流砂量等が川幅平均で定義された量からどの程度はずれているかということがその発生機構に対しては本質的な作用をすると言う考え方がある。よって断面平均として定義されたフルード数はこの様な問題に対してはほとんど意味のない無次元数となる。この問題提起に対しては玉井によって理論的な説明が与えられている。本論文において著者が議論しているのは上記のような川幅スケールで規定されるような大きい河床形態を有する開水路流れではなく、それよりは小さいスケールの中規模河床形態以下のスケールの河床形態を有する開水路流れであり、このような流れの相似則に限定して議論を進めている。

2. フルード(数) 相似

2.1 臨界フルード数の定義

ここで新たに臨界フルード数を定義する。一般にフルード数は平均流速と平均水深を用いて定義されており、さらにフルード数 $=1$ は常流と射流を区別する値として使われる。ところで開水路流れにおいては上、下流の影響を伝える最大の速度は表面波としての長波である(有限振幅の孤立波は例外として)。よって平均流速が最大伝播速度を有する長波の波速と等しい状態であるフルード数 $=1$ の状態は下流の影響が上流に伝わらなくなる臨界状態言えよう。そしてこのときには長波の波速 $=$ 平均流速となっていることより発生した長波は移動することなくその場に滞り、水面にはいわゆる定在長波が存在することになる。しかし問題によっては長波そのものが現象の本質として発生しない場合がある。このときにはその問題において発生する表面波のうち最大伝播速度を有する表面波の伝播速度と平均流速の比として臨界フルード数を新たに定義し、この値を越えるか否かで常流、射流を区別する方が合理的になる。そしてこの新たに定義した臨界フルード数の状態においては長波とは異なった、その現象において発生する最大の伝播速度(位相速度)を有する浅海波が定在水面波として存在することになる。このときが臨界状態として本論文において定義される。なおこの定義はかつてLighthillによって定義されているが、その後に出版された国の内外の水理学の教科書の中で言及されことは全くなかった。それではどの様な問題の時にどの様な波長を持った水面波が形成されるのであろうか。この問題は次節以下に述べられる。

2.2 浅水方程式と無次元数

我々がフルードの相似則を採用してきた理論的背景には流れの基本式を無次元化するときは無次元相似パラメータとしてフルード数が得られると言うことがある。この限りにおいてはフルードの相似則は絶対的なように思われる。しかしこのときに用いられる基本式としては鉛直方向の圧力分布として静水圧分布

を仮定したいわゆる浅水方程式であることが多い。この方程式を無次元化して表すと、以下の式を得る。

$$(1 - Fr^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

ここにFrは水深と断面平均した流速から作られるフルード数である。そしてFrは平均流速と長波の波速の比で定義されている。ここで問題とすべきはなぜ長波が現れたかと言うことである。周知のことではあるが一般に水面波として静水圧分布を仮定したときに得られる水面波は長波である。さらに言うと浅水方程式を用いる限り得られる波動は長波のみであり、これより短い波長を持った表面波は浅水方程式では表現しようがない。ところで我々が洪水流等の不定流を含む多くの水理学や河川工学上の問題を考えるとき、大部分の問題は現象を長波と見なして差障りが無い程度に十分に波長の長い問題である。このような問題に上記の浅水方程式を用いることはなんら問題はなく、フルード数は相似パラメータとして適当なパラメータになり得る。しかし現象によつては長波とは見なし得ない程短い波長を持った水面波しか現れない問題も存在する。例えば水深4mに対して波長10m程度の長さスケールを持ったduneを考えると、発生する水面波はとうてい長波とは見なし得ないものである。あるいは現象の本質として長波が現れないような問題を考えるとき、上記の観点から長波の波速との比としてのフルード数の概念は全く意味を持たないことになる。それではどのようなスケールの問題においてどのような波長の水面波を考慮しなければならないであろうか。

3. 2次元的な障害物を越える流れ、あるいは不規則底面上の流れの水面形に関する理論解析

不規則底面上の水面形につき、特に常流の場合に限り理論的に解析を行った。ここで扱う障害物や不規則底面はその鉛直方向の高さや波高が水深に比べて十分に小さい場合である。このような流れの解析では一般にせん断力を考慮した基本式から出発するものと、ポテンシャル流れとして扱う方法があるが、ここでは理論の簡明さからポテンシャル流れとして扱う。水路床が単sin形のときの解は良く知られており、Kennedyや林らによつて移動床の不安定問題に使用されている。水路床が不規則底面の場合には上記の解の和し合わせによつて表すことができ、Jain and Kennedy らの解析によると

$$\zeta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} B(x) e^{ikx} dk, \quad \varphi_0(x, y) = Vx + \int_{-\infty}^{\infty} J \cdot B(x) e^{ikx} dk \quad (2)$$

$$J(k, z) = \frac{\cosh(kz) + Fr^2 \cdot kh \sinh(kz)}{Fr^2 \cdot kh \cosh(kh) - \sinh(kh)}, \quad Fr^2 = \frac{1}{kh} \tanh(kh) \quad (2)^*$$

式(2)によつてあらわされる。ここにXは流れ方向、zは(平均水面から測つた)鉛直方向の座標表している。hは平均水深、Frはフルード数を表わしている。ζは平均水面からの水位の変位、η(X)は不規則底面の底面形状に関連した量、Vは流れの平均速度である。Jain and Kennedyらは上記の基本式に流砂量の連続式を加えて不規則底面をもつ移動床の安定問題を解いているが、彼らの解析では(3)式の一つの成分につき解析しているのであつて、(2)式の積分を実行しているわけではない。ところで(2)式の積分を実行するときは(2)*式の関係を満たすkoにおいてJ(k, z)の分母が0になり、特異点が現れてしまう。このように積分経路上に特異点がある場合の対策としては積分を(1)主値積分の意味で考える。(2)積分経路を特異点を回避するように変更する、(3)特異点を経路から微小量ずらして積分した後、ずらし量を0にもっていく、以上三通りの方法がある。

注) 本計算の一部は文献(10)から抜粋したものである。

上記のどの方法を用いても同じ結果を得ることができる。しかし、(3)の方法が物理的意味が一番明確であるので著者はこの方法を用いて積分を実行した。ところで流れとして扱ったとき、(2)式のように特異点が経路上に存在するときの積分方法はRayleighによって解決されたようであり、Lambの本に記されている。また前記のような特異点が現れる問題はプラズマ物理においても現れるようであり、Landauの規則と呼ばれている。著者は(2)式を基本式として解析したが、後にLighthillの本には流れの基本式に立ち返った解析がなされていることを知った。よってここではLighthillの解析に従って水面形を求める。まず、流れのポテンシャルは $\psi_0 = Vx + \psi$ とおき平均流からの寄与と波動成分とに分離する。波動成分については $\psi(x, z) = \Phi(z)\exp(i(kx + \omega t))$ とおく。水面の変位は $\zeta = a\exp(i(kx + \omega t))$ とおく。 ω は角振動数である。ここでは境界条件としては以下の三つが考えられる。

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial t} \right|_{z=0} = -g\zeta, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \left. \frac{\partial \psi}{\partial z} \right|_{z=0}, \quad w = \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \quad \text{on} \quad z = -h \quad (3)$$

次に未知関数 $\Phi(z)$ 、 ζ に関しては次のようにおく。

$$\Phi(z) = a\{\alpha \exp(kz) + \beta \exp(-kz)\}, \quad \zeta(x) = aB(\omega, k)\exp\{i(kx + \omega t)\} \quad (4)$$

ここで未知数 α 、 β 、 $B(\omega, k)$ は上記の境界条件から定められ、

$$\alpha = \frac{1}{2}i \frac{gk + \omega^2}{\omega k}, \quad \beta = \frac{1}{2}i \frac{gk - \omega^2}{\omega k}, \quad B(\omega, k) = \frac{i}{\omega} \{\omega^2 \cosh(kh) - gk \sinh(kh)\} \quad (5)$$

となる。これを用いると底面における垂直方向速度 $w(-h)$ はつぎのようになる。

$$w(-h) = aB(\omega, k)\exp\{i(kx + \omega t)\} \quad (6)$$

ここで定常状態あるいは定在波を考えると、前節の結論から $V = C = k/\omega$ が成立し、

$$w(-h) = aB(kV, k)\exp(ikx) \quad (7)$$

となる。さらにすべての波数成分からの寄与を考えると、

$$w(-h) = \int_{-\infty}^{\infty} aB(kV, k)\exp(ikx)dk \quad (8)$$

となる。一方底面形状を $f_1(x)$ その微係数を $f(x)$ とすると $w(-h)$ は定常状態ではつぎのよう表せる。

$$w(x, -h) = V \frac{df_1(x)}{dx} = V f(x) = V \int_{-\infty}^{\infty} F(k) \exp(ikx) dk \quad (9)$$

となる。ここに $F(k)$ は $f(x)$ のフーリエ変換である。つぎに (8)=(9) より、

$$a = VF(k)/B(kV, k) \quad (10)$$

を得る。よって水面の変位は、

$$\zeta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{VF(k)}{B(kV, k)} \exp(ikx) dk \quad (11)$$

$$Fr^2 = \frac{1}{k_0 h} \tanh(k_0 h) \quad (12)$$

となる。ここに $B(kV, k)=0$ となる特異点は (5) 式より、あるいは (12) 式を満たす波数である。つぎに先に述べた特異点の移動方法を用いると、(11) 式の積分は通常の留数の定理が適用できる。すなわち特異点を ε だけ上方にずらし、 $k=k_0 + i\varepsilon$ を新しい特異点とする。この操作は $\exp(ikx)=\exp(ik_0x)\exp(i\varepsilon x)$ より、ポテンシャル流れにはほんのわずかの空間的減衰項を加えたことに相当する。このあと $k=k_0 + i\varepsilon$ 点での留数計算にかなり長い計算を必要とするが、その結果水面形に関して次式を得る。

$$\zeta(x) = 4\pi \left[F(k_0 h) \exp(ik_0 x) + F(-k_0 h) \exp(-ik_0 x) \right] \cdot \frac{\sinh(k_0 h)}{\sinh(2k_0 h) - 2k_0 h} \quad (13)$$

(13) 式の意味するものは非常に重要である。すなわち不規則底面上の流れでは (12) 式のいわゆる Airy 波の関係を満たす波数成分のみがあらわれ、これが定在波として水面に現れる。

図1は著者がかつて行った不規則底面を有する開水路流れに現れる定在波の波長をフルード数に対して示したものであり (12) 式の妥当性をよく示している。また (12) 式を満たす波数をもつ波は流れに対して sinusoidal で定在的な擾乱を与えることになり底面せん断応力に対しても sinusoidal な分布を与えることになる。よって底面が移動床の場合には (12) 式を満たす河床波が形成されることになる。これに関しては著者は既に文献 (10) において実験的に検証しており、河床波の中には不安定機構から自発的に発生するものの外に、定在波により強制的に作り出されるものがあることを確かめている。図2は図1と同様に

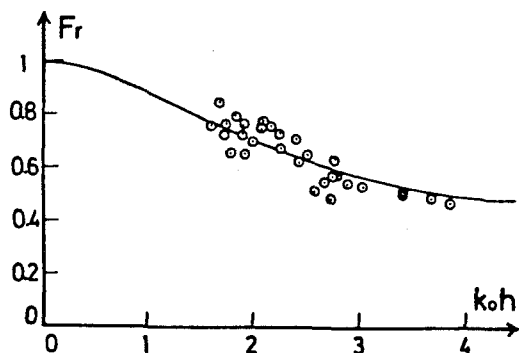


図1 不規則底面上の流れに現れる定在波の波長、波数とフルード数の関係 (図中の実線は(12)式)

かつて行つた移動床実験において測定された河床波の波長とフルード数との関係を示すものであり (12) 式と上記の河床波発生のお考え方の妥当性をよく証明している。この定在波によつて強制振動的に発生する河床波に対して移動床模型実験と実物の間の相似性を考えると、フルード数を同じ値にとると (12) 式を満たす無次元波数 kh の値を等しくする意味での相似性が成立することになる。

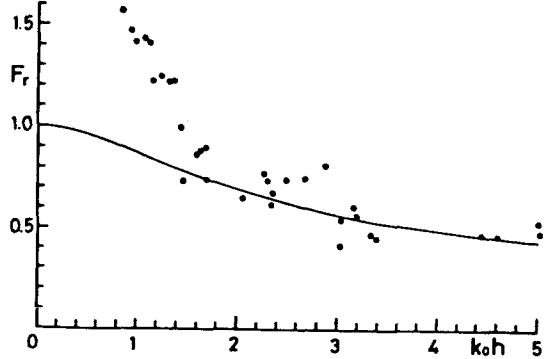


図2 2次元移動床開水路に発生する河床波の波数とフルード数の関係 (図中の実線は(12)式)

4. 3次元的な河床形を有する開水路流れの相似則

前節においては川幅方向に一様な河床形状を有する流れを扱っているのに対してここではより一般的な3次元形状をした河床あるいは障害物を有する流れの相似則を明らかにする。解析方法は基本的に2次元の場合と同じである。まずsin, cosine 形状をした河床上の流れの速度ポテンシャルは以下のように与えられる。

$$\phi = Ux - a(k) \underbrace{\frac{Uk}{\beta} \frac{\cosh(\beta z) + (Fr^2 kh / \beta) \sinh(\beta z)}{\sinh(\beta h) - (Fr^2 kh / \beta) \cosh(\beta h)}}_{G(k)} \cos(\beta y) \cos(kx) \tag{14}$$

ここに k, l はそれぞれ流れ方向波数、 $a(k)$ は波数 k をもつ河床振幅 (k, l の関数だが簡便のためここでは k のみの関数とする) である。ところで $a(k)$ は一般的に次のような関数形を取る。

$$a(k) = A \delta(k - k_0) + B(k) \tag{15}$$

ここで δ 関数は線スペクトルを意味しており河床の持つスペクトルのうち完全なsinusoidal成分であり、一方 $B(k)$ は残りの連続スペクトル成分である。図3はsin形状をした河床の上にリップルのような河床波がのっている、あるいは流れの中に障害物があるときの流れの概要を示すものである。このとき流れの速度ポテンシャルは次式のように全ての波数成分の総和として与えられる。

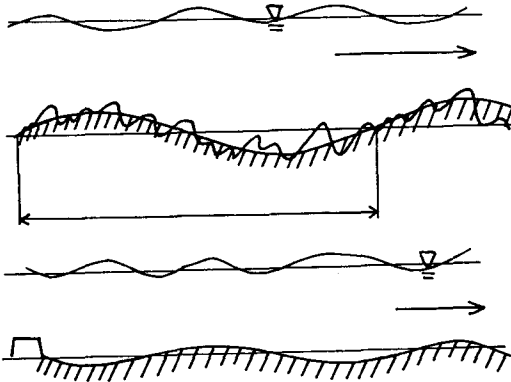


図3 流れの概要 (sin形状の上に不規則形状がのっている場合と一般的な障害物がある場合)

$$\begin{aligned} \phi &= Ux - \int_{-\infty}^{\infty} a(k) G(k) dk \\ &= Ux - \int_{-\infty}^{\infty} A \delta(k - k_0) G(k) dk + \int_{-\infty}^{\infty} B(k) G(k) dk \\ &= \underbrace{Ux - AG(k_0)}_I + \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} B(k) G(k) dk \right)}_{II} \end{aligned} \tag{16}$$

上式で特徴的なことは従来の他の研究者らの研究では右辺の I 項のみを考えているのに対して連続スペク

トルの成分を考慮することにより右辺のII項が現れることである。よって前節の結論と同様にI項からは不安定機構に基づき自励振動的に発生する河床波が、II項からは定在表面波が現れ、またこれにより強制振動的に発生する河床波が現れ、これらは共存することになる（もちろんこれは前節のような2次元的な河床形状についても同様である）。さらにII項の $G(k)$ の分母を0とする条件は次式で与えられる。

$$Fr^2 = \left(\frac{\beta}{k}\right)^2 \frac{1}{\beta h} \tanh(\beta h) \quad (17)$$

前節の(12)式と同様にフルード数が与えられたとき上式を満たす波数 k を有する定在波が現れる。

図4、5はこのときの(17)式を満たす波数とフルード数の関係を示すものであり、2次元の場合と異なり水路幅 B がパラメータとしてはいてくるほかに臨界フルード数の範囲は従来の定義で言うところの常流一射流にまたがって存在している。以上の解析から模型と実物でフルード数を同じ値に取ったときは上式を満たす βh （あるいは kh ）の定在波が現れると言う意味において相似性が成立することになる。このことが本研究で主張する最も重要な点である。

結論

(1) 本研究においては通常の $Fr=1$ の臨界フルード数とは異なった新しい臨界フルード数の定義を提案した。(2) 上記の臨界フルード数の意味における常流では、流れの中に置かれた障害物の回りや不規則底面上の流れの水面には平均流速と一致した位相速度をもつ定在波が存在する。(3)

上記の定在波の存在をポテンシャル流理論を用いて確認することができた。(4) 二次元小規模河床波のうち、波数がエアリー波の関係を満たすものは上記の定在波によって強制的に作りだされているという一つの試案を提示したが、不安定機構に基づく河床波と上記の河床波は流れの中で共存し得る。(5) 新しい臨界フルード数はエアリー波の波速＝流れの平均流速の関係を満たしたものであり、このとき開水路流れには上記の関係を満たす相似則が成立する。

参考文献

- (1) 山田正：土木学会論文報告集、No. 306, 1981. (2) Iwasa, Y. and J. F. Kennedy : J. Hyd. Div., Proc. ASCE, Mar., 1968. (3) Yuen, A. F. and J. F. Kennedy : IHR Report No. 121, Dec. 1971. (4) Kennedy, J. F. : J. Fluid Mech. 16, 1963. (5) Hayashi, T. : J. Hyd. Div. 96, 1970. (6) Jain, S. C. and J. F. Kennedy : J. Fluid Mech. 63, part 2, 1974. (7) Lamb, H. : Hydrodynamics, 6th ed. Cambridge University Press, 1932. (8) ランダウ＝リフシッツ：物理的運動学1、東京図書、1982. (9) Lighthill, M. J. : Waves in Fluids, Cambridge University Press, 1978. (10) 山田正：第28会水理講演会論文集、1984.

謝辞 本研究を遂行するに当たり著者は文部省科学研究費一般研究C（代表 山田正）から補助を受けている。ここに記して深甚なる謝意を表する。

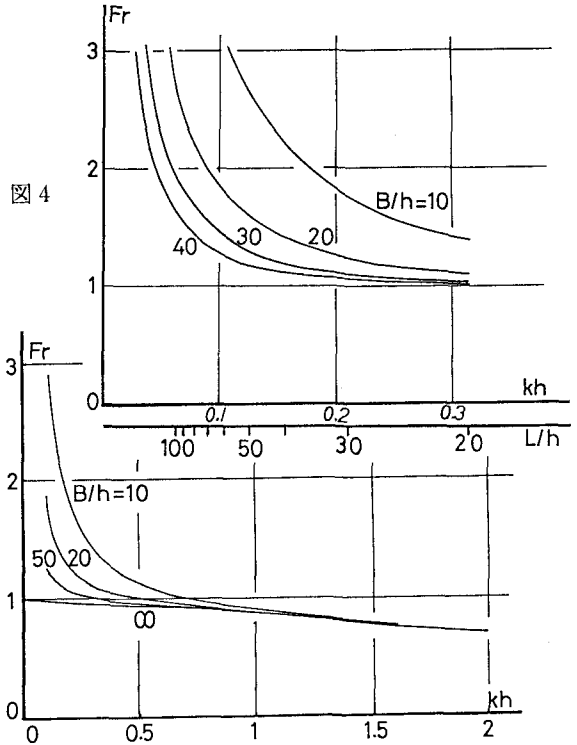


図5 3次元河床形状を有する流れのフルード数と波数の関係 (B は水路幅)